

А.А. Сапожников

Домашняя работа по геометрии за 9 класс

С задачами повышенной трудности

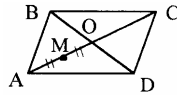
к учебнику «Геометрия, 7–9:
Учеб. для общеобразоват. учреждений /
Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев и др. —
13-е изд. — М.: Просвещение, 2003 г.»

ГЛАВА X. МЕТОД КООРДИНАТ

911.

- а) $2=0,5|k|$, $|k|=4$, т.к. $\vec{m} \uparrow\downarrow \vec{n}$, то $k<0$ $k=-4$.
 б) $240=12|k|$, $|k|=20$, т.к. $\vec{m} \uparrow\uparrow \vec{n}$, то $k>0$ $k=20$.
 в) $400=400|k|$, $|k|=1$, т.к. $\vec{m} \uparrow\downarrow \vec{n}$, то $k<0$ $k=-1$.
 г) $\sqrt{50}=\sqrt{2}|k|$, $|k|=\sqrt{25}=5$, т.к. $\vec{m} \uparrow\uparrow \vec{n}$, то $k>0$ $k=5$

912.



Дано: ABCD – параллелограмм; $AC \cap BD = O$;

$M \in AO$, $AM = MO$.

Найти k .

- а) $\vec{AC} = k \cdot \vec{AO}$; $\vec{AC} \uparrow\uparrow \vec{AO}$ и $|\vec{AC}| = 2|\vec{AO}|$, то $k=2$;
 б) $\vec{BO} = k \vec{BD}$; $\vec{BO} \uparrow\uparrow \vec{BD}$ и $|\vec{BO}| = \frac{1}{2} |\vec{BD}|$, то $k = \frac{1}{2}$;
 в) $\vec{OC} = k \vec{CA}$; $\vec{OC} \uparrow\downarrow \vec{CA}$ и $|\vec{OC}| = \frac{1}{2} |\vec{CA}|$, то $k = -\frac{1}{2}$;
 г) $\vec{AB} = k \vec{DC}$; $\vec{AB} \uparrow\uparrow \vec{DC}$ и $|\vec{AB}| = |\vec{DC}|$, то $k = 1$;
 д) $\vec{BC} = k \vec{DA}$; $\vec{BC} \uparrow\downarrow \vec{DA}$ и $|\vec{BC}| = |\vec{DA}|$, то $k = -1$;
 е) $\vec{AM} = k \vec{CA}$; $\vec{AM} \uparrow\downarrow \vec{CA}$ и $|\vec{AM}| = \frac{1}{4} |\vec{CA}|$, то $k = -\frac{1}{4}$;
 ж) $\vec{MC} = k \vec{AM}$; $\vec{MC} \uparrow\uparrow \vec{AM}$ и $|\vec{MC}| = 3|\vec{AM}|$, то $k = 3$;
 з) $\vec{AC} = k \vec{CM}$; $\vec{AC} \uparrow\downarrow \vec{CM}$ и $|\vec{AC}| = \frac{4}{3} |\vec{CM}|$, то $k = -\frac{4}{3}$;
 и) $\vec{AB} = k \vec{CB}$; \vec{AB} и \vec{CB} не коллинеарные \Rightarrow нельзя вычислить;
 к) $\vec{AO} = k \vec{BD}$; \vec{AO} и \vec{BD} не коллинеарные \Rightarrow нельзя вычислить.

913.

- а) да; б) да.

Т.к. сумма коллинеарных векторов есть коллинеарный им вектор.

914.

Дано: \vec{a} и \vec{b} не коллинеарны.

а) Доказать: $\vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{a} - \vec{b}$ не коллинеарны.

Доказательство от противного.

Пусть $\vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{a} - \vec{b}$ коллинеарные, получим $\vec{a} + \vec{b} = k(\vec{a} - \vec{b})$, откуда

$$\vec{a} + \vec{b} = k\vec{a} - k\vec{b}; \quad \vec{a}(1 - k) = \vec{b}(-1 - k); \quad \vec{a} = \frac{-1 - k}{1 - k} \vec{b},$$

пусть $\frac{-1 - k}{1 - k} = d$; тогда $\vec{a} = d\vec{b}$ — противоречие, т.к. \vec{a} и \vec{b} не кол-

линеарны, следовательно $\vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{a} - \vec{b}$ не коллинеарны.

б) Доказать: $(2\vec{a} - \vec{b})$ и $(\vec{a} + \vec{b})$ не коллинеарны.

Доказательство от противного.

Пусть $(2\vec{a} - \vec{b})$ и $(\vec{a} + \vec{b})$ коллинеарные, тогда $(2\vec{a} - \vec{b}) = k(\vec{a} + \vec{b})$, откуда

$$2\vec{a} - \vec{b} = k\vec{a} + k\vec{b}, \quad \vec{a}(2 - k) = \vec{b}(k + 1), \quad \vec{a} = \frac{k + 1}{2 - k} \vec{b},$$

т.е. $\vec{a} = d\vec{b}$ — противоречие, т.к. \vec{a} и \vec{b} не коллинеарные по условию.

в) Доказать: $(\vec{a} + \vec{b})$ и $(\vec{a} - 3\vec{b})$ не коллинеарные.

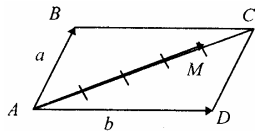
Доказательство от противного.

Пусть $(\vec{a} + \vec{b})$ и $(\vec{a} - 3\vec{b})$ коллинеарные, тогда $(\vec{a} + \vec{b}) = k(\vec{a} - 3\vec{b})$, откуда

$$\vec{a} + \vec{b} = k\vec{a} - 3k\vec{b}, \quad \vec{a}(1 - k) = \vec{b}(3k - 1), \quad \vec{a} = \frac{3k - 1}{1 - k} \vec{b},$$

т.е. $\vec{a} = d\vec{b}$ — противоречие, т.к. \vec{a} и \vec{b} не коллинеарные по условию.

915.



Дано: ABCD — параллелограмм; $M \in AC$, $AM:MC=4:1$.

Разложить: \vec{AM} по $\vec{a} = \vec{AB}$, $\vec{b} = \vec{AD}$

Решение:

$$\vec{AM} \uparrow \uparrow \vec{AC} \text{ и } |\vec{AM}| = \frac{4}{5} |\vec{AC}|, \quad \vec{AC} = \vec{AB} + \vec{AD}, \text{ то } \vec{AM} = \frac{4}{5} (\vec{a} + \vec{b}).$$

916.

Дано: \vec{a} и \vec{b} не коллинеарны.

Найти x, y .

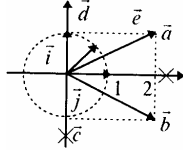
а) $3\vec{a} - x\vec{b} = y\vec{a} + \vec{b}$, то $y = 3, x = -1$

б) $4\vec{a} - x\vec{a} + 5\vec{b} + y\vec{b} = \vec{0}$, то $x = 4, y = -5$

в) $x\vec{a} + 3\vec{b} - y\vec{b} = \vec{0}$, то $x = 0, y = 3$

г) $\vec{a} + \vec{b} - 3y\vec{a} + x\vec{b} = \vec{0}$, то $y = \frac{1}{3}, x = -1$

917.



$$\vec{a} \{3; 0\}; \quad \vec{b} \{2; -1\};$$

$$\vec{c} \{0; -3\}; \quad \vec{d} \{1; 1\};$$

$$\vec{e} \{2; \sqrt{2}\}.$$

918.

$$\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j}; \quad \vec{b} = -2\vec{i} + 3\vec{j}; \quad \vec{c} = 2\vec{i};$$

$$\vec{d} = -3\vec{i} - 4\vec{j}; \quad \vec{e} = 2\vec{i} - 2\vec{j}; \quad \vec{f} = -4\vec{i} - 5\vec{j}.$$

919.

$$\vec{a} \{2; 3\}; \quad \vec{b} \{-\frac{1}{2}; -2\}; \quad \vec{c} \{8; 0\};$$

$$\vec{d} \{1; -1\}; \quad \vec{e} \{0; -2\}; \quad \vec{f} \{-1; 0\}.$$

920.

а) $\vec{x} = -3\vec{i} + \frac{1}{5}\vec{j}$; б) $\vec{y} = -2\vec{i} - 3\vec{j}$; в) $\vec{z} = -\vec{i}$;

г) $\vec{u} = 3\vec{j}$; д) $\vec{v} = \vec{j}$.

921.

а) $x\vec{i} + y\vec{j} = 5\vec{i} - 2\vec{j}$; $x = 5, y = -2$

б) $-3\vec{i} + y\vec{j} = x\vec{i} + 7\vec{j}$; $x = -3, y = 7$

в) $x\vec{i} + y\vec{j} = -4\vec{i}$; $x = -4, y = 0$

г) $x\vec{i} + y\vec{j} = \vec{0}$; $x = 0, y = 0$

922.

- а) $\bar{a} \{3; 2\}, \bar{b} \{2; 5\}, \Rightarrow \bar{a} + \bar{b} \{5; 7\};$
б) $\bar{a} \{3; -4\}, \bar{b} \{1; 5\}, \Rightarrow \bar{a} + \bar{b} \{4; 1\};$
в) $\bar{a} \{-4; -2\}, \bar{b} \{5; 3\}, \Rightarrow \bar{a} + \bar{b} \{1; 1\};$
г) $\bar{a} \{2; 7\}, \bar{b} \{-3; -7\}, \Rightarrow \bar{a} + \bar{b} \{-1; 0\}.$

923.

- а) если $\bar{a} \{5; 3\}, \bar{b} \{2; 1\},$ то $\bar{a} - \bar{b} \{3; 2\};$
б) если $\bar{a} \{3; 2\}, \bar{b} \{-3; 2\},$ то $\bar{a} - \bar{b} \{6; 0\};$
в) если $\bar{a} \{3; 6\}, \bar{b} \{4; -3\},$ то $\bar{a} - \bar{b} \{-1; 9\};$
г) если $\bar{a} \{-5; -6\}, \bar{b} \{2; -4\},$ то $\bar{a} - \bar{b} \{-7; -2\}.$

924.

$$2\bar{a} \{6; 4\}; \quad 3\bar{a} \{9; 6\}; \quad -\bar{a} \{-3; -2\}; \quad -3\bar{a} \{-9; -6\}.$$

925.

$$\begin{aligned} \bar{a} \{2; 4\} &\Rightarrow -\bar{a} \{-2; -4\}; & \bar{d} \{-2; -3\} &\Rightarrow -\bar{d} \{2; 3\}; \\ \bar{b} \{-2; 0\} &\Rightarrow -\bar{b} \{2; 0\}; & \bar{e} \{2; -3\} &\Rightarrow -\bar{e} \{-2; 3\}; \\ \bar{c} \{0; 0\} &\Rightarrow -\bar{c} \{0; 0\}; & \bar{f} \{0; 5\} &\Rightarrow -\bar{f} \{0; -5\}. \end{aligned}$$

926.

- а) $\bar{a} \{2; -5\}, \bar{b} \{-5; 2\} \Rightarrow \bar{v} = 3\bar{a} - 3\bar{b} = \{6; -15\} + \{15; -6\} = \{21; -21\};$
б) $\bar{a} \{4; 1\}, \bar{b} \{1; 2\}, \bar{c} \{2; 7\} \Rightarrow$
 $\bar{v} = 2\bar{a} - 3\bar{b} + 4\bar{c} = \{8; 2\} + \{-3; -6\} + \{8; 28\} = \{13; 24\};$
в) $\bar{a} \{-7; -1\}, \bar{b} \{-1; 7\}, \bar{c} \{4; -6\} \Rightarrow$
 $\bar{v} = 3\bar{a} - 2\bar{b} - \frac{1}{2}\bar{c} = \{-21; -3\} + \{2; -14\} + \{-2; 3\} = \{-21; -14\};$
г) $\bar{a} \{7; -2\}, \bar{b} \{2; 5\}, \bar{c} \{-3; 3\} \Rightarrow \bar{v} = \bar{a} - \bar{b} - \bar{c} = \{8; -10\}.$

927.

Дано: \bar{a} и \bar{b} – коллинеарные

Доказать: координаты пропорциональны

Пусть $\bar{a} \{x_1; y_1\}, \bar{b} \{x_2; y_2\}$. Так как \bar{a} и \bar{b} — коллинеарные, то $\bar{a} = k\bar{b}$ и $x_1 = kx_2, y_1 = ky_2$, откуда

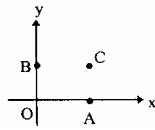
$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = k$$

928.

$\vec{a} \{3; 7\}$, $\vec{b} \{-2; 1\}$, $\vec{c} \{6; 14\}$, $\vec{d} \{2; -1\}$, $\vec{e} \{2; 4\}$, указать коллинеарные векторы.

\vec{a} и \vec{c} , т.к. $\frac{3}{6} = \frac{7}{14} = \frac{1}{2} = k$; \vec{b} и \vec{d} , т.к. $\frac{-2}{2} = \frac{1}{-1} = -1 = k$.

929.



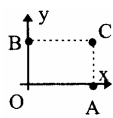
Дано: $A \in Ox_+$; $B \in Oy_+$.

Найти координаты A и B.

а) $OA=5$; $OB=3$, $\Rightarrow A(5; 0)$ и $B(0; 3)$

б) $OA=a$; $OB=b$, $\Rightarrow A(a; 0)$ и $B(0; b)$

930.



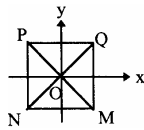
Дано: $A \in Ox$, $B \in Oy$; OACB – прямоугольник.

Найти координаты A, B, C.

а) $OA=6,5$, $OB=3$, $\Rightarrow A(6,5; 0)$; $B(0; 3)$; $C(6,5; 3)$;

б) $OA=a$, $OB=b$, $\Rightarrow A(a; 0)$; $B(0; b)$; $C(a; b)$.

931.

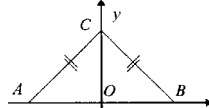


Дано: MNPQ – квадрат; $P(-3; 3)$, $MP \cap NQ = O$; $O(0; 0)$

Найти координаты M, N, Q.

$P(-3; 3)$; $M(3; -3)$; $N(-3; -3)$; $Q(3; 3)$.

932.

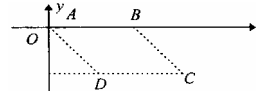


Дано: $\triangle ABC$, $AC=BC$, $AB=2a$, $CO \perp AB$ $CO=h$.

Найти координаты A, B, C.

$AB=2a$; $CO=h$; $A(-a; 0)$; $B(a; 0)$; $C(0; h)$.

933.



Дано: ABCD — параллелограмм, $A(0; 0)$, $B(5; 0)$, $C(12; -3)$.

Найти D.

$\vec{AC} = \vec{AD} + \vec{AB} \Rightarrow \vec{AD} = \vec{AC} - \vec{AB}$ по свойству параллелограмма.

$D(7; -3)$, т.к. $x_D = x_C - x_B = 7$; $y_D = y_C = -3$.

934.

а) $A(2; 7)$, $B(-2; 7)$; $\vec{AB} \{-2-2; 7-7\} = \{-4; 0\}$;

б) $A(-5; 1)$, $B(-5; 27)$; $\vec{AB} \{-5-(-5); 27-1\} = \{0; 26\}$;

в) $A(-3; 0), B(0; 4); \quad \overrightarrow{AB} \{0-(-3); 4-0\}=\{3; 4\};$
 г) $A(0; 3), B(-4; 0); \quad \overrightarrow{AB} \{-4-0; 0-3\}=\{-4; -3\}.$

935.

A	(0; 0)	(x; -3)	$(6; \frac{3}{2})$	(a; b)	(l; 2)
B	(1; 1)	(2; -7)	(3; 1)	(a+c; d+b)	(1; 2)
AB	{1; 1}	{5; y}	$\{-3; -\frac{1}{2}\}$	{c; d}	{0; 0}

$$\begin{aligned} 2-x=5 &\Rightarrow x=-3; \\ -7-(-3)=y &\Rightarrow y=-4. \end{aligned}$$

936.

A	(2; -3)	(-10; -11)	(0; 1)	(0, 0)	(c; d)	(3; 5)	(3t+5; 7)	(1; 3)
B	(-3; 1)	(4; 7)	(6; -11)	(-3; 7)	$\begin{pmatrix} 2a-c; \\ 2a-d \end{pmatrix}$	(3; 8)	(t+7; -7)	(-1; -3)
M	$(-\frac{1}{2}; -1)$	(-3; -2)	(3; -5)	$(-1\frac{1}{2}; 3\frac{1}{2})$	(a; b)	$(3; 6\frac{1}{2})$	(2t+6; 0)	(0; 0)

937.

Дано: $B \in AC, AB=BC; D \in BC, BD=DC; A(0; 1), B(5; -3).$
 Найти координаты C и D.

$$1) \begin{cases} x_B = \frac{x_A + x_C}{2} \\ y_B = \frac{y_A + y_C}{2} \end{cases} \begin{cases} 5 = \frac{0 + x_C}{2} \\ -3 = \frac{1 + y_C}{2} \end{cases} \begin{cases} x_C = 10 \\ y_C = -7 \end{cases} \Rightarrow C(10; -7).$$

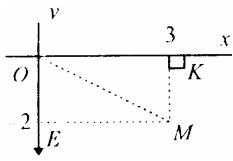
$$2) \begin{cases} x_D = \frac{x_B + x_C}{2} \\ y_D = \frac{y_B + y_C}{2} \end{cases} \begin{cases} x_D = \frac{5 + 10}{2} = 7,5 \\ y_D = \frac{-3 - 7}{2} = -5 \end{cases} \Rightarrow D(7,5; -5).$$

938.

а) $\vec{a} \{5; 9\}$, то $|\vec{a}| = \sqrt{5^2 + 9^2} = \sqrt{25 + 81} = \sqrt{106}$
 б) $\vec{b} \{-3; 4\}$, то $|\vec{b}| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$
 в) $\vec{c} \{-10; -10\}$, то $|\vec{c}| = \sqrt{(-10)^2 + (-10)^2} = \sqrt{100 + 100} = 10\sqrt{2}$
 г) $\vec{d} \{10; 17\}$, то $|\vec{d}| = \sqrt{10^2 + 17^2} = \sqrt{100 + 289} = \sqrt{389}$
 д) $\vec{e} \{11; -11\}$, то $|\vec{e}| = \sqrt{11^2 + (-11)^2} = \sqrt{121 + 121} = 11\sqrt{2}$

е) $\vec{f} \{10;0\}$, то $|\vec{f}| = \sqrt{10^2 + 0^2} = \sqrt{100} = 10$

939.



Дано: $M(3;-2)$.

Найти а) МК; б) МЕ; в) МО.

а) $MK \perp OX$, $MK=2$;

б) $ME \perp OY$, $ME=3$;

в) $OM = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$.

940.

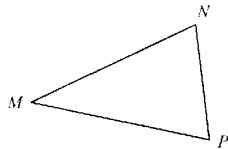
а) $A(2; 7)$ и $B(-2; 7)$, $AB = \sqrt{(-2-2)^2 + (7-7)^2} = \sqrt{16+0} = 4$;

б) $A(-5; 1)$ и $B(-5; -7)$, $AB = \sqrt{(-5-(-5))^2 + (-7-1)^2} = \sqrt{0+64} = 8$;

в) $A(-3; 0)$ и $B(0; 4)$, $AB = \sqrt{(0-(-3))^2 + (4-0)^2} = \sqrt{9+16} = 5$;

а) $A(0; 3)$ и $B(-4; 0)$, $AB = \sqrt{(-4-0)^2 + (0-3)^2} = \sqrt{16+9} = 5$.

941.



Дано: $M(4; 0)$; $N(12; -2)$ $P(5; -9)$.

Найти P_{MNP} .

Решение:

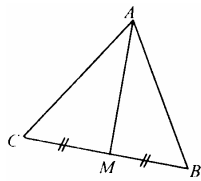
$$MN = \sqrt{(12-4)^2 + (-2)^2} = \sqrt{64+4} = \sqrt{68} = 2\sqrt{17};$$

$$NP = \sqrt{(12-5)^2 + (-2+9)^2} = \sqrt{49+49} = 7\sqrt{2};$$

$$MP = \sqrt{(5-4)^2 + (-9)^2} = \sqrt{1+81} = \sqrt{82};$$

$$P_{MNP} = 2\sqrt{17} + 7\sqrt{2} + \sqrt{82}.$$

942.



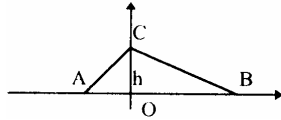
Дано: $A(0; 1)$; $B(1; -4)$; $C(5; 2)$; AM — медиана.

Найти AM .

$$\begin{cases} x_m = \frac{x_b + x_c}{2} \\ y_m = \frac{y_b + y_c}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} x_m = \frac{1+5}{2} = 3 \\ y_m = \frac{-4+2}{2} = -1 \end{cases} \quad M(3; 1)$$

$$AM = \sqrt{(3-0)^2 + (-1-1)^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$$

943.



Дано: $B \in OX_+$; $C \in OY_+$; $A \in OX$; $OA=a$,
 $OB=b$, $OC=h$.

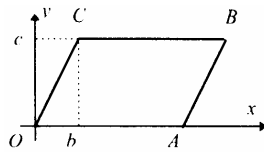
Найти AC , BC .

$B(b; 0)$; $A(-a; 0)$; $C(0; h)$.

$$AC = \sqrt{(0 - (-a))^2 + (h - 0)^2} = \sqrt{a^2 + h^2};$$

$$BC = \sqrt{(0 - b)^2 + (h - 0)^2} = \sqrt{b^2 + h^2}.$$

944.



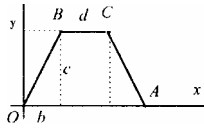
Дано: $OACB$ — параллелограмм;
 $A \in OX_+$; $B(b; c)$; $OA=a$.

Найти а) $C(x; y)$; б) AC , CO .

Т.к. $OC \parallel AB$, то $y_C = y_B = c$; т.к. $OA = BC = a$,
 то $x_C = b - a \Rightarrow C(b - a; c)$.

$$AC = \sqrt{(b - a - a)^2 + c^2}; \quad OC = \sqrt{(a - b)^2 + c^2}.$$

945.



Дано: $OBCA$ — трапеция; $OA=a$, $BC=d$, $B(b; c)$.
 Найти AC , OC .

$A(a; 0)$, $B(b; c)$; $OA=a$, $BC=d$.

Т.к. $OA \parallel BC$, то $y_C = y_B = c$; $x_C = b + d \Rightarrow C(b + d; c)$.

$$AC = \sqrt{(b + d - a)^2 + c^2}; \quad OC = \sqrt{(b + d)^2 + c^2}.$$

946.

а) Дано: $A(2; 3)$ и $B(x; 1)$; $AB=2$.

Найти x .

$$AB = \sqrt{(x - 2)^2 + (1 - 3)^2} = 2$$

$$2 = \sqrt{(x - 2)^2 + 4}; \quad 4 = (x - 2)^2 + 4; \quad (x - 2)^2 = 0; \quad x = 2.$$

б) Дано: $M_1(-1; x)$; $M_2(2x; 3)$; $M_1M_2=7$.

Найти x .

$$M_1M_2 = \sqrt{(2x + 1)^2 + (3 - x)^2} = 7$$

$$49 = (2x + 1)^2 + (3 - x)^2; \quad 49 = 4x^2 + 4x + 1 + 9 - 6x + x^2; \quad 5x^2 - 2x - 39 = 0;$$

$$D = (-2)^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-39) = 784; \quad x_{1,2} = \frac{21 \pm \sqrt{784}}{10}; \quad x_1 = 3; \quad x_2 = -2,6.$$

947.

Дано: $A(0; 1); B(1; -4); C(5; 2)$.

Доказать: $\triangle ABC$ — равнобедренный.

Найти S_{ABC} .

$$AB = \sqrt{1+25} = \sqrt{26}; \quad AC = \sqrt{25+1} = \sqrt{26}; \quad BC = \sqrt{16+36} = \sqrt{52},$$

т.к. $AB=AC$, то $\triangle ABC$ — равнобедренный.

$$\begin{cases} x_M = \frac{x_B + x_C}{2} \\ y_M = \frac{y_B + y_C}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} x_M = 3 \\ y_M = -1 \end{cases}$$

$$AM = \sqrt{(3-0)^2 + (-1-1)^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13},$$

т.к. $\triangle ABC$ равнобедренный, то медиана является высотой.

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} h \cdot BC = \frac{1}{2} BC \cdot AM = \frac{1}{2} \sqrt{52} \cdot \sqrt{13} = \frac{1}{2} 26 = 13.$$

948.

а) Дано: $A(-3; 5); B(6; 4); C \in OY, AC=CB$.

Найти $C(x; y)$.

Точка C имеет координаты $(0; y)$, то

$$AC = \sqrt{(-3-0)^2 + (5-y)^2} = \sqrt{9+(5-y)^2};$$

$$BC = \sqrt{(6-0)^2 + (4-y)^2} = \sqrt{36+(4-y)^2},$$

т.к. $AC=BC$, то

$$9+(5-y)^2 = 36+(4-y)^2; \quad (5-y)^2 - (4-y)^2 = 36-9;$$

$$(5-y-4+y)(5-y+4-y) = 27;$$

$$9-2y=27; \quad y=-9.$$

Ответ: $C(0; -9)$.

б) Дано: $C(4; -3)$ и $D(8; 1); E \in OY, CE=ED$.

Найти $E(x; y)$.

Точка E имеет координаты $(0; y)$,

$$CE = \sqrt{16+(y+3)^2}; \quad ED = \sqrt{64+(1-y)^2},$$

т.к. $CE=ED$, то

$$16+(y+3)^2 = 64+(1-y)^2;$$

$$(y+3)^2 - (1-y)^2 = 64-16;$$

$$(y+3-1+y)(y+3+1-y) = 48;$$

$$(2+2y)4 = 48; \quad 2+2y = 12;$$

$$2y = 10 \quad y = 5$$

Ответ: $E(0; 5)$.

949.

а) Дано: $A(1; 2); B(-3; 4); E \in OX, AE=EB$.

Найти $E(x; y)$.

Точка E имеет координаты $(x; 0)$

$$AE = \sqrt{(1-x)^2 + (0-2)^2} = \sqrt{(1-x)^2 + 4};$$

$$EB = \sqrt{(x+3)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{(x+3)^2 + 16}.$$

Т.к. $AE=EB$, то

$$(1-x)^2 + 4 = (x+3)^2 + 16; \quad (1-x)^2 - (x+3)^2 = 12; \quad (1-x-x-3)(1-x+x+3) = 12;$$

$$(-2x-2) \cdot 4 = 12; \quad -2x = 5; \quad x = -2,5$$

Ответ: $E(-2,5; 0)$

б) Дано: $C(1; 1)$ и $D(3; 5); M \in OX, CM=MD$

Точка M имеет координаты $(x; 0)$

$$CM = \sqrt{(1-x)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{(1-x)^2 + 1};$$

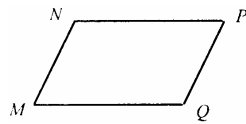
$$MD = \sqrt{(3-x)^2 + (5-0)^2} = \sqrt{(3-x)^2 + 25};$$

$$(1-x)^2 + 1 = (3-x)^2 + 25; \quad (1-x)^2 - (3-x)^2 = 24;$$

$$-2 \cdot (4-2x) = 24; \quad 4-2x = -12; \quad x = 8$$

Ответ: $M(8; 0)$

950.



Дано: $MNPQ$ — четырехугольник.

Доказать: $MNPQ$ — параллелограмм.

а) $M(1; 1); N(6; 1); P(7; 4); Q(2; 4)$.

$$MN = \sqrt{(6-1)^2 + (1-1)^2} = \sqrt{25} = 5;$$

$$PQ = \sqrt{(2-7)^2 + (4-4)^2} = \sqrt{25} = 5;$$

$$NP = \sqrt{(7-6)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10};$$

$$MQ = \sqrt{(2-1)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10};$$

Т.к. $MN=PQ; NP=MQ$, то $MNPQ$ — параллелограмм

б) $M(-5;1); N(-4;4); P(-1;5); Q(-2;2)$

$$MN = \sqrt{(-4 - (-5))^2 + (4-1)^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$$

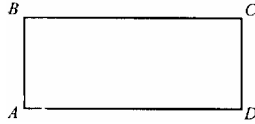
$$PQ = \sqrt{(-2 - (-1))^2 + (2-5)^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$$

$$NP = \sqrt{(-1 - (-4))^2 + (5-4)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$$

$$MQ = \sqrt{(-2 - (-5))^2 + (2-1)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$$

Т.к. $MN=PQ=NP=MQ$, то $MNPQ$ — ромб

951.



Дано: ABCD — четырехугольник.
Доказать: ABCD — прямоугольник.
Найти S_{ABCD} .

а) $A(-3; -1); B(1; 1); C(1; -3); D(-3; -3)$.

$$AB = \sqrt{16} = 4; BC = \sqrt{4} = 2; CD = \sqrt{16} = 4; AD = \sqrt{4} = 2;$$

$$BD = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}; AC = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}.$$

т.к. $AB=CD, BC=AD$ и $BD=AC$, то ABCD — прямоугольник (по признаку — параллелограмм с равными диагоналями).

$$S_{ABCD} = 4 \cdot 2 = 8$$

б) $A(4; 1); B(3; 5); C(-1; 4); D(0; 0)$.

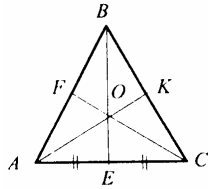
$$AB = \sqrt{1+16} = \sqrt{17}; BC = \sqrt{16+1} = \sqrt{17}; CD = \sqrt{1+16} = \sqrt{17};$$

$$AD = \sqrt{16+1} = \sqrt{17}; AC = \sqrt{25+9} = \sqrt{34}; BD = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}.$$

т.к. $AB=BC=CD=AD$, то ABCD — ромб; т.к. диагонали этого ромба равны ($AC=BD$), то этот ромб — квадрат.

$$S_{ABCD} = (\sqrt{17})^2 = 17.$$

954.



Дано: $\triangle ABC, AB=BC; BE=160$ см, $AC=80$ см;
 AK, CF, BE — медианы.

Найти CF, AK .

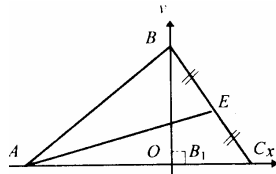
$BE=160$ см, $AC=80$ см т.к. $OE = \frac{1}{3} BE$ по свой-

ству медиан, то $OE = \frac{1}{3} \cdot 160 = 53\frac{1}{3}$ см

$$\text{В } \triangle AOE: AO = \sqrt{AE^2 + OE^2} = \sqrt{40^2 + (53\frac{1}{3})^2} = \frac{200}{3} \text{ см.}$$

$AO = \frac{2}{3} AK$ по свойству медиан, $\frac{200}{3} = \frac{2}{3} AK, AK=100$. т.к. $\triangle ABC$ — равнобедренный, то $AK=CF=100$ см.

955.



Дано: $\triangle ABC; BB_1 \perp AC; AE$ — медиана.

Найти AE .

Решение:

$BB_1=10$ см; $AB_1=10$ см, $BC_1=4$ см введем систему координат, где B_1 — начало координат. Тогда $A(-10; 0); C(4; 0); B(0; 10)$, за-

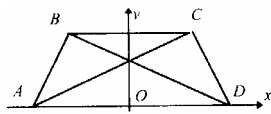
тем $x_E = \frac{x_B + x_C}{2}$, $x_E=2$; $y_E = \frac{y_B + y_C}{2}$, $y_E=2 \Rightarrow E(2; 5)$.

$$AE = \sqrt{(10+2)^2 + (0-5)^2} = \sqrt{144 + 25} = \sqrt{169} = 13 \text{ см.}$$

956.

Дано: ABCD — равнобедренная трапеция.

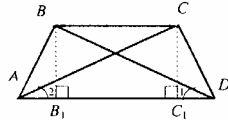
Доказать: $BD=AC$.



Введем систему координат как показано на рисунке, ось OY — ось симметрии, тогда $A(-x_1; 0)$ и $D(x_1; 0)$; $B(-x_2; h)$ и $C(x_2; h)$.

$$AC = \sqrt{(x_2 + x_1)^2 + h^2}, \quad BD = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 + h^2},$$

то $AC=BD$; ч.т.д.



Обратно.

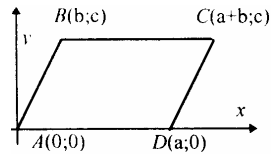
Дано: ABCD — трапеция; $AC=BD$.

Доказать: $AB=CD$.

$BB_1 \perp AD$, $CC_1 \perp AD$. Рассмотрим $\triangle BB_1D$ и $\triangle CC_1A$; $BB_1=CC_1=h$. $\triangle BB_1D = \triangle CC_1A$ (по катету и гипотенузе).

Рассмотрим $\triangle ABD$ и $\triangle ACD$: AD — общая; $BD=AC$ (по условию); $\angle 1 = \angle 2$, т.е. $\triangle ABD = \triangle ACD$ (по 2 сторонам и углу) $\Rightarrow AB=CD$.

957.



Дано: ABCD — параллелограмм; $AC=BD$.

Доказать: ABCD — прямоугольник.

Введем систему координат так, как показано на рисунке.

$$AC^2 = (a+b)^2 + c^2, \quad BD^2 = (a-b)^2 + c^2.$$

Т.к. $AC=BD$, то

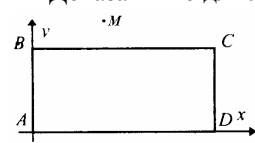
$$(a+b)^2 + c^2 = (a-b)^2 + c^2, \quad a^2 + 2ab + b^2 = a^2 - 2ab + b^2, \quad 4ab = 0,$$

$a=0$ или $b=0$; допустим $a=0$, то $D(a; 0)$ совместится с точкой $A(0; 0)$ — это невозможно, т.е. $a \neq 0$, получим $b=0$, значит ABCD — прямоугольник. Что и требовалось доказать.

958.

Дано: ABCD — прямоугольник

Доказать что для любой M: $AM^2 + CM^2 = BM^2 + DM^2$.



Введем систему координат так, как показано на рисунке, тогда $A(0; 0)$; $D(a; 0)$; $B(0; c)$; $C(a; c)$; $M(x; y)$.

$$AM^2 = x^2 + y^2, \quad CM^2 = (a-x)^2 + (c-y)^2;$$

$$BM^2 = x^2 + (c-y)^2; \quad DM^2 = (a-x)^2 + y^2.$$

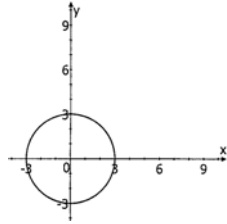
Складывая, получим:

$$AM^2 + CM^2 = x^2 + y^2 + (a-x)^2 + (c-y)^2 = x^2 + (c-y)^2 + (a-x)^2 + y^2;$$

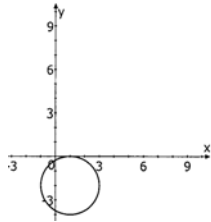
$$BM^2 + DM^2 = x^2 + (c-y)^2 + (a-x)^2 + y^2.$$

Что и требовалось доказать.

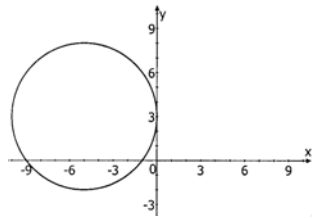
959.



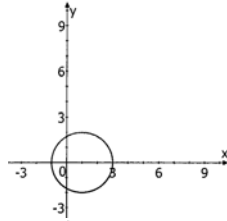
а) $x^2 + y^2 = 9$; $O(0; 0)$; $R=3$



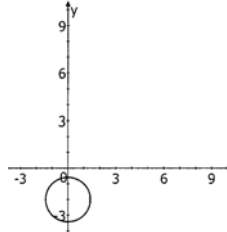
б) $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 4$; $O(1; -2)$; $R=2$



в) $(x+5)^2 + (y-3)^2 = 25$; $O(-5; 3)$; $R=5$



г) $(x-1)^2 + y^2 = 4$; $O(1; 0)$; $R=2$



д) $x^2 + (y+2)^2 = 2$; $O(0; -2)$; $R = \sqrt{2}$

960.

A(3; -4); B(1; 0); C(0; 5); D(0; 0); E(0; 1)

а) $x^2+y^2=25$; точки A(3; -4) и C(0; 5), т.к.

$$3^2+(-4)^2=25; \quad 0^2+5^2=25.$$

б) $(x-1)^2+(y+3)^2=9$; B(1; 0), т.к.

$$(1-1)^2+(0+3)^2=9.$$

в) $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\frac{1}{4}$; точка B, т.к.

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)^2+0^2=\frac{1}{4};$$

точка D, т.к.

$$\left(0-\frac{1}{2}\right)^2+0^2=\frac{1}{4}.$$

961.

$(x+5)^2+(y-1)^2=16$, O(-5;1); R=4.

A(-2; 4):

$$(-2+5)^2+(4-1)^2 \neq 16, \quad 9+9 \neq 16, \quad 18 \neq 16,$$

т.к. $18 > 16$, то A(-2; 4) вне круга;

B(-5; -3):

$$(-5+5)^2+(-3-1)^2=16, \quad 0+16=16, \quad 16=16,$$

то B(-5; -3) на окружности;

C(-7; -2):

$$(-7+5)^2+(-2-1)^2 \neq 16, \quad 4+9 \neq 16, \quad 13 \neq 16,$$

т.к. $13 < 16$, то C(-7; -2) лежит внутри круга;

D(1; 5):

$$(1+5)^2+(5-1)^2 \neq 16, \quad 36+16 \neq 16, \quad 52 \neq 16,$$

т.к. $52 > 16$, то D(1; 5) лежит вне круга.

962.

Дано: $x^2+y^2=25$, A(3; 4) и B(4; -3)

Доказать: AB — хорда.

Доказательство:

Проверим, что точки A и B лежат на окружности:

A(3; 4):

$$3^2+4^2=25, \quad 9+16=25, \quad 25=25,$$

B(4; -3):

$$4^2+(-3)^2=25, \quad 16+9=25, \quad 25=25,$$

то и A и B \in окр. \Rightarrow AB — хорда.

963.

- а) $x^2+y^2=25$, $(-4)^2+y^2=25$, $16+y^2=25$, $y^2=9$, $y_{1,2}=\pm 3$, следовательно
 $A(4; 3)$ или $A(4; -3)$.
 б) $x^2+3^2=25$, $x^2=16$, $x_{1,2}=\pm 4$.

964.

- а) $(3-3)^2+(y-5)^2=25$, $(y-5)^2=25$, $y-5=\pm 5 \Rightarrow y_1=10, y_2=0$.
 Ответ: $(3; 10)$ и $(3; 0)$
 б) $(x-3)^2+(5-5)^2=25$, $(x-3)^2=25$, $x-3=\pm 5 \Rightarrow x_1=8, x_2=-2$.
 Ответ: $(8; 5)$ и $(-2; 5)$

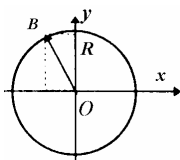
965.

- а) $x^2+y^2=9$ б) $x^2+y^2=2$ в) $x^2+y^2=\frac{25}{4}$

966.

- а) $x^2+(y-5)^2=9$ в) $(x+3)^2+(y+7)^2=\frac{1}{4}$
 б) $(x+1)^2+(y-2)^2=4$ г) $(x-4)^2+(y+3)^2=100$

967.



Дано: Окр(O ; R); $O(0; 0)$; $B(-3; 3)$; $B \in \text{Окр}(O; R)$

Написать уравнение окружности

Решение:

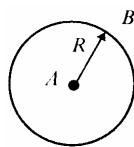
$B(-1; 3)$ центр окружности в начале координат, то уравнение имеет вид $x^2+y^2=R^2$, т.к. B лежит на окружности, то $OB=R$

$$OB = \sqrt{(-1-0)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}, R = \sqrt{10}$$

То уравнение окружности:

$$x^2+y^2=10.$$

968.



Дано: Окр(A ; R); $A(0; 6)$; $B(-3; 2)$; $B \in \text{Окр}(A; R)$

Написать: уравнение окружности

Решение:

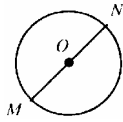
$$x^2+(y-6)^2=R^2=AB^2$$

$$R=AB=\sqrt{(0+3)^2 + (6-2)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

То уравнение окружности имеет вид

$$x^2+(y-6)^2=25.$$

969.



Дано: Окр(О; R); MN—диаметр этой окружности

Написать уравнение окружности

а) если $M(-3; 5)$; $N(7; -3)$; т.к. MN — диаметр, то O — середина MN, и

$$\begin{cases} x_0 = \frac{x_m + x_n}{2} \\ y_0 = \frac{y_m + y_n}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = \frac{-3+7}{2} = 2 \\ y_0 = \frac{5-3}{2} = 1 \end{cases} \Rightarrow O(2; 1)$$

$$R=MO=\sqrt{(2+3)^2+(1-5)^2}=\sqrt{25+16}=\sqrt{41},$$

уравнение окружности имеет вид: $(x-2)^2+(y-1)^2=41$.

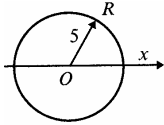
б) если $M(2; -1)$, $N(4; 3)$, т.к. MN — диаметр, то O — середина MN, и

$$\begin{cases} x_0 = \frac{x_m + x_n}{2} \\ y_0 = \frac{y_m + y_n}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = \frac{2+4}{2} = 3 \\ y_0 = \frac{-1+3}{2} = 1 \end{cases} \Rightarrow O(3; 1)$$

$$R=ON=\sqrt{(3-4)^2+(1-3)^2}=\sqrt{1+4}=\sqrt{5},$$

то уравнение имеет вид: $(x-3)^2+(y-1)^2=5$.

970.



Дано: Окр(О; R); $A(1; 3) \in \text{Окр}(O; R)$; $R=5$; $O \in OX$

Написать уравнение окружности

Точка O имеет координаты $(x; 0)$

$$R=OA=\sqrt{(x-1)^2+3^2}, \quad 5=\sqrt{(x-1)^2+3^2},$$

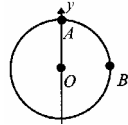
$$25=(x-1)^2+9, \quad (x-1)^2=16,$$

$$x-1=\pm 4, \quad x=5 \text{ или } x=-3,$$

т.е. $O(5; 0)$ или $O(-3; 0)$ следовательно, может существовать две окружности:

$$(x-5)^2+y^2=25 \quad \text{или} \quad (x+3)^2+y^2=25$$

971.



Дано: Окр(О; R);

$A(-3; 0) \in \text{Окр}(O; R)$; $B(0; 9) \in \text{Окр}(O; R)$; $O \in OY$

Написать уравнение окружности

Т.к. $A, B \in \text{Окр}$, то $R=OA=OB$; т.к. $O \in OY$, то $O(0; y)$.

$$OA = \sqrt{3^2 + y^2}.$$

Т.к. $OA=OB$, то $OB = \sqrt{0+(9-y)^2}$,
 $9+y^2 = (9-y)^2$, $9+y^2 = 81-18y+y^2$, $18y=72$, $y=4$,
 то $O(0; 4)$ $R=OA = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$, то уравнение имеет вид:
 $x^2+(y-4)^2=25$.

972.

б) $C(2; 5)$, $D(5; 2)$

$$\begin{cases} a \cdot 2 + b \cdot 5 + c = 0 \\ a \cdot 5 + b \cdot 2 + c = 0 \end{cases}$$

Вычитая из первого уравнение второй, получим

$$-3a + 3b = 0 \Rightarrow a = b$$

$$2a + 5a + c = 0 \Rightarrow c = -7a.$$

Подставим коэффициенты $b = a$ и $c = -7a$ в уравнение прямой:

$$ax + ay - 7a = 0 \Rightarrow x + y - 7 = 0.$$

в) $M(0; 1)$, $N(-4; -5)$

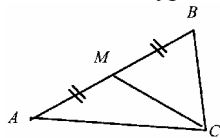
$$\begin{cases} 0 \cdot a + 1 \cdot b + c = 0 \\ -4 \cdot a - 5 \cdot b + c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -c \\ -4a + 5c + c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -c \\ a = \frac{3}{2}c \end{cases}$$

$$\frac{3}{2}cx - cy + c = 0 \Rightarrow 3x - 2y + 2 = 0$$

973.

Дано: $A(4; 6)$; $B(-4; 0)$; $C(-1; -4)$; CM — медиана $\triangle ABC$.

Написать уравнение прямой CM .



$$\begin{cases} x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{4 + (-4)}{2} = 0 \\ y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{6 + 0}{2} = 3 \end{cases} \Rightarrow M(0; 3)$$

Напишем уравнение прямой по двум точкам M и C .

$M(0; 3)$:

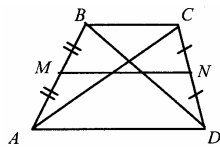
$$0 \cdot a + 3 \cdot b + c = 0; 3b + c = 0; b = -\frac{c}{3}$$

$C(-1; -4)$:

$$-a - 4b + c = 0, a = -4b + c; a = \frac{7}{3}c$$

$$\frac{7}{3}cx + \left(-\frac{c}{3}\right)y + c = 0 \quad \left| \cdot \frac{3}{c} \right. \quad 7x - y + 3 = 0$$

974.



Дано: ABCD – трапеция; A(-2; -2); B(-3; 1);
C(7; 7); D(3; 1), MN — средняя линия
Написать уравнение прямых AC, BD, MN

$$A(-2; -2): -2a - 2b + c = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{2}c - b.$$

$$C(7; 7): 7a + 7b + c = 0 \Rightarrow a = -\frac{1}{7}c - b; \quad \frac{1}{2}c - b = -\frac{1}{7}c - b \Rightarrow a = -b,$$

$ax - ay + 0 = 0 \Rightarrow x - y = 0$ — уравнение прямой, содержащей AC.

$$B(-3; 1): -3a + b + c = 0 \Rightarrow a = \frac{b+c}{3}.$$

$$D(3; 1): 3a + b + c = 0 \Rightarrow a = \frac{-b-c}{3};$$

$$\frac{b+c}{3} = \frac{-b-c}{3} \Rightarrow -b = c \Rightarrow a = \frac{b-b}{3} = 0,$$

$0 \cdot x + by - b = 0 \Rightarrow y - 1 = 0$ — уравнение прямой, содержащей BD.

$$\begin{cases} x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{-2 - 3}{2} = -\frac{5}{2} \\ y_M = \frac{y_A - y_B}{2} = \frac{-2 + 1}{2} = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow M\left(-\frac{5}{2}; -\frac{1}{2}\right)$$

$$\begin{cases} x_N = \frac{x_C + x_D}{2} = \frac{7 + 3}{2} = 5 \\ y_N = \frac{y_C - y_D}{2} = \frac{7 + 1}{2} = 4 \end{cases} \Rightarrow N(5; 4)$$

$$M\left(-\frac{5}{2}; -\frac{1}{2}\right): -\frac{5}{2}a - \frac{1}{2}b + c = 0 \Rightarrow b = 2c - 5a$$

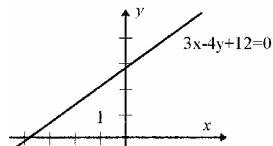
$$N(5; 4): 5a + 4b + c = 0 \Rightarrow a = \frac{-4b - c}{5};$$

$$b = 2c - 5a = 2c - (4b - c); \quad b = -c$$

$$a = \frac{3}{5}c, \quad \frac{3}{5}cx - cy + c = 0$$

$3x - 5y + 5 = 0$ — уравнение прямой, содержащей MN.

975.



Дано: $l: 3x - 4y + 12 = 0$

Найти: A(x; y); B(x₁; y₁)

$$x = 0: 3 \cdot 0 - 4y + 12 = 0 \Rightarrow y = 3 \Rightarrow A(0; 3)$$

$$y = 0: 3x - 4 \cdot 0 + 12 = 0 \Rightarrow x = -4 \Rightarrow B(-4; 0)$$

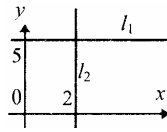
976.

Дано: $l_1: 4x+3y-6=0$; $l_2: 2x+y-4=0$; $l_1 \cap l_2 = A$

Найти: $A(x; y)$

$$\begin{cases} 4x+3y-6=0 \\ 2x+y-4=0 \end{cases} \cdot (-2) \quad \begin{cases} 4x+3y-6=0 \\ -4x-2y+8=0 \end{cases} \quad \begin{cases} y=-2 \\ 2x-2-4=0 \end{cases} \quad \begin{cases} y=-2 \\ x=3 \end{cases}$$

977.



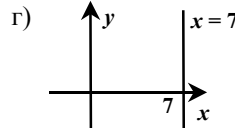
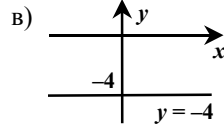
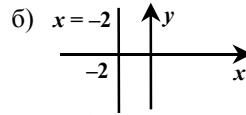
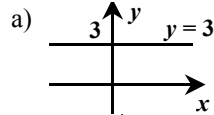
Дано: $M(2; 5)$; $M \in l_1, l_1 \parallel OX$; $M \in l_2, l_2 \parallel OY$

Написать уравнения l_1 и l_2

1) т.к. $l_1 \parallel OX$, то $l_1: y=5$

2) т.к. $l_2 \parallel OY$, то $l_2: x=2$

978.



979.

Дано: $M \in AB$; $A(-8; -6)$ и $B(-3; -1)$ и $M(5; y)$

Найти: y

Решение:

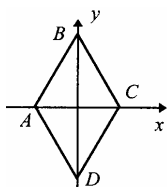
$$\begin{cases} -6 = -8k + b \\ -1 = -3k + b \end{cases} \quad 5k = 5 \quad \begin{cases} k = 1 \\ b = 2 \end{cases}$$

$$y = x + 2, \quad y = 5 + 2 = 7; \quad M(5; 7)$$

980.

Дано: $ABCD$ – ромб; $AC \in OX, BD \in OY$; $AC = 4$ см, $BD = 10$ см

Написать уравнение AB, BC, CD, AD .



Решение:

$A(-2; 0)$; $C(2; 0)$; $B(0; 5)$; $D(0; -5)$

1) $A(-2; 0)$ и $B(0; 5)$

$$\begin{cases} -2a + c = 0 \\ 5b + c = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a = \frac{1}{2}c \\ b = -\frac{1}{5}c \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{1}{2}cx - \frac{1}{5}cy + c = 0 \quad | : \frac{10}{c} \\ \underline{5x - 2y + 10 = 0} \end{cases}$$

2) т.к. $CD \parallel AB$ то $CD: y = \frac{5}{2}x + b$ т.к. $y(2) = 0$, то $0 = 5 + b \Rightarrow$

$$b = -5 \quad y = \frac{5}{2}x - 5$$

3) $B(0; 5)$ и $C(2; 0)$

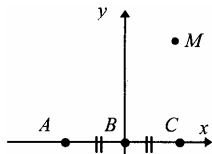
$$\begin{cases} 5a + c = 0 \\ 2a + c = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a = -\frac{1}{2}c \\ c = -\frac{1}{5}c \end{cases} \quad \begin{cases} -\frac{1}{2}cx - \frac{1}{5}cy + c = 0 \quad | :(-\frac{10}{c}) \\ \underline{5x + 2y - 10 = 0} \end{cases}$$

4) т.к. $BC \parallel AD$ то $AD: y = -\frac{5}{2}x + b$ т.к. $y(0) = -5$, то

$$b = -5 \quad y = -\frac{5}{2}x - 5$$

Ответ: $y = -\frac{5}{2}x \pm 5$ $y = \frac{5}{2}x \pm 5$

982.



Дано: $B \in AC$, $AB = BC$, $AC = 2$.

Найти множество точек M :

а) $AM^2 + BM^2 + CM^2 = 50$;

б) $AM^2 + 2BM^2 + 3CM^2 = 4$

Решение:

а) Введём систему координат так, как показано на рисунке.

$A(-1; 0)$; $C(1; 0)$; $M(x; y)$; $B(0; 0)$.

$$\begin{cases} AM^2 = (x+1)^2 + y^2 \\ BM^2 = x^2 + y^2 \\ CM^2 = (x-1)^2 + y^2 \end{cases}$$

$$(x+1)^2 + y^2 + x^2 + y^2 + (x-1)^2 + y^2 = 50; \quad x^2 + 2x + 1 + 3y^2 + x^2 + x^2 - 2x + 1 = 50;$$

$$3x^2 + 3y^2 = 48;$$

$x^2 + y^2 = 16$ – окружность с центром в т. B и $R = 4$

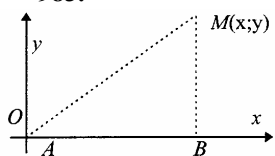
б) Как и в предыдущей пункте,

$$\begin{aligned} (x+1)^2 + y^2 + 2(x^2 + y^2) + 3((x-1)^2 + y^2) &= 4; \\ x^2 + 2x + 1 + y^2 + 2x^2 + 2y^2 + 3x^2 - 6x + 3 + 3y^2 &= 4; \\ 6x^2 - 4x + 6y^2 &= 0; \quad 3x^2 - 2x + 3y^2 = 0 \end{aligned}$$

$$3(x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9} - \frac{1}{9}) + 3y^2 = 0, \quad 3(x - \frac{1}{3})^2 - \frac{1}{3} + 3y^2 = 0$$

$(x - \frac{1}{3})^2 + y^2 = \frac{1}{9}$ – окружность, с центром в точке $(\frac{1}{3}; 0)$ и $R = \frac{1}{3}$.

983.



Дано: $A, B; k$ — данное число
 Найти множество всех точек M :
 $AM^2 + BM^2 = k^2$
 Введём систему координат так, как показано на рисунке, $A(0; 0); B(a; 0); M(x; y)$

$$\begin{cases} AM^2 = x^2 + y^2 \\ BM^2 = (a-x)^2 + y^2 \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 + (a-x)^2 + y^2 = k^2$$

$$2x^2 - 2ax + 2y^2 = k^2 - a^2,$$

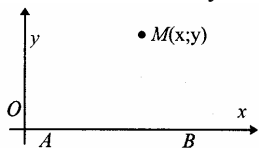
$$2(x^2 - ax + \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{4}) + 2y^2 = k^2 - a^2, \quad (x - \frac{a}{2})^2 + y^2 = \frac{2k^2 - a^2}{4},$$

это окружность с центром в точке $(\frac{a}{2}; 0)$ и $R = \sqrt{\frac{2k^2 - a^2}{4}}$, но

$$\frac{2k^2 - a^2}{4} \geq 0, \Rightarrow |k| \geq \frac{a}{\sqrt{2}}$$

985.

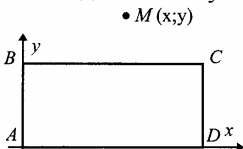
Дано: A и B
 Найти множество точек M таких, $BM^2 - AM^2 = 2AB$
 Введём систему координат так, как показано на рисунке.



$A(0; 0); B(a; 0); M(x; y)$
 $BM^2 = (a-x)^2 + y^2; AM^2 = x^2 + y^2; AB^2 = a^2,$
 значит $(a-x)^2 + y^2 - (x^2 + y^2) = 2a^2; -2ax = a^2, x = -\frac{a}{2}$ — прямая, \perp прямой AB и проходящая через точку симметричную т. B .

986.

Дано: $ABCD$ — прямоугольник
 Найти множество точек M : $(AM^2 + DM^2) - (BM^2 + CM^2) = 2AB^2$
 Введём систему координат так, как показано на рисунке.



$A(0; 0); D(a; 0); B(0; b); C(a; b); M(x; y)$
 $AM^2 = x^2 + y^2; DM^2 = (a-x)^2 + y^2;$
 $BM^2 = x^2 + (b-y)^2; CM^2 = (a-x)^2 + (b-y)^2;$
 $AB^2 = b^2,$

Сложив, получим

$$(x^2 + y^2 + (a-x)^2 + y^2) - (x^2 + (b-y)^2 + (a-x)^2 + (b-y)^2) = 2b^2$$

$$x^2 + y^2 + a^2 - 2ax + x^2 + y^2 - x^2 - b^2 + 2by - y^2 - a^2 + 2ax - x^2 - b^2 + 2by - y^2 = 2b^2$$

$$-2b^2 + 4by = 2b^2; \quad 4by = 4b^2$$

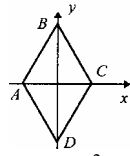
$y = b$ — прямая, проходящая через BC .

987.

Дано: ABCD – ромб; AC=2a, BD=2b

Найти множество всех M, таких, что $AM^2+DM^2=BM^2+CM^2$

Введем систему координат так, как показано на рисунке.



A(-a; 0); C(a; 0); B(0; b); D(0; -b); M(x; y)

$$AM^2=(x+a)^2+y^2; \quad DM^2=x^2+(b+y)^2;$$

$$BM^2=x^2+(b-y)^2; \quad CM^2=(a-x)^2+y^2.$$

Сложив, получим

$$(x+a)^2+y^2+x^2+(b+y)^2=x^2+(b-y)^2+(a-x)^2+y^2;$$

$$x^2+2ax+a^2+y^2-x^2+b^2+2by+y^2=x^2+b^2-2by+y^2+a^2-2ax+x^2+y^2;$$

$$2ax+2by=0; \quad ax+by=0.$$

$y=-\frac{a}{b}x$ – прямая, проходящая через точку пересечения диагоналей

O и \perp стороне ромба.

988.

Дано: \vec{a} и \vec{b} не коллинеарны

Найти x, чтобы \vec{p} и \vec{q} были коллинеарны.

а) $\vec{p} = 2\vec{a} - \vec{b}; \vec{q} = \vec{a} + x\vec{b}, \frac{2}{1} = \frac{-1}{x}; x = -\frac{1}{2};$

б) $\vec{p} = x\vec{a} - \vec{b}; \vec{q} = \vec{a} - x\vec{b}, \frac{x}{1} = \frac{-1}{x}; x^2 = -1$ решений нет, т.е. \vec{p} и \vec{q}

не коллинеарны;

в) $\vec{p} = \vec{a} + x\vec{b}; \vec{q} = \vec{a} - 2\vec{b}, \frac{1}{1} = \frac{x}{-2}; x = -2;$

г) $\vec{p} = 2\vec{a} + \vec{b}; \vec{q} = x\vec{a} + \vec{b}, \frac{2}{x} = \frac{1}{1}; x = 2.$

989.

Найти $\vec{p}\{x, y\}$ и $|\vec{p}|$

а) $\vec{p} = 7\vec{a} - 3\vec{b}, \vec{a} \{1; -1\}, \vec{b} \{5; -2\}$

$$\vec{p} \{7 \cdot 1 - 3 \cdot 5; 7 \cdot (-1) - 3 \cdot (-2)\} \Rightarrow \vec{p} \{-8; -1\}$$

$$|\vec{p}| = \sqrt{64 + 1} = \sqrt{65}$$

б) $\vec{p} = 4\vec{a} - 2\vec{b}, \vec{a} \{6; 3\}, \vec{b} \{5; 4\}$

$$\vec{p} \{4 \cdot 6 - 2 \cdot 5; 4 \cdot 3 - 2 \cdot 4\} \Rightarrow \vec{p} \{14; 4\}$$

$$|\vec{p}| = \sqrt{196 + 16} = \sqrt{212} = 2\sqrt{53}$$

$$\text{в) } \vec{p} = 5\vec{a} - 4\vec{b}, \vec{a} \left\{ \frac{3}{5}; \frac{1}{5} \right\}, \vec{b} \{6; -1\}$$

$$\vec{p} \left\{ 5 \cdot \frac{3}{5} - 4 \cdot 6; 5 \cdot \frac{1}{5} - 4 \cdot (-1) \right\} \Rightarrow \vec{p} \{-21; 5\}$$

$$|\vec{p}| = \sqrt{(-21)^2 + 5^2} = \sqrt{441 + 25} = \sqrt{466}$$

$$\text{г) } \vec{p} = 3(-2\vec{a} - 4\vec{b}), \vec{a} \{1; 5\}, \vec{b} \{-1; -1\}$$

$$\vec{p} \{3 \cdot (-2 \cdot 1 - 4 \cdot (-1)); 3 \cdot (-2 \cdot 5 - 4 \cdot (-1))\} \Rightarrow \vec{p} \{6; -18\}$$

$$|\vec{p}| = \sqrt{36 + 324} = \sqrt{360} = 6\sqrt{10}$$

990.

Дано: $\vec{a} \{3; 4\}$, $\vec{b} \{6; -8\}$, $\vec{c} \{1; 5\}$; $\vec{p} = \vec{a} + \vec{b}$, $\vec{q} = \vec{b} + \vec{c}$,
 $\vec{r} = 2\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$, $\vec{s} = \vec{a} - \vec{b} - \vec{c}$

Найти: а) координаты \vec{p} , \vec{q} , \vec{r} , \vec{s} ; б) $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$, $|\vec{p}|$, $|\vec{q}|$

$$\text{а) } \vec{p} \{3+6; 4-8\} = \vec{p} \{9; -4\}, \quad \vec{q} \{6+1; -8+5\} = \vec{q} \{7; -3\},$$

$$\vec{r} \{6-6+1; 8+8+5\} = \vec{r} \{1; 21\}, \quad \vec{s} \{3-6-1; 4+8-5\} = \vec{s} \{-4; 7\};$$

$$\text{б) } |\vec{a}| = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5, \quad |\vec{b}| = \sqrt{64+36} = \sqrt{100} = 10$$

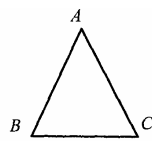
$$|\vec{p}| = \sqrt{81+16} = \sqrt{97} \quad |\vec{q}| = \sqrt{49+9} = \sqrt{58}$$

991.

Дано: $M_1(x_1; 0)$; $M_2(x_2; 0)$
 Доказать: $d = |x_1 - x_2|$

$$d = M_1M_2 = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + 0} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2} = |x_1 - x_2|.$$

992.



Дано: $A(4; 8)$; $B(12; 1)$; $C(7; 0)$

Доказать: $\triangle ABC$ – равнобедренный

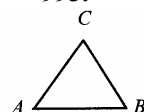
$$AB = \sqrt{(4-12)^2 + (8-1)^2} = \sqrt{64+9} = \sqrt{73},$$

$$AC = \sqrt{(4-7)^2 + 8^2} = \sqrt{9+64} = \sqrt{73},$$

$$BC = \sqrt{(12-7)^2 + 11^2} = \sqrt{25+121} = \sqrt{146}.$$

Т.к. $AB=AC$, то $\triangle ABC$ – равнобедренный; т.к. $BC \neq AC=AB$, то $\triangle ABC$ — не равносторонний.

993.



Дано: $A(-5; 6); B(3; -9); C(-12; -17)$
 Доказать: $\angle A = \angle C$

$$AB = \sqrt{(3+5)^2 + (-9-6)^2} = \sqrt{64+225} = \sqrt{289} = 17$$

$$CB = \sqrt{(3+12)^2 + (-9-17)^2} = \sqrt{225+64} = \sqrt{289} = 17,$$

Т.к. $AB=BC$, то $\angle A = \angle C$.

994.

а) Дано: $D(1; 1), A(5; 4), B(4; -3), C(-2; 5)$.
 Доказать: $AD=BD=CD$.

$$AD = \sqrt{(1-5)^2 + (1-4)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$$

$$DB = \sqrt{(1-4)^2 + (1+3)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5,$$

$$DC = \sqrt{(1+2)^2 + (1-5)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$$

то $AD=BD=CD$;

б) Дано: $D(1; 0), A(7; -8), B(-5; 8), C(9; 6)$.

Доказать: $AD=DB=DC$

$$AD = \sqrt{(7-1)^2 + (-8)^2} = \sqrt{36+64} = \sqrt{100} = 10$$

$$DB = \sqrt{(1+5)^2 + 8^2} = \sqrt{36+64} = \sqrt{100} = 10,$$

$$DC = \sqrt{(9-1)^2 + 6^2} = \sqrt{64+36} = \sqrt{100} = 10$$

то $AD=DB=DC$

995.

Дано: $M_1(-2; 4); M_2(6; 8); E(x; 0), M_1E=EM_2$

Найти: x

$$M_1E = \sqrt{(x+2)^2 + 4^2} \quad M_2E = \sqrt{(x-6)^2 + 8^2},$$

т.к. $M_1E = EM_2$, то

$$(x+2)^2 + 16 = (x-6)^2 + 64; \quad (x+2+x-6)(x+2-x+6) = 48;$$

$$(2x-4)8 = 48 \Rightarrow 2x-4=6$$

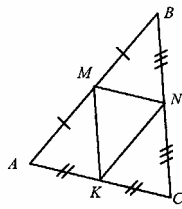
$$2x=10 \quad x=5,$$

то $E(5; 0)$

996.

Дано: $A(-5; 13); B(3; 5); C(-3; -1); M, N, K$ — середины сторон AB, BC, AC

Найти: а) координаты точек M, N, K ; б) BK ; в) MN, MK, NK



$$a) \begin{cases} x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{-5 + 3}{2} = -1 \\ y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{13 + 5}{2} = 9 \end{cases} \left| \begin{array}{l} M(-1; 9) \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} x_N = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{3 - 3}{2} = 0 \\ y_N = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{5 - 1}{2} = 2 \end{cases} \left| \begin{array}{l} N(0; 2) \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} x_K = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{-5 - 3}{2} = -4 \\ y_K = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{13 - 1}{2} = 6 \end{cases} \left| \begin{array}{l} K(-4; 6) \end{array} \right.$$

$$б) BK = \sqrt{(3+4)^2 + (5-6)^2} = \sqrt{49+1} = 5\sqrt{2}$$

$$в) MN = \sqrt{1^2 + (2-9)^2} = \sqrt{1+49} = 5\sqrt{2};$$

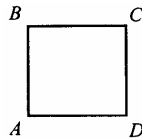
$$NK = \sqrt{4^2 + (2-6)^2} = \sqrt{16+16} = 4\sqrt{2};$$

$$MK = \sqrt{(-1+4)^2 + (9-6)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

997.

Дано: A(3; 2); B(0; 5); C(-3; 2); D(0; -1)

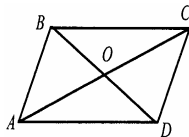
Доказать: ABCD – квадрат



$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{9+9} = 3\sqrt{2} \\ BC &= \sqrt{9+9} = 3\sqrt{2} \\ CD &= \sqrt{9+9} = 3\sqrt{2} \\ AD &= \sqrt{9+9} = 3\sqrt{2} \end{aligned} \Rightarrow$$

ABCD — ромб; далее: $AC = \sqrt{36} = 6$, $BD = \sqrt{36} = 6$, т.к. диагонали ромба равны, то ABCD – квадрат.

998.



Дано: A(-2; -3); B(1; 4); C(8; 7); D(5; 0)

Доказать: ABCD – ромб

Найти: S_{ABCD}

$$AB = \sqrt{(1-(-2))^2 + (4-(-3))^2} = \sqrt{9+49} = \sqrt{58}$$

$$BC = \sqrt{(8-1)^2 + (7-4)^2} = \sqrt{49+9} = \sqrt{58}$$

$$CD = \sqrt{(5-8)^2 + (0-7)^2} = \sqrt{9+49} = \sqrt{58}$$

$$AD = \sqrt{(5 - (-2))^2 + (0 - (-3))^2} = \sqrt{49 + 9} = \sqrt{58}$$

Так как $AB=BC=CD=AD$, $ABCD$ – ромб.

$$AC = \sqrt{100 + 100} = 10\sqrt{2} \quad BD = \sqrt{16 + 16} = 4\sqrt{2}$$

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD = \frac{1}{2} 10\sqrt{2} \cdot 4\sqrt{2} = 40$$

999.

Дано: $ABCD$ – параллелограмм; $A(-4; 4)$; $B(-5; 1)$; $C(x; y)$; $D(-1; 5)$

Найти: $(x; y)$.

$$AB = \sqrt{(-5 - (-4))^2 + (1 - 4)^2} = \sqrt{1 + 9} = \sqrt{10} \quad BC = \sqrt{(x + 5)^2 + (y - 1)^2}$$

$$AD = \sqrt{(-1 - (-4))^2 + (5 - 4)^2} = \sqrt{9 + 1} = \sqrt{10} \quad CD = \sqrt{(x + 1)^2 + (y - 5)^2}$$

т. к. в параллелограмме противоположные стороны равны, то

$$\begin{cases} (x + 5)^2 + (y - 1)^2 = 10 & \begin{cases} x^2 + 10x + 25 + y^2 - 2y + 1 = 10 \\ x^2 + 2x + 1 + y^2 - 10y + 25 = 10 \end{cases} \\ (x + 1)^2 + (y - 5)^2 = 10 & \end{cases}$$

$$\begin{cases} 8x + 8y = 0 & \begin{cases} x = -y \\ (1 - y)^2 + (y - 5)^2 = 10 \end{cases} \\ (x + 1)^2 + (y - 5)^2 = 10 & \end{cases}$$

$$1 - 2y + y^2 + y^2 - 10y + 25 - 10 = 0; \quad y^2 - 6y + 8 = 0$$

$$y_1 = 4; \quad y_2 = 2$$

если $y = 4$, то $x = -4$; следовательно $C(-4; 4)$;

если $y = 2$, то $x = -2$; следовательно $C(-2; 2)$.

1000.

а) $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 25$ окружность с центром $(1; -2)$ и $R = 5$;

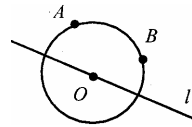
б) $x^2 + (y - 7)^2 = 1$ окружность с центром $(0; 7)$ и $R = 1$;

в) $x^2 + y^2 + 8x - 4y + 40 = 0$, $(x + 4)^2 + (y - 2)^2 = -20$ — не окружность;

г) $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0$, $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 25$ окружность с центром $(1; -2)$ и $R = 5$;

д) $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0$, $x^2 - 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 - 4 = 0$, $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 4$ окружность с центром $(2; 1)$ и $R = 2$.

1001.



Дано: $A(3; 0) \in \text{Окр}(O; R)$, $B(-1; 2) \in \text{Окр}(O; R)$;

$O \in l: y = x + 2$.

Написать уравнение окружности.

Решение:

$$R = AO = \sqrt{(3 - x)^2 + y^2}; \quad R = BO = \sqrt{(-1 - x)^2 + (2 - y)^2}, \text{ то}$$

$$(3-x)^2+y^2=(1+x)^2+(2-y)^2; \quad 9-6x+x^2+y^2=1+2x+x^2+4-4y+y^2;$$

$$4y-8x+4=0;$$

с другой стороны, точка O удовлетворяет уравнению: $y=x+2$, то

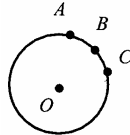
$$\begin{cases} 4y-8x+4=0 \\ y=x+2 \end{cases} \quad \begin{cases} 4x+8-8x+4=0 \\ y=x+2 \end{cases} \quad \begin{cases} 4x=12 \\ y=x+2 \end{cases} \quad \begin{cases} x=3 \\ y=5 \end{cases}$$

т.е. $O(3; 5)$, следовательно $R=AO=\sqrt{25}=5$, и уравнение окружности имеет вид: $(x-3)^2+(y-5)^2=25$

1002.

Дано: $A, B, C \in \text{Окр}(O; R)$;

а) $A(1; -4), B(4; 5), C(3; -2)$; б) $A(3; -7); B(8; -2); C(6; 2)$.



Найти уравнение окружности.

а) $AO=\sqrt{(1-x)^2+(-4-y)^2}$, $BO=\sqrt{(4-x)^2+(5-y)^2}$,

$CO=\sqrt{(3-x)^2+(-2-y)^2}$.

$AO^2=BO^2$:

$$(1-x)^2+(4+y)^2=(4-x)^2+(5-y)^2;$$

$$(1-x-4+x)(1-x+4-x)=(5-y-4-y)(5-y+4+y); \quad -3(5-2x)=(1-2y)9$$

$$2x-5=3-6y \quad x=4-3y$$

$BO^2=CO^2$:

$$(4-x)^2+(5-y)^2=(3-x)^2+(2+y)^2;$$

$$(4-x-3+x)(4-x+3-x)=(2+y+5-y)(2+y-5+y); \quad 7-2x=7(2y-3)$$

$$-2x-14y+28=0, \quad x=14-7y,$$

$$14-7y=4-3y, \quad 10=4y$$

$y = \frac{5}{2}, x = -\frac{7}{2}$; т.е. $O(-\frac{7}{2}; \frac{5}{2})$

$$R=AO=\sqrt{\left(1+\frac{7}{2}\right)^2+\left(4+\frac{5}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{81}{4}+\frac{169}{4}}=\sqrt{\frac{250}{4}}=\sqrt{\frac{125}{2}}$$

уравнение окружности: $(x+\frac{7}{2})^2+(y-\frac{5}{2})^2=\frac{125}{2}$

б) $AO=\sqrt{(3-x)^2+(7+y)^2}$, $BO=\sqrt{(8-x)^2+(2+y)^2}$,

$CO=\sqrt{(6-x)^2+(2-y)^2}$.

$AO^2=BO^2$:

$$(3-x)^2+(7+y)^2=(8-x)^2+(2+y)^2;$$

$$9-6x+x^2+49+14y+y^2=64-16x+x^2+4+4y+y^2; \quad 10x+10y-10=0,$$

$$x+y-1=0, \quad x=1-y$$

$BO^2=CO^2$:

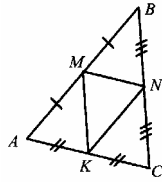
$$\begin{aligned} (8-x)^2+(2+y)^2 &= (6-x)^2+(2-y)^2; \\ 64-16x+x^2+4+4y+y^2 &= 36-12x+x^2+4-4y+y^2; & -4x+8y+28=0, \\ x-2y-7=0, & & x=7+2y \\ 1-y=7+2y, & & -6=3y \end{aligned}$$

$y=-2, x=3$, т.е. $O(3;-2)$

$$R=OA=\sqrt{(3-3)^2+(7-2)^2}=\sqrt{25}=5$$

уравнение окружности: $(x-3)^2+(y+2)^2=25$

1003.



Дано: $A(-7; 5); B(3; -1); C(5; 3)$

Написать уравнения прямых: а) АВ, ВС, АС;

б) средних линий;

в) серединных перпендикуляров.

Решение:

а) АВ:

$$\begin{cases} -7a+5b+c=0 \\ 3a-b+c=0 \end{cases} \begin{cases} -7a+15a+5c+c=0 \\ b=3a+c \end{cases} \begin{cases} 8a=-6c \\ b=3a+c \end{cases} \begin{cases} a=-\frac{3}{4}c \\ b=-\frac{5}{4}c \end{cases}$$

$$-\frac{3}{4}cx - \frac{5}{4}cy + c = 0 \quad 3x+5y-4=0$$

ВС:

$$\begin{cases} 3a-b+c=0 \\ 5a+3b+c=0 \end{cases} \begin{cases} b=3a+c \\ 5a+9a+3c+c=0 \end{cases} \begin{cases} b=3a+c \\ a=-\frac{2}{7}c \end{cases} \begin{cases} b=\frac{1}{7}c \\ a=-\frac{2}{7}c \end{cases}$$

$$-\frac{2}{7}cx + \frac{1}{7}cy + c = 0 \quad 2x-y-7=0$$

АС:

$$\begin{cases} -7a+5b+c=0 \\ 5a+3b+c=0 \end{cases} \begin{cases} 21a-15b-3c=0 \\ 25a+15b+5c=0 \end{cases} \begin{cases} a=-\frac{1}{23}c \\ b=-\frac{6}{23}c \end{cases}$$

$$\frac{-1}{23}cx - \frac{6}{23}cy + c = 0 \quad x+6y-23=0$$

$$\text{б) } \begin{cases} x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{-7+3}{2} = -2 \\ y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{5-1}{2} = 2 \end{cases} \rightarrow M(-2;2)$$

$$\begin{cases} x_N = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{3+5}{2} = 4 \\ y_N = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{-1+3}{2} = 1 \end{cases} \rightarrow N(4;1)$$

$$\begin{cases} x_K = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{-7+5}{2} = -1 \\ y_K = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{5+3}{2} = 4 \end{cases} \rightarrow K(-1;4)$$

MN:

$$\begin{cases} -2a + 2b + c = 0 \\ 4a + b + c = 0 \end{cases} \begin{cases} 2a = 2b + c \\ b = -4a - c \end{cases} \begin{cases} a = -\frac{1}{10}c \\ b = -\frac{6}{10}c \end{cases}$$

$$-\frac{1}{10}cx - \frac{6}{10}cy + c = 0 \quad x + 6y - 10 = 0$$

NK:

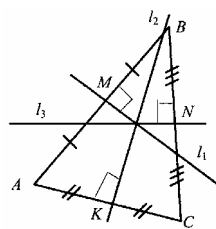
$$\begin{cases} 4a + b + c = 0 \\ -a + 4b + c = 0 \end{cases} \begin{cases} b = -4a - c \\ a = 4b + c \end{cases} \begin{cases} b = -\frac{5}{17}c \\ a = -\frac{3}{17}c \end{cases}$$

$$-\frac{3}{17}cx - \frac{5}{17}cy + c = 0 \quad 3x + 5y - 17 = 0$$

MK:

$$\begin{cases} -2a + 2b + c = 0 \\ -a + 4b + c = 0 \end{cases} \begin{cases} 2b = 2a - c \\ a = 4b + c \end{cases} \begin{cases} b = -\frac{1}{6}c \\ a = \frac{1}{3}c \end{cases}$$

$$\frac{1}{3}cx - \frac{1}{6}cy + c = 0 \quad 2x - y + 6 = 0$$



в) $l_1 \perp AB$, $AB: 3x + 5y - 4 = 0$, $l_1: ax + by + c = 0$. Из усл. перпендикулярности прямых находим, что $3a + 5b = 0$; $3a = -5b$. При $a = 5$, $b = -3$, $l_1: 5x - 3y + c = 0$, т.к. $M \in l_1$ т.е. $5(-2) - 3 \cdot 2 + c = 0$, $c = 16$, то l_1 :

$$5x - 3y + 16 = 0$$

$l_2 \perp AC$, $AC: x + 6y - 23 = 0$, из условия перпендикулярности прямых находим, что $l_2: 6x - y + c = 0$, т.к. $K \in l_2$, то $6(-1) - 4 + c = 0$, $c = 10$, то l_2 :

$$6x - y + 10 = 0$$

$l_3 \perp BC$, $BC: 2x - y - 7 = 0$, из условия перпендикулярности прямых находим, что $l_3: x + 2y + c = 0$, т.к. $N \in l_3$, то $4 + 2 + c = 0$ $c = -6$, то l_3 :

$$x + 2y - 6 = 0$$

1004.

Дано: $l_1: 3x-1,5y+1=0$; $l_2: 2x-y-3=0$.

Доказать: $l_1 \parallel l_2$.

Условие параллельности прямых $a_1x+b_1y+c_1=0$ и $a_2x+b_2y+c_2=0$: $a_1b_2-a_2b_1=0$. Проверим: $3 \cdot (-1) - 2 \cdot (-1,5) = 0$, $-3+3=0$, следовательно $l_1 \parallel l_2$.

1005.

Дано: а) $A(-2; 0)$; $B(3; 2\frac{1}{2})$; $C(6; 4)$; б) $A(3; 10)$; $B(3; 12)$; $C(3; -6)$;

в) $A(1; 2)$; $B(2; 5)$; $C(-10; -31)$.

Доказать: $A, B, C \in l$

а) АВ:

$$\begin{cases} -2a+c=0 \\ 3a+2\frac{1}{2}b+c=0 \end{cases} \quad \begin{cases} a=\frac{1}{2}c \\ b=-c \end{cases} \quad \frac{1}{2}cx-cy+c=0 \quad x-2y+2=0.$$

Подставим координаты точки С: $6-2 \cdot 4+2=0$, $0=0$, то $C \in AB$, т.е. А, В, С – лежат на одной прямой.

б) АВ:

$$\begin{cases} 3a+10b+c=0 \\ 3a+12b+c=0 \end{cases} \quad \begin{cases} a=-\frac{1}{3}c \\ b=0 \end{cases} \quad -\frac{1}{3}xc+c=0 \quad x-3=0.$$

Подставим координаты точки С: $3-3=0$, $0=0$, то $C \in AB$, т.е. А, В, С – лежат на одной прямой.

в) АВ:

$$\begin{cases} a+2b+c=0 \\ 2a+5b+c=0 \end{cases} \quad \begin{cases} b=c \\ a=-3c \end{cases} \quad -3cx+cy+c=0 \quad 3x-y-1=0$$

Подставим координаты точки С: $3(-10)-(-31)-1=0$, $-30+31-1=0$, $0=0$, то $C \in AB$, т.е. А, В, С – лежат на одной прямой.

1006.

Дано: $\triangle ABC$; $AB=17$ см, $BC=28$ см, $AH=15$ см,

Найти: медианы.

Решение:

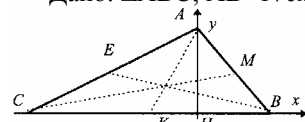
Введем систему координат так, как показано на рисунке. В $\triangle ABH$:

$$BH = \sqrt{17^2 - 15^2} = \sqrt{64} = 8, \quad CH = 28 - 8 = 20,$$

откуда $B(8; 0)$ $C(-20; 0)$; $A(0; 15)$.

АК – медиана, $K(-6; 0)$:

$$AK = \sqrt{6^2 + 15^2} = \sqrt{36 + 225} = \sqrt{261}$$



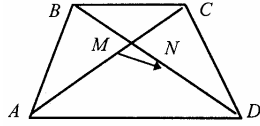
CM – медиана, M(4; 7,5)

$$CM = \sqrt{24^2 + 7,5^2} = \sqrt{576 + \frac{225}{4}} = \sqrt{\frac{2529}{4}} = \frac{\sqrt{2529}}{2}$$

BE – медиана, E(-10; 7,5)

$$BE = \sqrt{18^2 + 7,5^2} = \sqrt{324 + \frac{225}{4}} = \sqrt{\frac{1521}{4}} = \frac{39}{2} = 19,5$$

1007.



Дано: ABCD — трапеция; M ∈ AC, AM=MC, N ∈ BD, BN=ND.

Доказать: $MN = \frac{1}{2}(AD - BC)$.

$$\vec{MN} = \vec{MA} + \vec{AD} + \vec{DN} \quad \vec{MN} = \vec{MC} + \vec{CB} + \vec{BN}$$

$$2\vec{MN} = (\vec{MA} + \vec{MC}) + (\vec{AD} + \vec{CB}) + (\vec{DN} + \vec{BN})$$

т.к. N и M — середины сторон BD и AC, то

$$\vec{MA} + \vec{MC} = 0, \quad \vec{DN} + \vec{BN} = 0$$

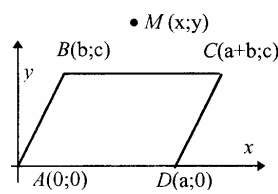
т.е. $2\vec{MN} = \vec{AD} + \vec{CB}$ или $2\vec{MN} = \vec{AD} - \vec{BC}$

$$\vec{MN} = \frac{1}{2}(\vec{AD} - \vec{BC}),$$

т.к. $\vec{AD} \uparrow \vec{BC}$ и $\vec{MN} \uparrow \vec{AD}$, то $|\vec{AD} - \vec{BC}| = AD - BC$, откуда

$MN = \frac{1}{2}(AD - BC)$, что и требовалось доказать.

1008.



Дано: ABCD — параллелограмм

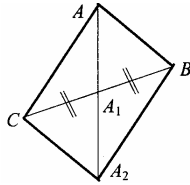
Доказать, что для всех точек M величина $(AM^2 + CM^2) - (BM^2 + DM^2) = \text{const}$.

Введем систему координат так, как показано на рисунке. A(0; 0), B(b; c), C(a+b; c), D(a; 0).

$$\begin{aligned} AM^2 &= x^2 + y^2 & CM^2 &= (a+b-x)^2 + (c-y)^2 \\ BM^2 &= (b-x)^2 + (c-y)^2 & DM^2 &= (a-x)^2 + y^2 \\ (AM^2 + CM^2) - (BM^2 + DM^2) &= \\ &= x^2 + y^2 + (a+b-x)^2 + (c-y)^2 - (b-x)^2 - (c-y)^2 - (a-x)^2 - y^2 = \\ &= x^2 + (a+b-x)^2 - (b-x)^2 - (a-x)^2 = \\ &= x^2 + a^2 + b^2 + x^2 + 2ab - 2ax - 2bx - b^2 + 2bx - x^2 - a^2 + 2ax - x^2 = 2ab \end{aligned}$$

не зависит от координат точки M.

1009.



а) Дано: $\triangle ABC$; AA_1 — медиана.

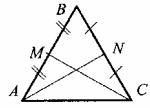
Доказать: $AA_1 = \frac{1}{2} \sqrt{2AC^2 + 2AB^2 - CB^2}$.

Доп. построение: продлим AA_1 : $AA_1 = A_1A_2$, получим CA_2A_1B — параллелограмм. По свойству параллелограмма

$$AA_2^2 + CB^2 = AC^2 + AB^2 + BA_2^2 + CA_2^2; \quad AA_2^2 = 2AC^2 + 2AB^2 - CB^2$$

$$AA_2 = \sqrt{2AC^2 + 2AB^2 - CB^2}, \quad AA_1 = \frac{1}{2} \sqrt{2AC^2 + 2AB^2 - CB^2},$$

что и требовалось доказать.



б) Дано: $\triangle ABC$; $AN = CM$.

Доказать: $AB = BC$.

$$CM = \frac{\sqrt{2BC^2 + 2AC^2 - AB^2}}{2}; \quad AN = \frac{\sqrt{2AB^2 + 2AC^2 - BC^2}}{2},$$

т.к. $AN = MC$, то

$$\frac{1}{2} \sqrt{2BC^2 + 2AC^2 - AB^2} = \frac{1}{2} \sqrt{2AB^2 + 2AC^2 - BC^2};$$

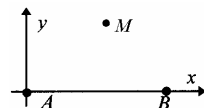
$$2BC^2 + 2AC^2 - AB^2 = 2AB^2 + 2AC^2 - BC^2; \quad 2BC^2 + BC^2 = 2AB^2 + AB^2;$$

$$3BC^2 = 3AB^2; \quad BC = AB$$

что и требовалось доказать.

1010.

Дано: А и В



Найти множество всех точек М:

а) $2AM^2 - BM^2 = 2AB^2$; б) $AM^2 + 2BM^2 = 6AB^2$

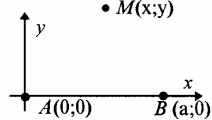
а) Введем систему координат так, как показано на рисунке, $A(0; 0)$; $B(a; 0)$; $M(x; y)$

$$AM^2 = x^2 + y^2, \quad BM^2 = (a-x)^2 + y^2, \quad AB^2 = a^2;$$

$$2(x^2 + y^2) - ((a-x)^2 + y^2) = 2a^2, \quad 2x^2 + 2y^2 - (a-x)^2 - y^2 = 2a^2$$

$$x^2 + y^2 + 2ax = 3a^2; \quad (x^2 + 2ax + a^2) - a^2 + y^2 = 3a^2; \quad (x+a)^2 + y^2 = 4a^2$$

окружность с центром $(-a; 0)$ и $R=2a$.



б) Введем систему координат так, как показано на рисунке, $A(0; 0)$; $B(a; 0)$; $M(x; y)$

$$AM^2 = x^2 + y^2, \quad BM^2 = (a-x)^2 + y^2, \quad AB^2 = a^2;$$

$$x^2 + y^2 + 2(a-x)^2 + 2y^2 = 6a^2; \quad 3x^2 - 4ax + 3y^2 = 4a^2,$$

$$3\left(x - \frac{2}{3}a\right)^2 + 3y^2 = \frac{16}{3}a^2; \quad \left(x - \frac{2}{3}a\right)^2 + y^2 = \frac{16}{9}a^2$$

окружность с центром $\left(\frac{2}{3}a; 0\right)$ и $R = \frac{4}{3}a$.

1013.

Дано: а) $\cos \alpha = \frac{1}{2}$; б) $\cos \alpha = -\frac{2}{3}$; в) $\cos \alpha = -1$

Найти: $\sin \alpha$

Воспользуемся основным тригонометрическим тождеством

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1, \quad \sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha.$$

а) $\sin^2 \alpha = 1 - \frac{1}{4}$, $\sin \alpha = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\sin^2 \alpha = 1 - \frac{4}{9}$, $\sin \alpha = \pm \frac{\sqrt{5}}{3}$;

в) $\sin^2 \alpha = 1 - 1 = 0$, $\sin \alpha = 0$.

1014.

Дано: а) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\sin \alpha = \frac{1}{4}$; в) $\sin \alpha = 0$.

Найти: $\cos \alpha$

Воспользуемся основным тригонометрическим тождеством

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1, \quad \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$$

а) $\cos^2 \alpha = 1 - \frac{3}{4}$, $\cos \alpha = \pm \frac{1}{2}$;

б) $\cos^2 \alpha = 1 - \frac{1}{16}$, $\cos^2 \alpha = \frac{15}{16}$, $\cos \alpha = \pm \frac{\sqrt{15}}{4}$;

в) $\cos^2 \alpha = 1$, $\cos \alpha = \pm 1$.

1015.

Дано: а) $\cos \alpha = 1$; б) $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; в) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$)

г) $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ ($90^\circ < \alpha < 180^\circ$).

Найти: $\operatorname{tg} \alpha$

Решение:

а) $\sin \alpha = 0$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{0}{1} = 0$;

б) $\sin^2 \alpha = 1 - \frac{3}{4}$, $\sin \alpha = \pm \frac{1}{2}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \pm \frac{1}{2} : \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$;

в) Так как $0^\circ < \alpha < 90^\circ$, то $\cos \alpha > 0$, т.е. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = 1$;

г) Так как $90^\circ < \alpha < 180^\circ$, то $\cos \alpha < 0$, $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\frac{3}{4}$.

1016.

$$\text{a) } \sin 120^\circ = \sin(180^\circ - 60^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\cos 120^\circ = \cos(180^\circ - 60^\circ) = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2},$$

$$\operatorname{tg} 120^\circ = -\operatorname{tg} 60^\circ = -\sqrt{3};$$

$$\text{б) } \sin 135^\circ = \sin(180^\circ - 45^\circ) = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\cos 135^\circ = \cos(180^\circ - 45^\circ) = -\cos 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\operatorname{tg} 135^\circ = -1;$$

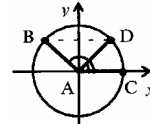
$$\text{в) } \sin 150^\circ = \sin(180^\circ - 30^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2},$$

$$\cos 150^\circ = \cos(180^\circ - 30^\circ) = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2},$$

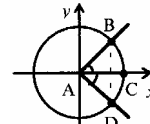
$$\operatorname{tg} 150^\circ = \frac{\sin 150^\circ}{\cos 150^\circ} = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

1017.

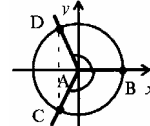
$$\text{a) } \sin \angle A = \frac{2}{3}, \sin \angle CAD = \frac{2}{3}, \sin \angle CAB = \frac{2}{3};$$



$$\text{б) } \cos \angle A = \frac{3}{4}, \cos \angle DAC = \frac{3}{4}, \cos \angle CAB = \frac{3}{4}$$

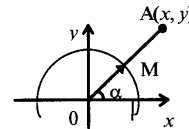


$$\text{в) } \cos \angle A = -\frac{2}{5}, \cos \angle BAC = -\frac{2}{5}, \cos \angle BAD = -\frac{2}{5}$$



1018.

$$\text{a) } \begin{cases} x = 3 \cdot \cos 45^\circ \\ y = 3 \cdot \sin 45^\circ \end{cases} \begin{cases} x = \frac{3\sqrt{2}}{2} \\ y = \frac{3\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$



$$\text{б) } OA=1,5, \alpha = 90^\circ; \begin{cases} x = 1,5 \cdot \cos 90^\circ \\ y = 1,5 \cdot \sin 90^\circ \end{cases} \begin{cases} x = 0 \\ y = 1,5 \end{cases}$$

$$\text{в) } OA=5, \alpha = 150^\circ; \begin{cases} x = 5 \cdot \cos 150^\circ \\ y = 5 \cdot \sin 150^\circ \end{cases} \begin{cases} x = \frac{5\sqrt{3}}{2} \\ y = \frac{5}{2} \end{cases}$$

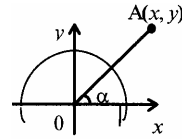
$$\text{г) } OA=1, \alpha = 180^\circ \begin{cases} x = 1 \cdot \cos 180^\circ \\ y = 1 \cdot \sin 180^\circ \end{cases} \begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\text{д) } OA=2, \alpha = 30^\circ \begin{cases} x = 2 \cdot \cos 30^\circ \\ y = 2 \cdot \sin 30^\circ \end{cases} \begin{cases} x = \sqrt{3} \\ y = 1 \end{cases}$$

1019.

$$\text{а) } \begin{cases} 2 = OA \cdot \cos \alpha \\ 2 = OA \cdot \sin \alpha \end{cases} \Rightarrow OA = \sqrt{(2-0)^2 + (2-0)^2} = 2\sqrt{2}$$

$$\begin{cases} 2 = 2 \cdot \sqrt{2} \cos \alpha \\ 2 = 2 \cdot \sqrt{2} \sin \alpha \end{cases} \begin{cases} \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \mid \alpha = 45^\circ$$



$$\text{б) } \begin{cases} 0 = OA \cdot \cos \alpha \\ 3 = OA \cdot \sin \alpha \end{cases} \Rightarrow OA = \sqrt{0^2 + (0-3)^2} = 3$$

$$\begin{cases} 0 = 3 \cdot \cos \alpha \\ 3 = 3 \cdot \sin \alpha \end{cases} \begin{cases} \cos \alpha = 0 \\ \sin \alpha = 1 \end{cases} \mid \alpha = 90^\circ$$

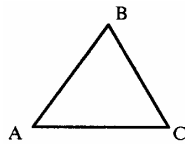
$$\text{в) } \begin{cases} -\sqrt{3} = OA \cdot \cos \alpha \\ 1 = OA \cdot \sin \alpha \end{cases} \Rightarrow OA = \sqrt{(0 - (-\sqrt{3}))^2 + (0-1)^2} = \sqrt{3+1} = 2$$

$$\begin{cases} -\sqrt{3} = 2 \cdot \cos \alpha \\ 1 = 2 \cdot \sin \alpha \end{cases} \begin{cases} \cos \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin \alpha = \frac{1}{2} \end{cases} \mid \alpha = 150^\circ$$

$$\text{г) } \begin{cases} -2\sqrt{2} = OA \cdot \cos \alpha \\ 2\sqrt{2} = OA \cdot \sin \alpha \end{cases} \Rightarrow OA = \sqrt{(0 - (-2\sqrt{2}))^2 + (0-2\sqrt{2})^2} = 4$$

$$\begin{cases} -2\sqrt{2} = 4 \cdot \cos \alpha \\ 2\sqrt{2} = 4 \cdot \sin \alpha \end{cases} \begin{cases} \cos \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \mid \alpha = 135^\circ$$

1020.



а) $AB=6\sqrt{8}$ см, $AC=4$ см, $\angle A=60^\circ$,

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin \angle A = \frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{8} \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 12\sqrt{6} \text{ см}^2;$$

б) $BC=3$ см, $AB=18\sqrt{2}$ см, $\angle B=45^\circ$,

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin \angle B = \frac{1}{2} \cdot 18\sqrt{2} \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 27 \text{ см}^2;$$

в) $AC=14$ см, $BC=7$ см, $\angle C=48^\circ$,

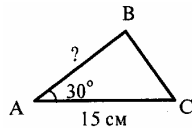
$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BC \cdot \sin \angle C \approx \frac{1}{2} \cdot 14 \cdot 7 \cdot 0,74 = 36,4 \text{ см}^2.$$

1021.

$S_{ABCD} = S_{ABD} + S_{BCD}$, так как $\triangle ABD = \triangle BCD$ (по двум сторонам и углу между ними), т.е. $S_{ABD} = S_{BCD}$, откуда

$$S_{ABCD} = 2 \cdot S_{ABD} = 2 \left(\frac{1}{2} \cdot ab \sin \alpha \right) = ab \sin \alpha.$$

1022.



Дано: $S_{\triangle ABC} = 60 \text{ см}^2$, $AC = 15$ см, $\angle A = 30^\circ$.

Найти: AB

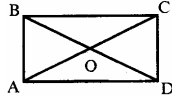
$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin \angle A$$

$$60 = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot 15 \cdot \sin 30^\circ \quad 120 = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot 15 \quad AB = 16 \text{ см}.$$

1023.

Дано: $ABCD$ — прямоугольник, $AC = 10$ см, $\angle AOB = 30^\circ$.

Найти: S_{ABCD}



$$S_{\triangle AOB} = S_{\triangle COD} = \frac{1}{2} \cdot AO \cdot BO \cdot \sin \angle AOB$$

$$S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5 \cdot \sin 30^\circ = \frac{25}{4} \quad S_{\triangle BOC} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5 \cdot \sin 150^\circ = \frac{25}{4}$$

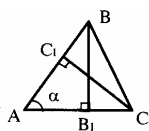
$$S_{ABCD} = 4 \cdot S_{\triangle AOB} = 4 \cdot \frac{25}{4} = 25 \text{ см}^2.$$

1024.

Дано: $\triangle ABC$; а) $\angle A = \alpha$, $BB_1 \perp AC_1$, $BB_1 = h_b$, $CC_1 \perp AB$, $CC_1 = h_c$;

б) $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$, $BB_1 \perp AC$, $BB_1 = h$.

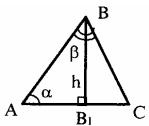
Найти: $S_{\Delta ABC}$



а) Рассмотрим ΔABB_1 : $AB = \frac{h_b}{\sin \alpha}$.

Рассмотрим ΔAC_1C : $AC = \frac{h_b}{\sin \alpha}$.

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{h_b}{\sin \alpha} \cdot \frac{h_b}{\sin \alpha} \cdot \sin \alpha = \frac{h_b^2}{2 \cdot \sin \alpha}$$

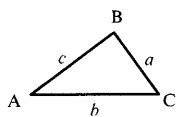


б) Рассмотрим ΔABB_1 : $AB = \frac{h}{\sin \alpha}$.

Рассмотрим ΔB_1BC : $\frac{h}{\sin(180^\circ - \alpha - \beta)} = \frac{h}{\sin(\alpha + \beta)}$.

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{h}{\sin \alpha} \cdot \frac{h}{\sin(\alpha + \beta)} \cdot \sin \beta = \frac{h^2 \cdot \sin \beta}{2 \cdot \sin \alpha \cdot \sin(\alpha + \beta)}$$

1025.



а) Найти: $\angle C$, a , b , если $\angle A=60^\circ$, $\angle B=40^\circ$, $c=14$.

$$\angle C = 180^\circ - (\angle A + \angle B) = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$$

По теореме синусов: $\frac{AB}{\sin \angle C} = \frac{BC}{\sin \angle A} = \frac{AC}{\sin \angle B}$

$$\frac{14}{\sin 80^\circ} = \frac{a}{\sin 60^\circ}, \quad a \approx \frac{14}{0,984} \cdot 0,86 \approx 12,236$$

$$\frac{14}{\sin 80^\circ} = \frac{b}{\sin 40^\circ}, \quad b \approx \frac{14}{0,984} \cdot 0,642 \approx 9,134$$

б) Найти: $\angle B$, a , c , если $\angle A=30^\circ$, $\angle C=75^\circ$, $b=4,5$.

$$\angle B = 180^\circ - (\angle A + \angle C) = 180^\circ - 105^\circ = 75^\circ$$

$\angle B = \angle C \Rightarrow$ треугольник равнобедренный и $b=c$, по теореме синусов:

$$\frac{AB}{\sin \angle C} = \frac{BC}{\sin \angle A} = \frac{AC}{\sin \angle B}$$

$$\frac{a}{\sin 30^\circ} = \frac{4,5}{\sin 75^\circ}, \quad a \approx \frac{4,5}{0,9659} \cdot 0,5 \approx 2,33$$

в) Найти: $\angle B$, $\angle C$, c , если $\angle A=80^\circ$, $a=16$, $b=10$.

По теореме синусов: $\frac{AB}{\sin \angle C} = \frac{BC}{\sin \angle A} = \frac{AC}{\sin \angle B}$

$$\frac{16}{\sin 80^\circ} = \frac{10}{\sin \angle B}, \quad \sin \angle B \approx \frac{10 \cdot 0,9848}{16} = 0,6155 \quad \angle B \approx 37^\circ 59'$$

$$\angle C \approx 180^\circ - (80^\circ + 37^\circ 59') \approx 62^\circ 1'$$

$$\frac{16}{\sin 80^\circ} = \frac{c}{\sin 62^\circ 1'} \quad c \approx \frac{16 \cdot 0,8830}{0,9848} \approx 14,346$$

г) Найти: $\angle A$, b , c , если $\angle B = 45^\circ$, $\angle C = 70^\circ$, $a = 24,6$.

$$\angle A = 180^\circ - (\angle B + \angle C) = 180^\circ - (45^\circ + 70^\circ) = 65^\circ$$

По теореме синусов: $\frac{AB}{\sin \angle C} = \frac{BC}{\sin \angle A} = \frac{AC}{\sin \angle B}$

$$\frac{24,6}{\sin 65^\circ} = \frac{b}{\sin 45^\circ}, \quad b \approx \frac{24,6}{0,9063} \cdot 0,7071 \approx 19,193,$$

$$\frac{24,6}{\sin 65^\circ} = \frac{c}{\sin 70^\circ}, \quad c \approx \frac{24,6}{0,9063} \cdot 0,9397 \approx 25,507$$

д) Найти: $\angle B$, $\angle C$, c , если $\angle A = 60^\circ$, $a = 10$, $b = 7$.

По теореме синусов: $\frac{AB}{\sin \angle C} = \frac{BC}{\sin \angle A} = \frac{AC}{\sin \angle B}$

$$\frac{10}{\sin 60^\circ} = \frac{7}{\sin \angle B}; \quad \sin B \approx \frac{7 \cdot 0,8660}{10} = 0,6062; \quad \angle B \approx 37^\circ 19';$$

$$\angle C \approx 180^\circ - (60^\circ + 37^\circ 19'); \quad \angle C \approx 82^\circ 41';$$

$$\frac{10}{\sin 60^\circ} = \frac{c}{\sin 42^\circ 41'}; \quad c \approx \frac{10 \cdot 0,6780}{0,8660} \approx 7,829.$$

е) Найти: $\angle A$, $\angle B$, c , если $\angle C = 54^\circ$, $a = 6,3$, $b = 6,3$.

Применим теорему косинусов: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \angle A$

$$c^2 = 2 \cdot 39,69 - 2 \cdot 39,69 \cdot \cos 54^\circ; \quad c^2 \approx 79,38 - 79,38 \cdot 0,5878 \approx 32,72; \quad c \approx 5,72,$$

так как $a = b = 6,3$; то треугольник равнобедренный,

$$\angle A = \angle B = (180^\circ - 54^\circ) : 2 = 63^\circ.$$

ж) Найти: $\angle B$, $\angle C$, a , если $\angle A = 87^\circ$, $b = 32$, $c = 45$.

По теореме косинусов:

$$a^2 \approx 32^2 + 45^2 - 2 \cdot 32 \cdot 45 \cdot 0,0523 \approx 1024 + 2025 - 150,624 \approx 2898,38 \quad a \approx 53,84$$

По теореме синусов: $\frac{AB}{\sin \angle C} = \frac{BC}{\sin \angle A} = \frac{AC}{\sin \angle B}$

$$\frac{53,84}{\sin 87^\circ} \approx \frac{32}{\sin \angle B} \quad \frac{53,84}{0,9986} \approx \frac{32}{\sin \angle B}$$

$$\sin \angle B \approx 0,5935 \quad \angle B = 36^\circ 24'$$

$$\angle C \approx 180^\circ - (87^\circ + 36^\circ 24') \approx 56^\circ 36'$$

з) Найти: $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$, если $a = 14$, $b = 18$, $c = 20$.

По теореме косинусов: $20^2 = 18^2 + 14^2 - 2 \cdot 18 \cdot 14 \cdot \cos \angle C$

$$\cos \angle C \approx 0,2381 \quad \angle C \approx 76^\circ 13'$$

$$18^2 = 14^2 + 20^2 - 2 \cdot 14 \cdot 20 \cdot \cos \angle B \quad \cos \angle B \approx 0,4857 \quad \angle B \approx 60^\circ 57'$$

$$\angle A \approx 180^\circ - (76^\circ 13' + 60^\circ 57') \approx 42^\circ 50'$$

и) Найти: $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$, если $a=6$, $b=7,3$, $c=4,8$.

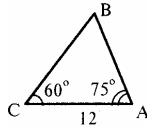
По теореме косинусов: $7,3^2 = 6^2 + 4,8^2 - 2 \cdot 6 \cdot 4,8 \cdot \cos \angle B$

$$\cos \angle B \approx 0,0998 \quad \angle B \approx 84^\circ 16'$$

$$4,8^2 = 6^2 + 7,3^2 - 2 \cdot 6 \cdot 7,3 \cdot \cos \angle C \quad \cos \angle C \approx 0,7563 \quad \angle C \approx 40^\circ 52'$$

$$\angle A \approx 180^\circ - (84^\circ 16' + 40^\circ 52') \approx 54^\circ 52'$$

1026.



Дано: $\triangle ABC$, $AC = 12$ см, $\angle A = 75^\circ$, $\angle C = 60^\circ$.

Найти: AB , $S_{\triangle ABC}$.

$$\angle B = 180^\circ - (60^\circ + 75^\circ) = 45^\circ$$

По теореме синусов:

$$\frac{12}{\sin 45^\circ} = \frac{AB}{\sin 60^\circ} \quad AB \approx \frac{12 \cdot 0,866}{0,8071} \approx 12,9$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 12,9 \cdot 0,9659 \approx 74,8 \text{ см}^2$$

1027.

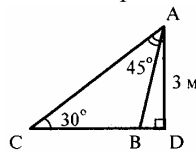
Дано: $\triangle ABC$, $\angle A = 45^\circ$, $\angle C = 30^\circ$, $AD = 3$ м, $AD \perp BC$.

Найти: AB , BC , AC .

Рассмотрим $\triangle ADC$: т.к. $\angle D = 90^\circ$, $\angle C = 30^\circ$, то $AC = 2 \cdot AD = 6$ м

Рассмотрим $\triangle ACB$: $\angle B = 180^\circ - (30^\circ + 45^\circ) = 105^\circ$.

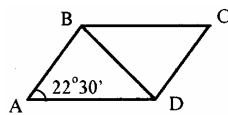
По теореме синусов:



$$\frac{AB}{\sin 30^\circ} = \frac{6}{\sin 105^\circ} \quad AB \approx \frac{6 \cdot 0,5}{0,9659} \approx 3,1 \text{ м}$$

$$\frac{BC}{\sin 45^\circ} = \frac{6}{\sin 105^\circ} \quad BC \approx \frac{6 \cdot 0,7071}{0,9659} \approx 4,4 \text{ м}$$

1028.



Дано: $ABCD$ – параллелограмм, $AD = 7\frac{1}{3}$ м;

$BD = 4,4$ м; $\angle A = 22^\circ 30'$

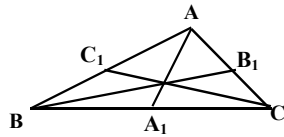
Найти: $\angle BDC$, $\angle DBC$.

Рассмотрим $\triangle ABD$: по теореме синусов:

$$\frac{4,4}{\sin 22^\circ 30'} = \frac{7\frac{1}{3}}{\sin \angle ABD} \quad \angle \sin \angle ABD \approx \frac{7\frac{1}{3} \cdot 0,3827}{4,4} \quad \angle B \approx 39^\circ 38'$$

$$\angle ADB \approx 180^\circ - (22^\circ 30' + 39^\circ 38') = 117^\circ 52'$$

1029.



Дано: $\triangle ABC$, $BC=a$, $\angle B=\alpha$, $\angle C=\beta$.

Найти биссектрисы.

Рассмотрим $\triangle BCB_1$: $\angle B_1=180^\circ-\beta-\frac{\alpha}{2}$.

По теореме синусов:

$$\frac{BC}{\sin \angle B_1} = \frac{BB_1}{\sin \angle C} \quad \frac{a}{\sin \left(\beta + \frac{\alpha}{2} \right)} = \frac{BB_1}{\sin \beta} \quad BB_1 = \frac{a \cdot \sin \beta}{\sin \left(\beta + \frac{\alpha}{2} \right)}$$

Рассмотрим $\triangle BCC_1$: $\angle C_1=180^\circ-\alpha-\frac{\beta}{2}$

$$\frac{BC}{\sin \angle C_1} = \frac{CC_1}{\sin \angle B} \quad \frac{a}{\sin \left(\alpha + \frac{\beta}{2} \right)} = \frac{CC_1}{\sin \alpha} \quad CC_1 = \frac{a \cdot \sin \alpha}{\sin \left(\alpha + \frac{\beta}{2} \right)}$$

$\angle BAA_1=90-\frac{\alpha+\beta}{2}$. Рассмотрим $\triangle BAA_1$: $\angle BA_1A=90+\frac{\beta-\alpha}{2}$

$$\frac{AA_1}{\sin \angle B} = \frac{AB}{\sin \angle A_1} \quad AB = \frac{a \cdot \sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)}$$

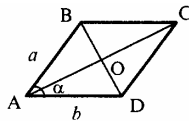
$$AA_1 = \frac{a \cdot \sin \beta \cdot \sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta) \cdot \sin \left(90^\circ + \frac{\beta - \alpha}{2} \right)} = \frac{a \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta) \cdot \cos \left(\frac{\beta - \alpha}{2} \right)}$$

1030.

Дано: $ABCD$ — параллелограмм, $AB=a$; $AD=b$; $\angle A=\alpha$.

Найти: BD , AC , $\angle AOB$

По теореме косинусов:



$$BD^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha \quad BD = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \alpha}$$

$$AC^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cos \alpha \quad AC = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cdot \cos \alpha}$$

Рассмотрим $\triangle ABO$:

$$BO = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha}}{2} \quad AO = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos \alpha}}{2}$$

$$a^2 = \frac{a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha + a^2 + b^2 + 2ab \cos \alpha}{4}$$

$$\frac{2\sqrt{(a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha) \cdot (a^2 + b^2 + 2ab \cos \alpha)}}{4} \cos \angle AOB,$$

$$\cos \angle AOB = \frac{a^2 - b^2}{2} : \frac{\sqrt{(a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha) \cdot (a^2 + b^2 + 2ab \cos \alpha)}}{2} =$$

$$= \frac{a^2 - b^2}{\sqrt{(a^2 + b^2)^2 - 4a^2 b^2 \cos^2 \alpha}}$$

1031.

а) $a=5$; $b=c=4$.

По теореме косинусов: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \angle A$

$$25 = 16 + 16 - 2 \cdot 16 \cdot \cos \angle A \quad -7 = -32 \cdot \cos \angle A$$

$$\cos \angle A \approx 0,2188 \quad \angle A \approx 12^\circ 38'$$

Так как против большей стороны лежит больший угол, то $\triangle ABC$ – остроугольный.

б) $a=17$; $b=8$; $c=15$.

По теореме косинусов: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \angle A$

$$289 = 64 + 225 - 240 \cdot \cos \angle A \quad 0 = 240 \cdot \cos \angle A \quad \angle A = 90^\circ$$

$\triangle ABC$ – прямоугольный.

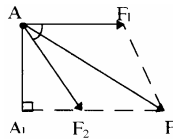
в) $a=9$; $b=5$; $c=6$.

По теореме косинусов: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$

$$81 = 35 + 36 - 60 \cos \alpha \quad 10 = -60 \cos \alpha \quad \cos \alpha \approx -0,16666 < 0,$$

следовательно $\angle \alpha$ – тупой. $\triangle ABC$ – тупоугольный.

1032.



Дано: $\vec{F}_1 = \vec{F}_2$; $\angle F_1 A F_2 = 72^\circ$; $|\vec{F}| = 120$ кг

Найти: $|\vec{F}_1|$; $|\vec{F}_2|$

В $\triangle A A_1 F_2$: $\angle A_1 = 90^\circ$, $\angle F_2 = 72^\circ \Rightarrow A A_1 = A F_2 \cdot \sin 72^\circ$.

В $\triangle A A_1 F$: $\angle A_1 = 90^\circ$, $\angle F = 36^\circ \Rightarrow A A_1 = A F \cdot \sin 36^\circ$.

$$A F_2 \cdot \sin 72^\circ = A F \cdot \sin 36^\circ \quad 2 A F_2 \cdot \sin 36^\circ \cdot \cos 36^\circ = 120 \cdot \sin 36^\circ$$

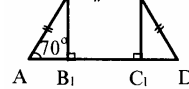
$$A F_2 \approx \frac{60}{0,809} \approx 74,17$$

Ответ: $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| \approx 74,2$ кг

1034.

Дано: $ABCD$ — трапеция, $AB = BC = CD$; $AD = 10$ см; $\angle A = 70^\circ$.

Найти: P_{ABCD}



Пусть $AB = x$, тогда $AB_1 = C_1 D = \frac{10 - x}{2}$, полу-

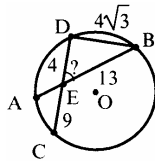
чим в $\triangle A B B_1$: $AB_1 = AB \cdot \cos 70^\circ$,

$$5 - \frac{x}{2} \approx x \cdot 0,342, \quad 5 \approx x \cdot 0,842, \quad x \approx 5,94$$

$$AB = BC = CD \approx 6 \text{ см}$$

$$P_{ABCD} = AB + BC + CD + AD \approx 6+6+6+10 = 28 \text{ см}$$

1035.



Дано: AB, CD — хорды, $AB \cap CD = E$; $AB = 13$ см;
 $CE = 9$ см; $ED = 4$ см; $BD = 4\sqrt{3}$ см.

Найти: $\angle BED$.

По свойству пересекающихся хорд:

$AE \cdot EB = CE \cdot ED$, пусть $AE = x$, тогда

$$x \cdot (13 - x) = 9 \cdot 4 \quad 13x - x^2 - 36 = 0 \quad x^2 - 13x + 36 = 0$$

$$x_1 = 4; \quad x_2 = 9$$

при $AE = 4$, $EB = 9$ см; при $AE = 9$, $EB = 4$ см.

Если $AE = 4$ см, то $\triangle DEB$ — равнобедренный.

По теореме косинусов: $DB^2 = ED^2 + EB^2 - 2 \cdot ED \cdot EB \cdot \cos \angle E$

$$48 = 16 + 16 - 32 \cdot \cos \angle E \quad \cos \angle E = -0,5 < 0,$$

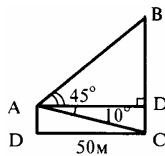
$$\angle E = 120^\circ, \quad \angle DEA = 60^\circ$$

Если $EB = 9$ см, то по теореме косинусов

$$(4\sqrt{3})^2 = 4^2 + 9^2 - 2 \cdot 4 \cdot 9 \cos \angle E \quad 48 = 16 + 81 - 72 \cos \angle E \quad -49 = -72 \cos \angle E$$

$$\cos \angle E \approx 0,6806 \quad \angle E \approx 47^\circ 07'$$

1036.



Дано: $\angle BAD = 45^\circ$, $\angle CAD = 10^\circ$, $DC = 50$ м.

Найти: BC.

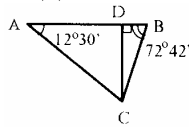
В $\triangle ABD$: $\angle A = 45^\circ$, $\angle D = 90^\circ$, т.е. $AD = DB = 50$ м.

В $\triangle ADC$: $\operatorname{tg} \angle A = \frac{DC}{AD}$, т.е. $DC = AD \cdot \operatorname{tg} \angle A$

$$DC \approx 50 \cdot 0,1763 \approx 8,82 \quad BC \approx 50 + 8,82 = 58,82$$

1037.

Дано: $AB = 70$ м; $\angle CAB = 12^\circ 30'$; $\angle ABC = 72^\circ 42'$; $CD \perp AB$.



Найти: CD.

В $\triangle ADC$: $CD = AD \cdot \operatorname{tg} 12^\circ 30'$

В $\triangle BDC$: $CD = BD \cdot \operatorname{tg} 72^\circ 42'$

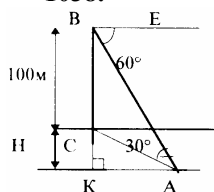
Пусть $AD = x$ м, тогда $BD = 70 - x$ м

$$x \operatorname{tg} 12^\circ 30' = (70 - x) \operatorname{tg} 72^\circ 42' \quad x \cdot 0,2217 \approx (70 - x) \cdot 3,21$$

$$3,4327x \approx 224,77 \quad x \approx 65,48$$

$$AD \approx 65,48 \text{ м} \quad CD \approx 65,48 \cdot 0,2217 \approx 14,52 \text{ м.}$$

1038.



Дано: $\angle ABE=60^\circ$; $\angle CAB=30^\circ$; $BC=100$ м.

Найти: H .

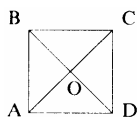
Решение:

Т.к. $\angle CBE=90^\circ$, $\angle EBA=60^\circ$, то $\angle CBA=30^\circ$, т.е. $\triangle ABC$ — равнобедренный и $\angle C=120^\circ$, $BC=AC=100$ м.

$\angle BCA$ и $\angle KCA$ — смежные, и $\angle KCA=60^\circ$, $\angle KAC=30^\circ$

$$CK = \frac{1}{2} AC, \quad CK=50 \text{ м.}$$

1039.

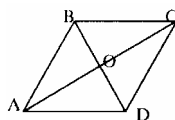


Дано: $ABCD$ — квадрат, $AC \cap BD=O$.

Найти углы.

- а) $(\vec{AB}, \vec{AC}) = 45^\circ$; б) $(\vec{AB}, \vec{DA}) = 90^\circ$;
 в) $(\vec{OA}, \vec{OB}) = 90^\circ$; г) $(\vec{AO}, \vec{OB}) = 90^\circ$; д) $(\vec{OA}, \vec{OC}) = 180^\circ$;
 е) $(\vec{AC}, \vec{BD}) = 90^\circ$; ж) $(\vec{AD}, \vec{DB}) = 135^\circ$; з) $(\vec{AO}, \vec{OC}) = 0^\circ$.

1040.



Дано: $ABCD$ — ромб, $AC \cap BD=O$, $BD=AB$.

Найти углы.

Решение:

Так как $\triangle ABD$ — равносторонний:

- а) $(\vec{AB}, \vec{AD}) = 60^\circ$; б) $(\vec{AB}, \vec{DA}) = 120^\circ$; в) $(\vec{BA}, \vec{AD}) = 120^\circ$;
 г) $(\vec{OC}, \vec{OD}) = 90^\circ$; д) $(\vec{AB}, \vec{DC}) = 0^\circ$; е) $(\vec{AB}, \vec{CD}) = 180^\circ$.

1041.

$$|\vec{a}| = 2; \quad |\vec{b}| = 3.$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b})$$

а) $(\vec{a}, \vec{b}) = 45^\circ, \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos 45^\circ = 6 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2};$

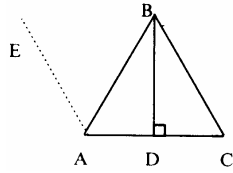
$$\text{б) } \left(\vec{a}, \vec{b} \right) = 90^\circ, \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot 3 \cdot \cos 90^\circ = 0;$$

$$\text{в) } \left(\vec{a}, \vec{b} \right) = 135^\circ, \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot 3 \cdot \cos 135^\circ = 6 \cdot \frac{-\sqrt{2}}{2} = -3\sqrt{2}.$$

1042.

Дано: $\triangle ABC$ – равносторонний; $AB=a$; $BD \perp AC$

Найти скалярное произведение.



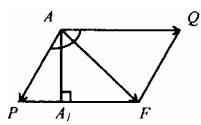
$$\text{а) } \vec{AB} \cdot \vec{AC} = a \cdot a \cdot \cos 60^\circ = \frac{a^2}{2};$$

$$\text{б) } \vec{AC} \cdot \vec{CB} = a \cdot a \cdot \cos 120^\circ = -\frac{a^2}{2};$$

$$\text{в) } \vec{AC} \cdot \vec{BD} = |\vec{AC}| \cdot |\vec{BD}| \cdot \cos 90^\circ, \quad \vec{AC} \cdot \vec{BD} = 0;$$

$$\text{г) } \vec{AC} \cdot \vec{AC} = |\vec{AC}| \cdot |\vec{AC}| \cdot \cos 0^\circ, \quad \vec{AC} \cdot \vec{AC} = a^2.$$

1043.



Дано: $|\vec{P}| = 8$, $|\vec{Q}| = 15$, $\angle A = 120^\circ$.

Найти $|\vec{F}|$.

$$\triangle PAA_1: \angle A_1 = 90^\circ; \angle A = 30^\circ; PA_1 = \frac{1}{2} AP = \frac{1}{2} \cdot 8 = 4.$$

$$\left. \begin{aligned} AA_1 &= \sqrt{AP^2 - PA_1^2} \\ AA_1 &= \sqrt{AF^2 - A_1F^2} \end{aligned} \right\},$$

$$\text{следовательно } \sqrt{AP^2 - PA_1^2} = \sqrt{AF^2 - A_1F^2}$$

$$8^2 - 4^2 = AF^2 - 11^2$$

$$AF^2 = 8^2 + 11^2 - 4^2 = 169$$

$$AF = 13, \quad |\vec{F}| = 13.$$

1044.

$$\text{а) } \vec{a} \left\{ \frac{1}{4}; -1 \right\}, \quad \vec{b} \{2; 3\}, \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{4} \cdot 2 + (-1) \cdot 3 = \frac{1}{2} - 3 = -2,5;$$

$$\text{б) } \vec{a} \{-5; 6\}, \quad \vec{b} \{6; 5\}, \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = -5 \cdot 6 + 6 \cdot 5 = -30 + 30 = 0;$$

$$\text{в) } \vec{a} \{1,5; 2\}, \quad \vec{b} \{4; -0,5\}, \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 1,5 \cdot 4 + 2 \cdot (-0,5) = 6 - 1 = 5.$$

1045.

Дано: $\vec{a} \{x;y\}$, $\vec{b} \{y;x\}$.

Доказать: $\vec{a} \perp \vec{b}$.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x \cdot (-y) + y \cdot x = -xy + xy = 0,$$

т.к. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, то $\vec{a} \perp \vec{b}$.

1046.

Дано: \vec{i} , \vec{j} – координатные векторы.

Доказать, что $\vec{i} + \vec{j} \perp \vec{i} - \vec{j}$.

$$(\vec{i} + \vec{j})(\vec{i} - \vec{j}) = \vec{i}^2 - \vec{i}\vec{j} + \vec{i}\vec{j} - \vec{j}^2 = \vec{i}^2 - \vec{j}^2 = 1 - 1 = 0,$$

т.к. скалярное произведение равно нулю, то $\vec{i} + \vec{j} \perp \vec{i} - \vec{j}$ ч.т.д.

1047.

а) $\vec{a} \{4; 5\}$, $\vec{b} \{x; -6\}$, $4x + 5(-6) = 0$, $x = 7,5$

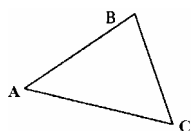
б) $\vec{a} \{x; -1\}$, $\vec{b} \{3; 2\}$, $x \cdot 3 + (-1) \cdot 2 = 0$, $x = \frac{2}{3}$

в) $\vec{a} \{0; -3\}$, $\vec{b} \{5; x\}$, $0 \cdot 5 + (-3) \cdot x = 0$, $x = 0$

1048.

Дано: A(2; 8); B(-1; 5); C(3; 1).

Найти: $\cos \angle A$; $\cos \angle B$; $\cos \angle C$.



$$AB = \sqrt{(2+1)^2 + (8-5)^2} = \sqrt{9+9} = 3\sqrt{2}$$

$$BC = \sqrt{(3+1)^2 + (1-5)^2} = \sqrt{16+16} = 4\sqrt{2}$$

$$AC = \sqrt{(3-2)^2 + (1-8)^2} = \sqrt{1+49} = 5\sqrt{2}$$

По теореме косинусов: $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos \angle A$

$$32 = 50 + 18 - 60 \cos \angle A \quad \cos \angle A = \frac{36}{60} = \frac{3}{5}$$

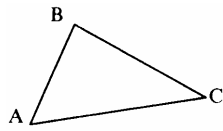
$AC^2 = BA^2 + BC^2 - 2BA \cdot BC \cdot \cos \angle B$

$$50 = 32 + 18 - 48 \cos \angle B \quad \cos \angle B = \frac{0}{48} = 0$$

$AB^2 = CA^2 + CB^2 - 2CA \cdot CB \cdot \cos \angle C$

$$18 = 50 + 32 - 80 \cos \angle C \quad \cos \angle C = \frac{64}{80} = \frac{4}{5}$$

1049.



Дано: $A(-1; \sqrt{3}); B(1; -\sqrt{3}); C(\frac{1}{2}; \sqrt{3})$.

Найти: $\angle A; \angle B; \angle C$.

$$AB = \sqrt{(1+1)^2 + (\sqrt{3} + \sqrt{3})^2} = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{3})^2} = 4$$

$$BC = \sqrt{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 + (-\sqrt{3} - \sqrt{3})^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + 12} = \sqrt{\frac{49}{4}} = \frac{7}{2}$$

$$AC = \sqrt{\left(\frac{1}{2} + 1\right)^2 + (\sqrt{3} - \sqrt{3})^2} = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{3}{2} = 1,5$$

По теореме косинусов: $AB^2 = CB^2 + CA^2 - 2CB \cdot CA \cdot \cos \angle C$

$$16 = \frac{49}{4} + \frac{9}{4} - 2 \cdot \frac{7}{2} \cdot \frac{3}{2} \cos \angle C \quad \frac{6}{4} = -\frac{42}{4} \cos \angle C$$

$$\cos \angle C = -\frac{1}{7} \approx -0,1429 < 0,$$

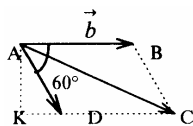
т.е. $\angle C$ – тупой, $\angle C \approx 180^\circ - 81^\circ 47' = 98^\circ 13'$

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos \angle A$$

$$\frac{49}{4} = 16 + \frac{9}{4} - 2 \cdot 4 \cdot \frac{3}{2} \cos \angle A \quad \cos \angle A = \frac{1}{2}, \quad \angle A = 60^\circ$$

$$\angle B = 180^\circ - (\angle A + \angle C) \approx 180^\circ - (60^\circ + 98^\circ 13') = 21^\circ 47'$$

1050.



Дано: $|\vec{a}| = 5; |\vec{b}| = 8 \left(\vec{a}, \vec{b} \right) = 60^\circ$.

Найти: $|\vec{a} + \vec{b}|; |\vec{a} - \vec{b}|$.

а) Рассм. $\triangle ADK$ и $\triangle ACK$ — они прямоугольные, т.к. $\angle KAD = 30^\circ$, то $KD = \frac{1}{2} AD = 2,5$, а значит, $KC = KD + DC = 2,5 + 8 = 10,5$, так как $DC = |\vec{b}|$.

$$\begin{cases} AK = \sqrt{AD^2 - KD^2} \\ AK = \sqrt{AC^2 - KC^2} \end{cases} \Rightarrow AD^2 - KD^2 = AC^2 - KC^2$$

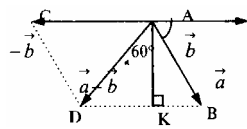
$$25 - 6,25 = AC^2 - 110,25$$

$$AC^2 = 110,25 + 25 - 6,25$$

$$AC^2 = 129, \quad AC = \sqrt{129},$$

т.е. $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{129}$

б) т.к. $\angle BAK=30^\circ$, то $KB = \frac{1}{2} AB=2,5$, откуда $DK=5,5$.

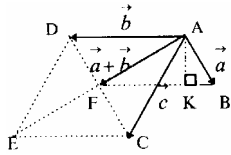


$$\begin{cases} AK = \sqrt{AB^2 - BK^2} \\ AK = \sqrt{AD^2 - DK^2} \end{cases} \Rightarrow AB^2 - BK^2 = AD^2 - DK^2$$

$$AD^2 = AB^2 - BK^2 + DK^2$$

$$AD^2 = 25 - 6,25 + 30,25 = 49 \Rightarrow |\vec{a} - \vec{b}| = 7$$

1051.



Дано: $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{c}) = 60^\circ$ $|\vec{a}|=1$; $|\vec{b}|=|\vec{c}|=2$.

Найти: $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c}$.

$\triangle ABK$ и $\triangle AFK$ — прямоугольные, т.к.

$\angle BAK=30^\circ$, то $BK = \frac{1}{2} AB$, $BK = \frac{1}{2}$, $FK = 1 \frac{1}{2}$

$$\begin{cases} AK = \sqrt{AB^2 - KB^2} \\ AK = \sqrt{AF^2 - FK^2} \end{cases} \Rightarrow AB^2 - KB^2 = AF^2 - FK^2$$

$$1 - \frac{1}{4} = AF^2 - \frac{9}{4} \quad AF^2 = 3 \quad AF = \sqrt{3}, \quad |\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{3}$$

т.к. $\vec{AF} = \frac{1}{2} \vec{AE}$, $|\vec{AE}|$ — биссектриса, то $\angle(\vec{c}; (\vec{a} + \vec{b})) = 30^\circ$.

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = |\vec{a} + \vec{b}| \cdot |\vec{c}| \cdot \cos 30^\circ = \sqrt{3} \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3$$

1052.

Дано: $|\vec{a}|=5$; $|\vec{b}|=2$; $|\vec{c}|=4$ и $\vec{a} \perp \vec{b}$

Найти: $\vec{p} \cdot \vec{g}$, где $\vec{p} = \vec{a} - \vec{b} - \vec{c}$; $\vec{g} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$.

$$\begin{aligned} \vec{p} \cdot \vec{g} &= (\vec{a} - \vec{b} - \vec{c})(\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}) = \\ &= \vec{a}^2 - \vec{a} \vec{b} + \vec{a} \vec{c} - \vec{a} \vec{b} + \vec{b}^2 - \vec{b} \vec{c} - \vec{a} \vec{c} + \vec{b} \vec{c} - \vec{c}^2 = 25 + 4 - 16 = 13. \end{aligned}$$

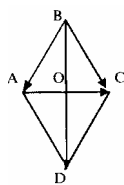
1053.

Дано: $\vec{a} = 3\vec{p} - 2\vec{q}$, $\vec{b} = \vec{p} + 4\vec{q}$, где $\vec{p} \perp \vec{q}$, $|\vec{p}|=1$; $|\vec{q}|=1$.

Найти $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (3\vec{p} - 2\vec{q}) \cdot (\vec{p} + 4\vec{q}) = 3\vec{p}^2 + 12\vec{p} \vec{q} - 2\vec{p} \vec{q} - 8\vec{q}^2 = 3 - 8 = -5.$$

1056.



Дано: ABCD – ромб.

Доказать: $AC \perp BD$

$$\vec{BD} = \vec{BA} + \vec{BC} \quad \vec{AC} = \vec{BC} - \vec{BA}$$

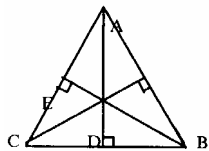
$$\vec{BD} \cdot \vec{AC} = (\vec{BC} + \vec{BA})(\vec{BC} - \vec{BA}) = \vec{BC}^2 - \vec{BA}^2$$

т.к. $|\vec{CB}| = |\vec{BA}| = a$, то $\vec{BD} \cdot \vec{AC} = a^2 - a^2 = 0$, и $\vec{BD} \perp \vec{AC}$ ч.т.д.

1057.

Дано: $\triangle ABC$; $AB = AC = b$, $\angle A = 30^\circ$, $AD \perp BC$, $BE \perp AC$.

Найти: AD , BE , AE , EC , BC .



В $\triangle ABE$: $\angle E = 90^\circ$, $\angle A = 30^\circ$, то $BE = \frac{1}{2} AB = \frac{b}{2}$

$$AE = \sqrt{AB^2 - BE^2} = \sqrt{b^2 - \frac{b^2}{4}} = \frac{b\sqrt{3}}{2}$$

$$CE = AC - AE = b - \frac{b\sqrt{3}}{2} = \frac{b(2 - \sqrt{3})}{2}$$

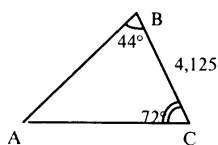
В $\triangle BEC$: $CB = \sqrt{BE^2 + CE^2}$

$$CB = \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{b^2(2 - \sqrt{3})^2}{4}} = \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{7b^2}{4} - b^2\sqrt{3}} = \sqrt{b^2(2 - \sqrt{3})} = b\sqrt{2 - \sqrt{3}}$$

В $\triangle ADC$: $AD = \sqrt{AC^2 - CD^2}$

$$AD = \sqrt{b^2 - \frac{b^2(2 - \sqrt{3})^2}{4}} = \sqrt{\frac{2b^2 + b^2\sqrt{3}}{4}} = \frac{b\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2} = \frac{b\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}$$

1058.



а) $BC = 4,125$ м; $\angle B = 44^\circ$, $\angle C = 72^\circ$.

$$\angle A = 180^\circ - 72^\circ - 44^\circ = 64^\circ.$$

По теореме синусов:

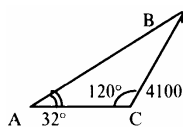
$$\frac{AB}{\sin 72^\circ} = \frac{4,125}{\sin 64^\circ}, \quad AB \approx \frac{4,125 \cdot 0,9511}{0,8988} \approx 4,365 \text{ м;}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC \cdot \sin \angle B$$

$$S_{ABC} \approx \frac{1}{2} \cdot 4,125 \cdot 4,365 \cdot \sin 44^\circ \approx \frac{1}{2} \cdot 4,125 \cdot 4,365 \cdot 0,6947 \approx 6,254 \text{ м}^2$$

б) $BC = 4100$ м; $\angle A = 32^\circ$, $\angle C = 120^\circ$.

$$\angle B = 180^\circ - 32^\circ - 120^\circ = 28^\circ.$$



По теореме синусов:

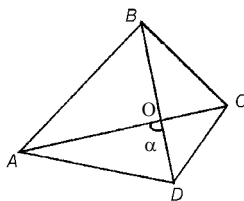
$$\frac{AB}{\sin 120^\circ} = \frac{BC}{\sin 32^\circ}, \quad AB \approx \frac{410 \cdot 0,866}{0,5299} \approx 6701 \text{ м};$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC \cdot \sin \angle B,$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 4100 \cdot 6701 \cdot \sin 28^\circ = \frac{1}{2} \cdot 4100 \cdot 6701 \cdot 0,4695 \approx 6449072 \text{ м}^2$$

1059.

Дано: ABCD – выпуклый четырехугольник.



Доказать, что $S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BD \cdot \sin \alpha$.

$$S_{ABCD} = S_{AOB} + S_{BOC} + S_{COD} + S_{AOD}$$

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} BO \cdot AO \sin(180^\circ - \alpha) + \frac{1}{2} BO \cdot OC \sin \alpha +$$

$$+ \frac{1}{2} \cdot CO \cdot OD \cdot \sin(180^\circ - \alpha) + \frac{1}{2} DO \cdot AO \cdot \sin \alpha =$$

$$= \frac{1}{2} (AO \sin \alpha + OC \sin \alpha)(BO + DO) = \frac{1}{2} BD \sin \alpha \cdot (AO + OC) = \frac{1}{2} BD \cdot AC \sin \alpha$$

1060.

а) Дано: $AB=8 \text{ см}$, $\angle A=30^\circ$, $\angle B=45^\circ$.

Найти: $\angle C$, BC , AC .

$$\angle C = 180^\circ - (\angle A + \angle B) = 180^\circ - 75^\circ = 105^\circ$$

По теореме синусов:

$$\frac{8}{\sin 105^\circ} = \frac{BC}{\sin 30^\circ}, \quad BC \approx \frac{8 \cdot \frac{1}{2}}{0,9659} \approx 4,14 \text{ м};$$

$$\frac{8}{\sin 105^\circ} = \frac{AC}{\sin 45^\circ}, \quad AC \approx \frac{8 \cdot 0,7071}{0,9659} \approx 5,86 \text{ м}$$

б) Дано: $AB=5 \text{ см}$, $\angle B=45^\circ$, $\angle C=60^\circ$

Найти: $\angle A$, BC , AC .

$$\angle A = 180^\circ - (\angle B + \angle C) = 180^\circ - 105^\circ = 75^\circ$$

По теореме синусов:

$$\frac{5}{\sin 60^\circ} = \frac{BC}{\sin 75^\circ}, \quad BC \approx \frac{5 \cdot 0,9659}{0,8660} \approx 5,58 \text{ м}$$

$$\frac{5}{\sin 60^\circ} = \frac{AC}{\sin 45^\circ}, \quad AC \approx \frac{5 \cdot 0,9659}{0,8660} \approx 4,08 \text{ см}$$

в) Дано: $AB=3$ см, $BC=3,3$ см, $\angle A=48^\circ 30'$

Найти: AC , $\angle B$, $\angle C$.

По теореме синусов:

$$\frac{3,3}{\sin 48^\circ 30'} = \frac{3}{\sin \angle C}, \quad \sin \angle C \approx \frac{3 \cdot 0,749}{3,3} \approx 0,6809, \quad \angle C \approx 42^\circ 55';$$

$$\angle B \approx 180^\circ - (48^\circ 30' + 42^\circ 55') = 88^\circ 35'$$

По теореме синусов:

$$\frac{BC}{\sin \angle A} = \frac{AC}{\sin \angle B}, \quad \frac{3,3}{\sin 48^\circ 30'} = \frac{AC}{\sin 88^\circ 35'}, \quad AC \approx \frac{3,3 \cdot 0,9997}{0,749} \approx 4,40 \text{ см}$$

г) Дано: $AC=10,4$ см, $BC=5,2$ см, $\angle B=62^\circ 48'$

Найти: AB , $\angle A$, $\angle C$.

По теореме синусов:

$$\frac{10,4}{\sin 62^\circ 48'} = \frac{5,2}{\sin \angle A}, \quad \sin \angle A \approx \frac{5,2 \cdot 0,8894}{10,4} \approx 0,4447, \quad \angle A \approx 26^\circ 24';$$

$$\angle C \approx 180^\circ - (62^\circ 48' + 26^\circ 24') = 90^\circ 48';$$

$$\frac{AC}{\sin \angle B} = \frac{AB}{\sin \angle C}, \quad \frac{10,4}{\sin 62^\circ 48'} = \frac{AB}{\sin 90^\circ 48'}, \quad AB \approx \frac{10,4 \cdot 0,9999}{0,8894} \approx 11,69 \text{ см}$$

1061.

а) Дано: $AB=5$ см, $AC=7,5$ см, $\angle A=135^\circ$

Найти: BC , $\angle B$, $\angle C$

По теореме косинусов:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos \angle A$$

$$BC^2 = 25 + 56,25 - 75 \cdot \cos 135^\circ \approx 81,25 + 75 \cdot 0,7071 \approx 134,2825 \quad BC \approx 11,59 \text{ см}$$

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos \angle B$$

$$56,25 = 25 + 134,28 - 115,9 \cdot \cos \angle B$$

$$\cos \angle B \approx \frac{103,03}{115,9} = 0,88895 \quad \angle B \approx 27^\circ 15'$$

$$\angle C = 180^\circ - \angle A + \angle B \approx 180^\circ - (135^\circ + 27^\circ 15') = 17^\circ 45'$$

б) Дано: $AB=2\sqrt{2}$ дм; $BC=3$ дм; $\angle B=45^\circ$

Найти: AC , $\angle A$, $\angle C$

По теореме косинусов:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos \angle B = 8 + 9 - 2 \cdot 6\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 5 \quad AC = \sqrt{5} \text{ дм}$$

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2 \cdot AC \cdot BC \cdot \cos \angle C \quad 8 = 5 + 9 - 2\sqrt{5} \cdot 3 \cdot \cos \angle C$$

$$\cos \angle C = \frac{6}{6\sqrt{5}} \approx 0,4472 \quad \angle C \approx 63^\circ 26'$$

$$\angle A = 180^\circ - (\angle B + \angle C) \approx 180^\circ - (45^\circ + 63^\circ 26') = 71^\circ 34'$$

в) Дано: $AC = 0,6$ м, $BC = \frac{\sqrt{3}}{4}$ дм, $\angle C = 150^\circ$

Найти: AB , $\angle A$, $\angle B$

По теореме косинусов:

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2 \cdot AC \cdot BC \cdot \cos 150^\circ = 36 + \frac{3}{16} + 2 \cdot 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cos 30^\circ$$

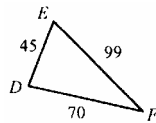
$$AB^2 = \frac{651}{16} = 40,6875 \quad AB \approx 6,4 \text{ дм}$$

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos \angle B \quad 36 = 40,6875 + \frac{3}{16} - 2 \cdot 6,4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cos \angle B$$

$$4,875 = 5,5426 \cdot \cos \angle B \quad \cos \angle B \approx 0,8796 \quad \angle B \approx 28^\circ 24'$$

$$\angle A = 180^\circ - (\angle B + \angle C) \approx 180^\circ - (28^\circ 24' + 150^\circ) = 1^\circ 36'$$

1062.



Дано: $\triangle DEF$, $DE = 4,5$ дм, $EF = 9,9$ дм, $DF = 70$ см

Найти: $\angle D$, $\angle E$, $\angle F$

По теореме косинусов:

$$EF^2 = DE^2 + DF^2 - 2 \cdot DE \cdot DF \cdot \cos \angle D$$

$$99^2 = 45^2 + 70^2 - 2 \cdot 45 \cdot 70 \cdot \cos \angle D \quad 9801 = 2025 + 4900 - 6300 \cos \angle D$$

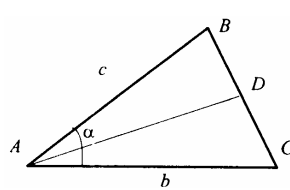
$$2876 = -6300 \cdot \cos \angle D \quad \cos \angle D \approx -0,4565, \quad \angle D = 117^\circ 10'$$

По теореме синусов:

$$\frac{99}{\sin 117^\circ 10'} = \frac{45}{\sin \angle F} \quad \sin \angle F \approx \frac{45 \cdot 0,8897}{99} \approx 0,4044 \quad \angle F \approx 23^\circ 51'$$

$$\angle E = 180^\circ - (\angle D + \angle F) \approx 180^\circ - (117^\circ 10' + 23^\circ 51') = 38^\circ 59'$$

1063.



Дано: $\triangle ABC$, AD — биссектриса,

$\angle A = a$, $AB = c$, $AC = b$

Найти AD .

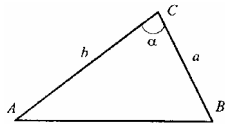
$$S_{ABC} = S_{ABD} + S_{ADC}$$

$$\frac{1}{2} ab \sin a = \frac{1}{2} c \cdot AD \sin \frac{a}{2} + \frac{1}{2} b \cdot AD \cdot \sin \frac{a}{2}$$

$$ab \sin a = AD \cdot (c \cdot \sin \frac{a}{2} + b \cdot \sin \frac{a}{2})$$

$$AD = \frac{ab \sin a}{\sin \frac{a}{2} (c + b)} = \frac{2ab \sin \frac{a}{2} \cos \frac{a}{2}}{\sin \frac{a}{2} (c + b)} = \frac{2ab \cos \frac{a}{2}}{c + b}$$

1064.



Дано: $AC=b$, $BC=a$, $\angle ACB=\alpha$

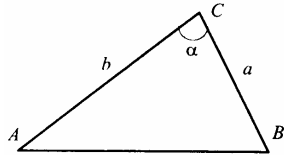
Найти: AB .

По теореме косинусов:

$$AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2 \cdot BC \cdot AC \cdot \cos \angle C$$

$$AB^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha \quad AB = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \alpha}$$

1065.



Дано: $A(3; 0)$, $B(1; 5)$, $C(2; 1)$

Доказать: $\triangle ABC$ – тупоугольный

$$AB = \sqrt{(3-1)^2 + (0-5)^2} = \sqrt{4+25} = \sqrt{29}$$

$$BC = \sqrt{(1-2)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{1+16} = \sqrt{17}$$

$$AC = \sqrt{(3-2)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

По теореме косинусов: $AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2 \cdot BC \cdot AC \cdot \cos \angle C$

$$29 = 17 + 2 - 2 \cdot \sqrt{34} \cdot \cos \angle C \quad 10 = -2 \cdot \sqrt{34} \cdot \cos \angle C \quad \cos \angle C = -\frac{5\sqrt{34}}{34} < 0,$$

т.е. $\angle C$ – тупой $\Rightarrow \triangle ABC$ – тупоугольный, ч.т.д.

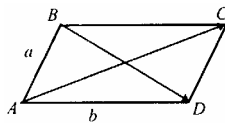
1066.

Дано: $3\vec{i} - 4\vec{j}$

Найти: $|\vec{a}|$

Так как $\vec{a} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$, то $\vec{a} \{3; -4\}$ $|\vec{a}| = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$

1067.



Дано: $|\vec{p}| = 2\sqrt{2}$; $|\vec{q}| = 3$, $(\vec{p}, \vec{q}) = 45^\circ$,

$\vec{a} = 5\vec{p} + 2\vec{q}$; $\vec{b} = \vec{p} - 3\vec{q}$, $\triangle ABC$ – тупоугольный

Найти: AC , BD

$$\vec{AC} = \vec{a} + \vec{b} = 5\vec{p} + 2\vec{q} + \vec{p} - 3\vec{q} = 6\vec{p} - \vec{q}$$

$$|AC| = \sqrt{(6p)^2 + q^2 - 12pq \cos 45^\circ} = \sqrt{288 + 9 - 12 \cdot 2\sqrt{2} \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{225} = 15$$

$$\vec{BD} = \vec{b} - \vec{a} = \vec{p} - 3\vec{q} - 5\vec{p} - 2\vec{q} = -4\vec{p} - 5\vec{q}$$

$$|BD| = \sqrt{16p^2 + 20q^2 - 40pq \cos 45^\circ} = \sqrt{593} \approx 23,4$$

1068.

Дано: $|\vec{a}|=2$; $|\vec{b}|=5$; $(\vec{a}; \vec{b})=120^\circ$; $\vec{p}=x\vec{a}+17\vec{b}$; $\vec{q}=3\vec{a}-\vec{b}$; $\vec{p} \perp \vec{q}$

Найти: x

$$\begin{aligned} \vec{p} \cdot \vec{q} &= (x\vec{a}+17\vec{b}) \cdot (3\vec{a}-\vec{b}) = 3x\vec{a}^2 - x\vec{a}\vec{b} + 51\vec{a}\vec{b} - 17\vec{b}^2 = \\ &= 12x - 10x \cdot \cos 120^\circ + 51 \cdot 10 \cdot \cos 120^\circ - 17 \cdot 25 = 12x + 5x - 255 - 425 = 17x - 680 \\ \text{т.к. } \vec{p} \perp \vec{q}, \text{ то } \vec{p} \cdot \vec{q} &= 0; 17x - 680 = 0, 17x = 680, x = 40 \end{aligned}$$

1069.

Дано: $\triangle ABC$; $\angle C=90^\circ$, $AC=BC$; AA_1, BB_1 , – медианы

Найти: $\angle AOB, \angle BOA_1$

Пусть $BC=CA=2a$, из $\triangle CBA_1$:

$$BB_1 = \sqrt{BC^2 + CB_1^2} = \sqrt{4a^2 + a^2} = a\sqrt{5},$$



откуда $AA_1 = a\sqrt{5}$

$$\vec{BB}_1 = \vec{CB}_1 - \vec{CB} \quad \vec{AA}_1 = \vec{CA}_1 - \vec{CA}$$

$$\vec{BB}_1 \cdot \vec{AA}_1 = (\vec{CB}_1 - \vec{CB}) \cdot (\vec{CA}_1 - \vec{CA}) =$$

$$= \underbrace{\vec{CB}_1 \cdot \vec{CA}_1}_{=0} - \vec{CB}_1 \cdot \vec{CA} - \vec{CB} \cdot \vec{CA}_1 + \underbrace{\vec{CB} \cdot \vec{CA}}_{=0} = -2a^2 - 2a^2 = -4a^2$$

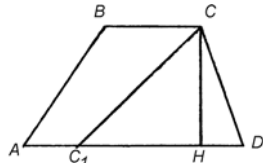
$$\cos \angle AOB = \frac{|\vec{BB}_1 \cdot \vec{AA}_1|}{|\vec{BB}_1| \cdot |\vec{AA}_1|} = \frac{4a^2}{a\sqrt{5} \cdot a\sqrt{5}} = \frac{4}{5} = 0,8$$

$$\angle AOB \approx 36^\circ 51'; \quad \angle BOA_1 \approx 180^\circ - 36^\circ 51' \approx 143^\circ 09'$$

1070.

Дано: $ABCD$ — трапеция; $AD=16$ см, $BC=8$ см, $CD=4\sqrt{7}$ см, $\angle ADC=60^\circ$. $S_{ABCC_1} = S_{CC_1D}$.

Найти: S_{ABCD}, CC_1 .



$$\sin 60^\circ = \frac{BH}{4\sqrt{7}} \quad BH = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{7} = 2\sqrt{21}$$

$$S = \frac{16+8}{2} \cdot 2\sqrt{21} = 24\sqrt{21} \quad \frac{S}{2} = 12\sqrt{21}$$

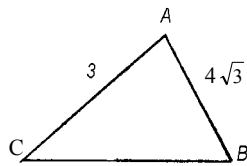
т. C_1 лежит на стороне AD , т.к.

$$S_{ACO} = \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot 4\sqrt{7} \sin 60^\circ = 32 \cdot \frac{\sqrt{21}}{2} = 16\sqrt{21} > 12\sqrt{21}$$

т.е. $AC_1 = 16 - 12 = 4$. Из треугольника CC_1D :

$$CC_1 = \sqrt{12\sqrt{2} + (4\sqrt{7})^2} - 2 \cdot 12 \cdot 4\sqrt{7} \cdot \cos 60^\circ = 4\sqrt{16 - 3\sqrt{7}}$$

1071.



Дано: $S_{ABC} = 3\sqrt{3}$ $\angle A$ – острый; $AB = 4\sqrt{3}$,
 $AC = 3$.

Найти: R описанной окружности.

$$S = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin \angle A = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4\sqrt{3} \cdot \sin \angle A = 3\sqrt{3};$$

$$\sin \angle A = \frac{1}{2}, \quad \angle A = 30^\circ.$$

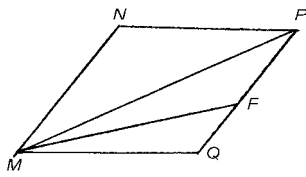
По теореме косинусов:

$$CB^2 = AC^2 + AB^2 - 2 \cdot AC \cdot AB \cdot \cos \angle A$$

$$CB = \sqrt{9 + 48 - 2 \cdot 3 \cdot 4\sqrt{3} \cdot \cos 30^\circ} = \sqrt{57 - 36} = \sqrt{21}$$

$$\frac{CB}{\sin A} = 2R, \quad \frac{\sqrt{21}}{1/2} = 2R, \quad R = \sqrt{21}$$

1072.



$\angle M = 4\alpha \Rightarrow$ по св-ву ромба

$$\angle FMQ = \angle FMP = \alpha$$

$$\angle Q = 180^\circ - 4\alpha \quad \angle QMP = 2\alpha$$

Из $\triangle MFQ$:

$$\frac{FQ}{\sin \angle FMQ} = \frac{MF}{\sin \angle Q}$$

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{MF}{\sin 4\alpha}, \quad MF = \frac{a \sin 4\alpha}{\sin \alpha}$$

Из $\triangle MPF$:

$$\frac{MF}{\sin \angle QMP} = \frac{FP}{\sin \angle PMF}$$

$$FP = \frac{a \sin 4\alpha}{\sin \alpha} \cdot \frac{1}{\sin 2\alpha} = \frac{a \sin 4\alpha}{\sin 2\alpha} = 2a \cos 2\alpha$$

$$PQ = a(2 \cos 2\alpha + 1)$$

$$S = PQ^2 \sin 4\alpha = a^2 (4 \cos^2 2\alpha + 1 + 4 \cos 2\alpha) \sin 4\alpha$$

ГЛАВА XII.
ДЛИНА ОКРУЖНОСТИ И ПЛОЩАДЬ КРУГА

1078.

- а) верно (по определению выпуклого многоугольника);
б) неверно (т.к. правильным является только тот многоугольник, углы и стороны которого равны).

1079.

- а) неверно (т.к. углы должны быть тоже равны);
б) верно (т.к. если все углы треугольника равны, то и стороны равны);
в) верно (т.к. из равенства сторон треугольника вытекает равенство углов);
г) неверно (например ромб).

1080.

Четырехугольник называется правильным, если все его стороны и все углы равны, а это только квадрат.

1081.

$$\alpha = \frac{n-2}{n} \cdot 180^\circ$$

- а) $n=3$, $\alpha = \frac{3-2}{3} \cdot 180^\circ = 60^\circ$
б) $n=6$, $\alpha = \frac{6-2}{6} \cdot 180^\circ = 4 \cdot 30^\circ = 120^\circ$.
в) $n=5$, $\alpha = \frac{5-2}{5} \cdot 180^\circ = 3 \cdot 36^\circ = 108^\circ$
г) $n=10$, $\alpha = \frac{10-2}{10} \cdot 180^\circ = 8 \cdot 18^\circ = 144^\circ$
д) $n=18$, $\alpha = \frac{18-2}{18} \cdot 180^\circ = 16 \cdot 10^\circ = 160^\circ$

1082.

360° .

1083.

$$\alpha = \frac{n-2}{n} \cdot 180^\circ \quad n = \frac{360^\circ}{180^\circ - \alpha}$$

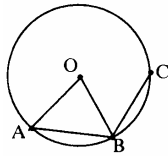
а) $\alpha=60^\circ$, $n = \frac{360}{180-60} = 3$

б) $\alpha=90^\circ$, $n = \frac{360^\circ}{90^\circ} = 4$

в) $\alpha=135^\circ$, $n = \frac{360^\circ}{180^\circ - 135^\circ} = \frac{360^\circ}{45^\circ} = 8$

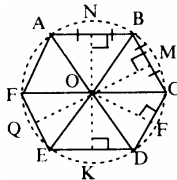
г) $\alpha=150^\circ$, $n = \frac{360^\circ}{180^\circ - 150^\circ} = \frac{360^\circ}{30^\circ} = 12$

1084.



- | | | |
|--------------------|---------------------------|---------|
| а) $AB=60^\circ$, | $360^\circ/60^\circ=6$, | $n=6$ |
| б) $AB=30^\circ$, | $360^\circ/30^\circ=12$, | $n=12$ |
| в) $AB=90^\circ$, | $360^\circ/90^\circ=4$, | $n=4$ |
| г) $AB=36^\circ$, | $360^\circ/36^\circ=10$, | $n=10$ |
| д) $AB=18^\circ$, | $360^\circ/18^\circ=20$, | $n=20$ |
| е) $AB=72^\circ$, | $360^\circ/72^\circ=5$, | $n=5$. |

1085.



Дано: ABCDEF — правильный; NO, MO, KO — серединные перпендикуляры к сторонам.

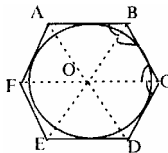
Доказать: $NO \cap OM$; ON, OK — совпадают

Так как ABCDEF — правильный 6-угольник, то каждый угол равен 120° , следовательно

$$\angle NOM = \angle MOF = \dots = \angle KOQ = 60^\circ.$$

Так как серединные перпендикуляры к сторонам правильного 6-угольника проходят через центр окружности, вписанной в него, то угол между ними: $\angle NOM=60^\circ$, $\angle NOF=120^\circ$, $\angle NOK=180^\circ$, т.е. они пересекаются или лежат на одной прямой. Ч.т.д.

1086.



Дано: ABCDEF – правильный 6-угольник

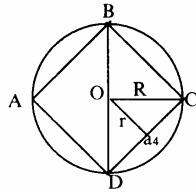
Доказать: биссектрисы углов пересекаются или совпадают.

Так как $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = \angle E = \angle F = 120^\circ$, то

$$\frac{1}{2} \angle A = \frac{1}{2} \angle B = \dots = \frac{1}{2} \angle F = 60^\circ$$

Так как биссектрисы пересекаются в центре вписанной окружности
 $\angle COD=60^\circ$ $\angle COE=120^\circ$ $\angle COF=180^\circ$
 то биссектрисы или пересекаются или лежат на одной прямой.

1087.



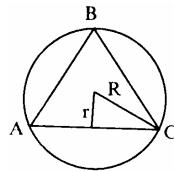
$$a_n = 2R \sin \frac{180^\circ}{n}$$

$$r = R \cos \frac{180^\circ}{n}$$

$$S = \frac{1}{2} P r$$

№	R	r	a ₄	P	S
1	$3\sqrt{2}$	3	6	24	36
2	$3\sqrt{2}$	2	4	16	16
3	4	$2\sqrt{2}$	$4\sqrt{2}$	$16\sqrt{2}$	32
4	$\frac{7\sqrt{2}}{2}$	3,5	7	28	49
5	$2\sqrt{2}$	2	4	16	16

1088.



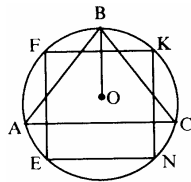
$$a_3 = R \sqrt{3},$$

$$R = \frac{a_3}{\sqrt{3}} \quad r = \frac{1}{2} R$$

$$P = 3 \cdot a_3; \quad S = \frac{a_3^2 \sqrt{3}}{4}$$

№	R	r	a ₃	P	S
1	3	1,5	$3\sqrt{3}$	$9\sqrt{3}$	$\frac{27\sqrt{3}}{4}$
2	$\frac{2}{3}\sqrt{10\sqrt{3}}$	$\frac{1}{3}\sqrt{10\sqrt{3}}$	$2\sqrt{\frac{10\sqrt{3}}{3}}$	$6\sqrt{\frac{10\sqrt{3}}{3}}$	10
3	4	2	$4\sqrt{3}$	$12\sqrt{3}$	$12\sqrt{3}$
4	$\frac{5\sqrt{3}}{3}$	$\frac{5\sqrt{3}}{6}$	5	15	$\frac{25\sqrt{3}}{4}$
5	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	2	6	$\sqrt{3}$

1089.



Дано: $\triangle ABC$, $AB=BC=AC$; $FKNE$ — вписанный квадрат; $P_{ABC}=18$ см.

Найти: FK .

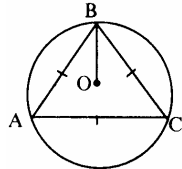
Так как $\triangle ABC$ — равносторонний, то $AB=18:3=6$ см

$$R=OB=\frac{AB}{\sqrt{3}}=\frac{6}{\sqrt{3}}=2\sqrt{3}$$

Так как $FKNE$ — вписанный квадрат, то $FK=R\sqrt{2}$.

$$FK=2\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}=2\sqrt{6}$$

1090.



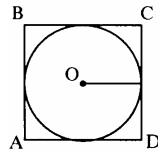
Дано: ABC , $AB=BC=AC=3$ см

Найти: d

$$a_3=R\sqrt{3}$$

$$R=\frac{a_3}{\sqrt{3}}=\frac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3} \quad d=2R=2\sqrt{3} \text{ см}$$

1091.



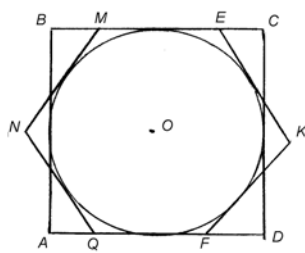
Дано: $ABCD$ — квадрат; описан около Окр (O ; r), $AB=6$ см

Найти: d

Решение:

$$AB=2r=d=6 \text{ см}$$

1092.



Дано: $ABCD$ — квадрат; $NMEKFQ$ — правильный 6-угольник описанный около Окр (O ; r); $P_{NMEKFQ}=48$ см

Найти: P_{ABCD}

$$P_{NMEKFQ}=6\cdot a$$

$$48=6\cdot a \quad a=8 \text{ см}$$

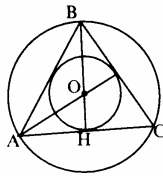
т.е. в $\triangle OQF$:

$$\angle OQF = \frac{360^\circ}{6} = 60^\circ, \quad \frac{1}{2}QF = 4 \text{ см,}$$

$$R = \sqrt{64 - 16} = 4\sqrt{3},$$

$$P_{ABCD} = 2 \cdot 4\sqrt{3} \cdot 4 = 32\sqrt{3}.$$

1093.



Дано: $\triangle ABC$ — правильный, Окр (O; R) — описанная, Окр (O; r) — вписанная.

Доказать: $R=2r$

Так как $\triangle ABC$ — правильный, то центры вписанной и описанной окружностей совпадают. O — точка пересечения биссектрис, которые в равнос-тороннем треугольнике являются и медианами; по свойству медиан $BO:OH=2:1$, а т.к. $BO=R$, $OH=r$, то $R:r=2:1$, $R=2r$. Ч.т.д.

1094.

а) $n=4$, $R=3\sqrt{2}$ см

$$a_4=R\sqrt{2}=3\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=6\text{ см}, \quad r_4=3\text{ см} \quad P_4=4\cdot a_4=24\text{ см}$$

$$S_4=\frac{1}{2}P\cdot r=\frac{1}{2}\cdot 24\cdot 3=36\text{ см}^2.$$

б) $n=3$, $P=24$ см

$$r=\frac{a_3}{2\sqrt{3}}=\frac{8}{2\sqrt{3}}=\frac{4\sqrt{3}}{3}\text{ см}$$

$$S_3=\frac{1}{2}P\cdot r=\frac{1}{2}\cdot 24\cdot \frac{4\sqrt{3}}{3}=16\sqrt{3}\text{ см}^2.$$

в) $n=6$, $r=9$ см

$$a_6=R=\frac{2r}{\sqrt{3}}=\frac{2\cdot 6}{\sqrt{3}}=6\sqrt{3}\text{ см} \quad P_6=6\cdot a_6=36\sqrt{3}\text{ см}$$

$$S_6=\frac{1}{2}\cdot 36\sqrt{3}\cdot 9=162\sqrt{3}\text{ см}^2.$$

г) $n=8$, $r=5\sqrt{3}$ см

$$a_8=2R\sin\frac{45^\circ}{2}=2\frac{r}{\cos\frac{45^\circ}{2}}\cdot\sin\frac{45^\circ}{2}=2r\cdot\text{tg}\frac{45^\circ}{2}$$

$$r=R\cdot\cos\frac{45^\circ}{2}, \quad R=\frac{r}{\cos\frac{45^\circ}{2}}$$

$$\text{tg}\frac{45^\circ}{2}=\text{tg}22,5^\circ\approx 0,4142 \quad a_8\approx 2\cdot 5\sqrt{3}\cdot 0,4142\approx 7,1742\text{ см}$$

$$P_8=8\cdot a_8=8\cdot 7,1742\approx 57,3932$$

$$S_8\approx \frac{1}{2}\cdot 57,3932\cdot 5\sqrt{3}\approx 248,52\text{ см}^2$$

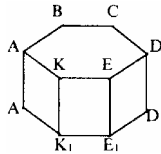
1095.

Дано: ABCDEK – правильный, 6-угольник, AA₁=1,5 см

Найти: S_{ABCDEK}

Так как АКК₁A₁ – квадрат, то АК=AA₁=1,5 см, т.е.

a₆=1,5 см



$$r = a_6 \cdot \cos 30^\circ = a_6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 1,5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4} \text{ см}$$

$$S_{ABCDEK} = \frac{1}{2} P_{ABCDEK} \cdot r = \frac{1}{2} \cdot (6 \cdot \frac{3}{2}) \cdot \frac{3\sqrt{3}}{4} = \frac{27\sqrt{3}}{8} \text{ см.}$$

1096.

Дано: правильные треугольник, квадрат, шестиугольник,
a₃=a₄=a₆=a.

Найти: S₃:S₄:S₆

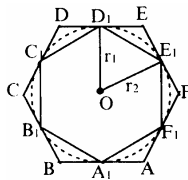
$$P_3 = 3a, \quad r = \frac{a\sqrt{3}}{6}, \quad S_3 = \frac{1}{2} \cdot 3a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{6} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4};$$

$$S_4 = a^2;$$

$$P_6 = 6a; \quad S_6 = \frac{1}{2} \cdot 6a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2 3\sqrt{3}}{2}$$

$$S_3:S_4:S_6 = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} : a^2 : \frac{a^2 3\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} : 4 : 6\sqrt{3}$$

1097.



Дано: ABCDEF – описанный правильный 6-угольник; A₁B₁C₁D₁E₁F₁ – вписанный правильный 6-угольник.

Найти: S₁:S₂

A₁B₁C₁D₁E₁F₁ – вписанный в окружность, то

A₁B₁=B₁C₁=...=F₁A₁=R

$$S_{A_1B_1C_1D_1E_1F_1} = 6S_{\triangle A_1OB_1} =$$

$$= 6 \left[\frac{1}{2} OA_1 \cdot OB_1 \cdot \sin \angle A_1OB_1 \right] = 3 \cdot R \cdot R \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}R^2}{2}$$

OA – биссектриса ∠A₁OF₁ ⇒ ∠A₁OA=30°; A₁A=x, получим OA=2x. По теореме Пифагора:

$$A_1A^2 + OA_1^2 = OA^2; \quad x^2 + R^2 = 4x^2;$$

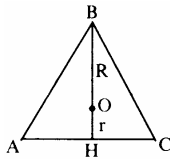
$$3x^2 = R^2 \Rightarrow x = \frac{R\sqrt{3}}{3}; \quad AB = \frac{2\sqrt{3}R}{3}$$

$$S_{ABCDEF} = 6S_{\Delta AOB} = 6 \cdot \left[\frac{1}{2} OA \cdot OB \cdot \sin \angle 60^\circ \right] =$$

$$= 3 \cdot \left(\frac{2\sqrt{3}R}{3} \right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{4 \cdot 3 \cdot R^2 \cdot \sqrt{3}}{3 \cdot 2} = 2\sqrt{3}R^2$$

$$S_{A_1B_1C_1D_1E_1F_1} : S_{ABCDEF} = \frac{3\sqrt{3}R^2}{2} : 2\sqrt{3}R^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2 \cdot 2\sqrt{3}} = \frac{3}{4}$$

1098.



Дано: ΔABC – правильный, r – радиус вписанной окружности, R – радиус описанной окружности.

Выразить: AB , P , S через r и R

Решение:

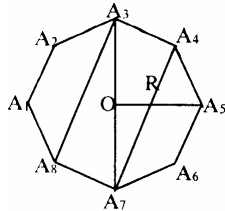
$$AB = R\sqrt{3} \quad P_{\Delta} = 3\sqrt{3}R$$

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} (R\sqrt{3})^2 \cdot \sin 60^\circ = \frac{3R^2}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}R^2}{4}$$

$$AB = 2\sqrt{3}r \quad P_{\Delta} = 6\sqrt{3}r$$

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} (2\sqrt{3}r)^2 \cdot \sin 60^\circ = \frac{12r^2}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}r^2$$

1099.



Дано: $A_1 \dots A_8$ – правильный восьмиугольник вписан в Окр (O; R)

Доказать: $A_3A_4A_7A_8$ — прямоугольник;

$S_{A_3A_4A_7A_8}$

Доказательство:

Так как в 4-угольнике $A_3A_4A_7A_8$:

$A_3A_7 = A_4A_8$, то $A_3A_4A_7A_8$ — прямоугольник

В ΔA_8OA : $\angle OA_8A_7 = \angle OA_7A_8 = 67^\circ 30'$, то $\angle A_7OA_8 = 45^\circ$

$$A_8A_7^2 = A_8O^2 + A_7O^2 - 2A_8O \cdot A_7O \cdot \cos 45^\circ$$

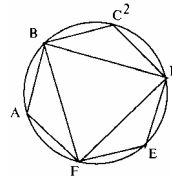
$$A_8A_7^2 = R^2 + R^2 - 2R^2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 2R^2 \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = R^2(2 - \sqrt{2})$$

$A_8A_7 = R\sqrt{2 - \sqrt{2}}$ – длина стороны.

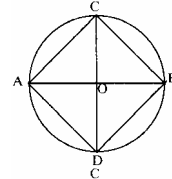
$$S_{A_3A_4A_7A_8} = 4 \left(\frac{1}{2} R^2 \cdot \sin 45^\circ \right) = 4 \cdot \left(\frac{1}{2} R^2 \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = R^2 \sqrt{2}.$$

1100.

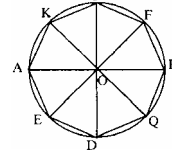
- а) Построить Окр(О; R) и разделить ее на 6 равных частей циркулем радиуса R. ABCDEF – искомый.
 б) См. рисунок. ΔBDF – искомый.



- в) построить два взаимно перпендикулярных диаметра $AB \perp CD$. ABCD – искомый



- г) построить два взаимно перпендикулярных диаметра $AB \perp CD$, затем биссектрисы прямых углов EF и KQ. AKCFBQDE – искомый.



1101.

$C=2\pi R, \pi=3,14$

C	25,12	18,84	82	18π	4,4	6,28	637,42	14,65	$2\sqrt{2}$
R	4	3	13,06	9	0,7	1	101,5	$2\frac{1}{3}$	0,45

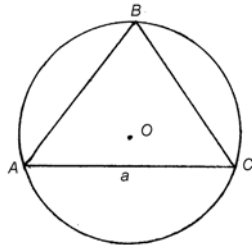
1102.

- а) C – увеличится в 3 раза; б) C – уменьшится в 2 раза;
 в) C – увеличится в k раза; г) C – уменьшится в k раза.

1103.

- а) если C – увеличится в k раз, то R – увеличится в k раз;
 б) если C – уменьшится в k раз, то R – уменьшится в k раз.

1104.



- а) Дано: ΔABC – вписан в Окр(О; R);
 $AB=BC=AC=a$
 Найти: C

$$AB = R\sqrt{3}, \quad R = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{3},$$

$$C = 2\pi R = 2\pi \frac{a\sqrt{3}}{3} = \frac{2\pi a\sqrt{3}}{3};$$

б) Дано: $\triangle ABC$ – вписан в $\text{Окр}(O; R)$; $AC=b$, $BC=a$, $\angle C=90^\circ$;

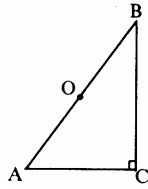
Найти: C

Решение:

O – на середине AB ;

$$AB = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad R = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2}.$$

$$C = 2\pi R = \pi \sqrt{a^2 + b^2};$$



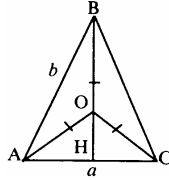
в) Дано: $\triangle ABC$ – вписан в $\text{Окр}(O; R)$; $AB=BC=b$, $AC=a$

Найти: C

Решение:

$$BH^2 = AB^2 - AH^2 = b^2 - \frac{a^2}{4},$$

$$BH = \frac{1}{2} \sqrt{4(b^2 - a^2)}$$



Пусть $AO=R$, тогда

$$HO = \frac{1}{2} \sqrt{4b^2 - a^2} - R$$

По теореме Пифагора: $AO^2 = AH^2 + OH^2$

$$R^2 = \left(\frac{1}{2} \sqrt{4b^2 - a^2} - R\right)^2 + \frac{1}{4} a^2 = \frac{1}{4} (4b^2 a^2) - R \sqrt{4b^2 - a^2} + R^2 + \frac{1}{4} a^2$$

$$R \sqrt{4b^2 - a^2} = b^2 \quad R = \frac{b^2}{\sqrt{b^2 - a^2}},$$

$$C = 2\pi R = \frac{2\pi b^2}{\sqrt{b^2 - a^2}}$$

г) Дано: $ABCD$ – прямоугольник вписан в $\text{Окр}(O; R)$; $AB=a$, $\angle AOB = \alpha$

Найти: C

Решение:

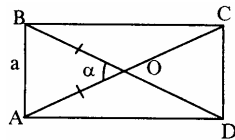
По теореме косинусов:

$$AB^2 = AO^2 + BO^2 - 2 \cdot AO \cdot BO \cdot \cos \angle AOB$$

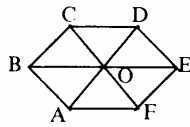
$$a^2 = R^2 + R^2 - 2R^2 \cos \alpha = 2R^2(1 - \cos \alpha)$$

$$R^2 = \frac{a^2}{2(1 - \cos \alpha)} \quad R = \frac{a}{\sqrt{2(1 - \cos \alpha)}} = \frac{a}{2 \sin \frac{\alpha}{2}},$$

$$C = 2\pi R = 2\pi \frac{a}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{\pi a}{\sin \frac{\alpha}{2}}$$



д) Дано: ABCDEF – правильный 6-угольник; $S=24\sqrt{3}$ см²



Найти: C

Решение:

$$S = 6 \cdot S_{\Delta OAB}$$

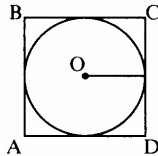
$$S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2} R^2 \sin 60^\circ = \frac{R^2 \sqrt{3}}{4} \quad 24\sqrt{3} = \frac{6R^2 \sqrt{3}}{4}$$

$$6R^2 = 96, \quad R = 4 \text{ см}$$

$$C = 2\pi R = 24 = 8\pi.$$

1105.

а) Дано: ABCD – квадрат описанный около Окр(O; r); AB=a



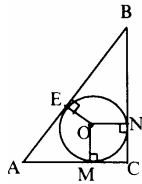
Найти: C

Решение:

$$r = \frac{a}{2}$$

$$C = 2\pi r = \pi a$$

б) Дано: ΔABC – описан около Окр(O; r); $\angle C=90^\circ$, AC=BC, AB=c



Найти: C

Решение:

Т.к. CA и CB — касательные, то MC=CN=r

$$AC^2 + BC^2 = AB^2,$$

$$2AC^2 = c^2, \quad AC = \frac{c\sqrt{2}}{2}$$

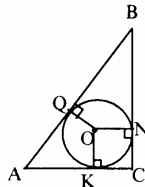
$$AM = BN = \frac{c\sqrt{2}}{2} - r,$$

$$AB = AE + EB$$

$$c = 2\left(\frac{c\sqrt{2}}{2} - r\right) = c\sqrt{2} - 2r \quad r = \frac{c(\sqrt{2}-1)}{2},$$

$$C = 2\pi r = 2\pi \frac{c(\sqrt{2}-1)}{2} = \pi c(\sqrt{2}-1).$$

в) Дано: ΔABC – описанный около Окр(O; r), $\angle C=90^\circ$, AB=c, $\angle A=\alpha$



Найти: C

Решение:

$$BC = c \cdot \sin \alpha, \quad AC = c \cdot \cos \alpha$$

Так как CB и CA — касательные, то CK=CN=r,

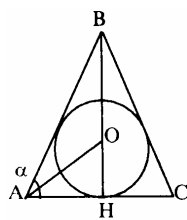
BN=BC-r, AK=c·cosα-r, AB=c, и

$$c \cdot \sin \alpha - r + c + c \cdot \cos \alpha - r = c \quad c(\sin \alpha + \cos \alpha - 1) = 2r,$$

$$r = \frac{c(\sin \alpha + \cos \alpha - 1)}{2}$$

$$C = 2\pi r = \pi c(\sin \alpha + \cos \alpha - 1).$$

г) Дано: $\triangle ABC$ – описан около $\text{Окр}(O; r)$, $AB=BC$, $\angle A = \alpha$, $BH \perp AC$, $BH=h$



Найти: C

Решение:

$$AH = \frac{BH}{\operatorname{tg} \angle A} = \frac{h}{\operatorname{tg} \alpha}. \text{ Пусть } HO=r, \text{ тогда}$$

$$r = AH \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{h \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{\operatorname{tg} \alpha}$$

$$C = 2\pi r = \frac{2\pi h \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{\operatorname{tg} \alpha}$$

1106.

$$C = 2\pi r \quad 500 \cdot 2\pi r = 989$$

$$2r = d = \frac{989}{500\pi} \approx 0,63 \text{ м.}$$

1107.

$$1 \text{ м} = \frac{1}{40000000}, \text{ экватор} = 40000 \text{ км}$$

$$C = 2\pi R = 40000$$

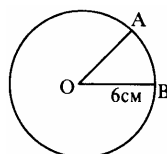
$$2R = \frac{40000}{\pi} \approx 12739$$

1108.

$$R = 6370 + 320 = 6690 \text{ км}$$

$$C = 2\pi R = 2\pi \cdot 6690 \approx 42013,2 \text{ км}$$

1109.



Дано: $\text{Окр}(O; 6 \text{ см})$; а) $\angle AOB = 30^\circ$, б) $\angle AOB = 45^\circ$,
в) $\angle AOB = 60^\circ$, г) $\angle AOB = 90^\circ$.

Найти: C

Решение:

$$l = \frac{\pi R}{180} \cdot \alpha,$$

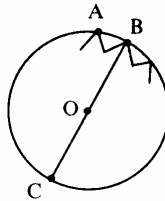
$$a) l = \frac{\pi \cdot 6 \cdot 30}{180} = \pi \text{ см};$$

$$б) l = \frac{\pi \cdot 6 \cdot 45}{180} = \frac{3}{2} \pi \text{ см};$$

$$в) l = \frac{\pi \cdot 6 \cdot 60}{180} = 2\pi \text{ см}$$

$$г) l = \frac{\pi \cdot 6 \cdot 90}{180} = 3\pi \text{ см}.$$

1110.



Дано: $AB=47,1$ мм; $d=450$ мм

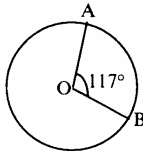
Найти: число зубьев

Решение:

$$C=2\pi r \quad C \approx 3,14 \cdot 450 = 1413$$

$$1413 : 47,1 = 30$$

1111.



Дано: Окр(O; R), $d=58$ см, $\angle AOB=117^\circ$

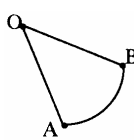
Найти: число зубьев

Решение:

$$R = \frac{1}{2} d = 29 \text{ см},$$

$$l = \frac{\pi R}{180^\circ} \cdot \alpha = \frac{\pi \cdot 29 \cdot 117^\circ}{180^\circ} \approx 59,189 \text{ см}$$

1112.



Дано: $\angle AOB=38^\circ$, $AB=24$ см

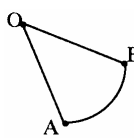
Найти: AO

Решение:

$$l = \frac{\pi R}{180} \cdot \alpha \quad l = 24 \text{ см},$$

$$R = \frac{24 \cdot 180}{\pi \cdot 38} \approx 36,21$$

1113.



Дано: $AB=400$ м, $AO=5$ км

Найти: $\angle AOB$

Решение:

$$l = \frac{\pi R}{180} \cdot \alpha \quad 400 = \frac{\pi \cdot 5000 \cdot \alpha}{180}$$

$$\alpha = \frac{400 \cdot 180}{\pi \cdot 5000} \approx 4^\circ 35'$$

1114.

$$S = \pi R^2, \quad R = \sqrt{\frac{S}{\pi}}$$

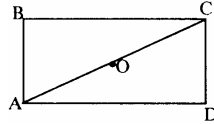
S	12,56	78,5	9	0,26	49π	9258,26	9,42	6,25
R	2	5	1,69	$\frac{2}{7}$	7	54,3	$\sqrt{3}$	1,41

1115.

а) S – увеличится в k^2 раз.

б) S – уменьшится в k^2 раз.

1116.



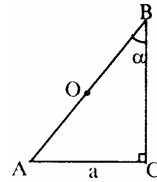
а) Дано: ABCD – прямоугольник вписан в круг (O; R), AB=a, BC=b.

Найти: S круга

Решение:

$$R = \frac{1}{2} AC, \quad AC = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \text{т.е. } R = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2}$$

$$S = \pi R^2 = \pi \frac{a^2 + b^2}{4}$$



б) Дано: $\triangle ABC$ – вписан в круг (O; R), $\angle C = 90^\circ$, AC=a, $\angle B = \alpha$

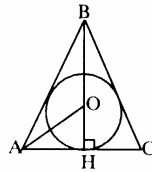
Найти: S круга

Решение:

$$R = \frac{1}{2} AB, \quad AB = \frac{a}{\sin \alpha}, \quad \text{т.е.}$$

$$R = \frac{a}{2 \sin \alpha}$$

$$S = \pi R^2 = \frac{\pi a^2}{4 \sin^2 \alpha}$$



в) Дано: $\triangle ABC$ – вписан в круг, AB=BC, AC=a, $BH \perp AC$, BH=h

Найти: S круга

Решение:

AO=R, то OH = h-R. По теореме Пифагора:

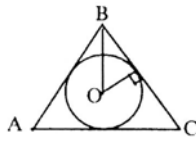
$$AO^2 = OH^2 + AH^2$$

$$R^2 = (h-R)^2 + \frac{a^2}{4} = h^2 - 2hR + R^2 + \frac{a^2}{4} \quad 2hR = h^2 + \frac{a^2}{4},$$

$$R = \frac{4h^2 + a^2}{8h}$$

$$S = \pi R^2 = \frac{\pi(4h^2 + a^2)^2}{64h^2}$$

1117.



а) Дано: $\triangle ABC$ – описан около круга (O; r),
 $AB=BC=AC=a$

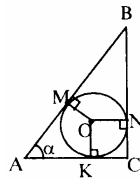
Найти: Скруга

Решение:

$$AB = r \cdot 2\sqrt{3},$$

$$r = \frac{a}{2\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

$$S = \pi r^2 = \frac{\pi a^2}{12}.$$



б) Дано: $\triangle ABC$ – описан около круга (O; r),
 $\angle C=90^\circ$, $AC=a$, $\angle A=\alpha$

Найти: Скруга

Решение:

$$AB = \frac{a}{\cos \alpha}; \quad BC = a \operatorname{tg} \alpha$$

Так как CB и CA – касательные, то $NC=KC=r$, т.е.

$$BN=BM=a \operatorname{tg} \alpha - r \quad AK=AM=a-r,$$

получим $AM+MB=AB$

$$a \operatorname{tg} \alpha - r + a - r = \frac{a}{\cos \alpha},$$

$$2r = a(\operatorname{tg} \alpha + 1) - \frac{a}{\cos \alpha} = \frac{a(\sin \alpha + \cos \alpha - 1)}{\cos \alpha}, \quad r = \frac{a(\sin \alpha + \cos \alpha - 1)}{2 \cos \alpha}$$

$$S = \pi R^2 = \frac{\pi a^2 (\sin \alpha + \cos \alpha - 1)^2}{4 \cos^2 \alpha}.$$

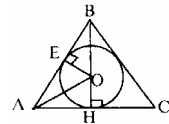
в) Дано: $\triangle ABC$ – описан около круга (O; r), $AB=BC=a$, $\angle B=\alpha$

Найти: Скруга

Решение:

$$\text{В } \triangle ABC: \angle B = \frac{\alpha}{2}; \quad \angle H = 90^\circ; \quad AB = a;$$

$$AH = a \sin \frac{\alpha}{2}, \quad BH = a \cos \frac{\alpha}{2}.$$



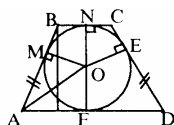
$\triangle ABH \sim \triangle OBE$ (по 2 углам), т.е.

$$\frac{AB}{OB} = \frac{BH}{BE} = \frac{AH}{OE} \quad \frac{a}{a \cos \frac{\alpha}{2} - r} = \frac{a \sin \frac{\alpha}{2}}{r},$$

$$ar = (a \cos \frac{\alpha}{2} - r) \cdot a \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} a^2 \sin \alpha - ar \sin \frac{\alpha}{2}$$

$$ar(1 + \sin \frac{\alpha}{2}) = \frac{1}{2} a^2 \sin \alpha, \quad r = \frac{a \sin \alpha}{2(1 + \sin \frac{\alpha}{2})}$$

$$S = \pi r^2 = \frac{\pi a^2 \sin^2 \alpha}{4(1 + \sin \frac{\alpha}{2})^2}$$



г) Дано: ABCD – трапеция, описана около круга (O; r); AB=CD, AD=a, $\angle A = \alpha$

Найти: S круга

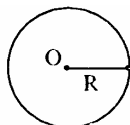
Решение:

Так как AD и AB – касательные, то AM=AF и AO – биссектриса, значит $\angle OAF = \frac{\alpha}{2}$.

$$\triangle AOF: \angle F = 90^\circ, \angle A = \frac{\alpha}{2}, AF = \frac{a}{2}, R = OF = AF \cdot \operatorname{tg} \angle A; OF = \frac{a}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$$

$$S = \pi R^2 = \pi \frac{a^2}{4} \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}.$$

1118.



Дано: Круг (O; R), d=6,6 мм

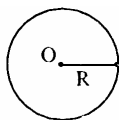
Найти: S

Решение:

$$S = \pi R^2, R = \frac{1}{2} d, R = 3,3 \text{ мм},$$

$$S = \pi 3,3^2 = \pi \cdot 10,89 \approx 3,14 \cdot 10,89 = 34,2 \text{ мм}^2$$

1119.



Дано: Круг (O; R), C=41 м

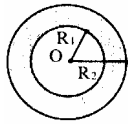
Найти: d и S

Решение:

$$C = 2\pi r, \text{ т.к. } 2r = d, \text{ то } 41 = \pi \cdot d, d = \frac{41}{\pi} \approx 13,02 \text{ м}$$

$$S = \pi r^2 \approx 3,14 \cdot 6,5^2 = 133,84 \text{ м}^2.$$

1120.



Дано: круг (O; R₁), круг (O; R₂); R₁=1,5 см, R₂=2,5 см

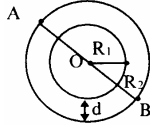
Найти: Скольца

Решение:

$$S_{\text{кольца}} = \pi(R_2^2 - R_1^2) = \pi(6,25 - 2,25) = 4\pi \text{ см}^2$$

1121.

Дано: круг (O; R₁), круг (O; R₂); S_{кр1}=314 мм², AB=18,5 мм



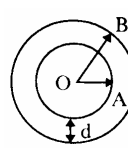
Найти: d

Решение:

$$R_2 = \frac{1}{2} AB, R_2 = 9,25 \text{ мм}; S_{\text{кр1}} = \pi R_1^2, \frac{314}{\pi} = R_1^2, \text{ следо-}$$

вательно $R_1 \approx \sqrt{100} = 10$. $10 - 9,25 = 0,75$ мм – слой нужно снять.

1122.



Дано: OA=3 мм, d=1 м, 1 м²-0,8 дм³

Найти: V

Решение:

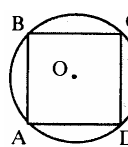
$$S_{\text{кольца}} = S_6 - S_M$$

$$S_6 = \pi OB^2 = \pi 4^2 = 16\pi \text{ м}^2, S_M = \pi OA^2 = \pi 3^2 = 9\pi \text{ м}^2,$$

$$S_{\text{кольца}} = 16\pi \text{ м}^2 - 9\pi \text{ м}^2 = 7\pi \text{ м}^2$$

$$V = 7\pi \cdot 0,8 = 5,6\pi \text{ дм}^3 \approx 17,6 \text{ дм}^3.$$

1123.



Дано: Окр(O; r); ABCD – квадрат

Найти: S_{ост}

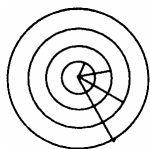
Решение:

$$AB = \frac{AC\sqrt{2}}{2} = r\sqrt{2}$$

$$S_{\text{круга}} = \pi r^2 \quad S_{\text{квадрата}} = 2r^2$$

$$S_{\text{ост}} = S_{\text{круга}} - S_{\text{квадрата}} = r^2(\pi - 2).$$

1124.



Дано: r₁<r₂<r₃<r₄, r₁=1, r₂=2, r₃=3, r₄=4

Найти: S₁, Скол₁, Скол₂, Скол₃

Решение:

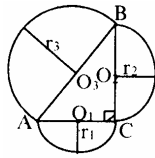
$$S_1 = \pi; S_2 = 4\pi, S_3 = 9\pi; S_4 = 16\pi;$$

$$\text{Скол}_1 = S_2 - S_1 = 3\pi$$

$$\text{Скол}_2 = S_3 - S_2 = 5\pi$$

$$\text{Скол}_3 = S_4 - S_3 = 7\pi$$

1125.



Дано: $\triangle ABC$, $\angle C=90^\circ$; AC — диаметр Окр(O_1 ; r_1);
BC — диаметр Окр(O_2 ; r_2); AB — диаметр Окр(O_3 ; r_3)

Доказать: $S_3=S_1+S_2$

Доказательство:

$$S_3 = \frac{1}{2} \pi r_3^2; S_2 = \frac{1}{2} \pi r_2^2; S_1 = \frac{1}{2} \pi r_1^2$$

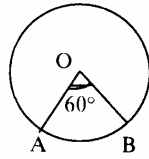
$$S_1+S_2 = \frac{1}{2} \pi r_1^2 + \frac{1}{2} \pi r_2^2 = \frac{1}{2} \pi (r_1^2+r_2^2) = \frac{1}{2} \pi r_3^2,$$

так как по т. Пифагора

$$\left(\frac{1}{2} AC\right)^2 + \left(\frac{1}{2} BC\right)^2 = \left(\frac{1}{2} AB\right)^2, \quad \frac{1}{4} (AC^2+BC^2) = \frac{1}{4} AB^2$$

утверждение доказано.

1126.



Дано: круг (O ; 10), $\angle AOB=60^\circ$

Найти: $S_{\text{ост}}$

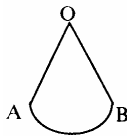
Решение:

$$S_{\text{ост}} = S_{\text{круга}} - S_{\text{ABC}}$$

$$S_{\text{круга}} = 100\pi, \quad S_{\text{ABC}} = \frac{\pi \cdot 100 \cdot 60}{360} = \frac{100\pi}{6},$$

$$S_{\text{ост}} = 500 \pi / 6 \approx 261,7 \text{ см}^2$$

1127.



Дано: $S_{\text{сек}}=S$, $\angle AOB=72^\circ$

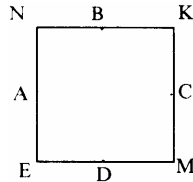
Найти: AO

Решение:

$$S_{\text{сек}} = \frac{\pi R^2 \cdot \alpha}{360^\circ}, \quad S = \frac{\pi \cdot R^2 \cdot 72}{360},$$

$$R = AO = \sqrt{\frac{5S}{\pi}}$$

1128.



Дано: ENKM — квадрат, EN=a

Найти: S_{ABCD}

Решение:

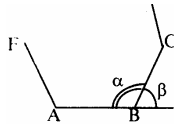
$$S_{\text{ABCD}} = S_{\text{ENKM}} - 4S_{\text{ANB}}$$

$$S_{\text{сек}} = \frac{\pi R^2 \cdot \alpha}{360^\circ}, \text{ следовательно}$$

$$S_{\text{ANB}} = \frac{\pi \left(\frac{a}{2}\right)^2 \cdot 90}{360} = \frac{\pi a^2}{16}$$

$$S_{\text{ABCD}} = a^2 - 4 \frac{\pi a^2}{16} = a^2 - \frac{\pi a^2}{4} = \frac{a^2(4-\pi)}{4}$$

1129.



Дано: n-угольник; а) $\beta=18^\circ$, б) $\beta=40^\circ$, в) $\beta=72^\circ$, г) $\beta=60^\circ$

Найти: n

Решение:

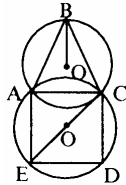
а) $\beta=18^\circ$, $n = \frac{360}{18} = 20$; б) $\beta=40^\circ$, $n = \frac{360}{40} = 9$;
 в) $\beta=72^\circ$, $n = \frac{360}{72} = 5$; г) $\beta=60^\circ$, $n = \frac{360}{60} = 6$.

1130.

Дано: $\triangle ABC$, $AB=BC=AC$ вписан в Окр(O ; 3 дм); $ACDE$ – квадрат вписан в Окр(O_1 ; R)

Найти: R

Решение:



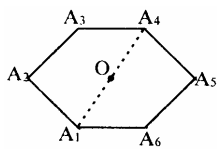
Так как $\triangle ABC$ — правильный, то $AB=R\sqrt{3}$, т.е. $AB=3\sqrt{3}$ дм, значит сторона квадрата равна $3\sqrt{3}$ дм.

$EO_1=O_1C$, следовательно $R=\frac{1}{2} EC$.

$$EC^2 = ED^2 + DC^2 = 27 + 27 = 54$$

$$EC = 3\sqrt{6}, \text{ т.е. } R = \frac{3\sqrt{6}}{2}$$

1131.



Дано: $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ — правильный; $A_1A_4=2,24$ см

Найти: P

Решение:

Так как 6-угольник правильный, то $A_1A_2=R$

$$R = \frac{1}{2} A_1A_4 = 1,12 \text{ см}$$

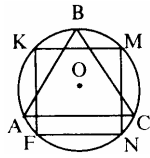
$$P = 6 \cdot A_1A_2 = 6 \cdot 1,12 = 6,72 \text{ см}$$

1132.

Дано: $\triangle ABC$ – правильный и $KMNF$ – квадрат; а) вписаны в одну Окр; б) описаны около одной Окр

Найти: $S_{\Delta}:S$

Решение:



а) Пусть $KM=x$, R — радиус;
 $FN^2+NM^2=FM^2$
 $2x^2=4R^2$
 $x^2=2R^2$, $x=R\sqrt{2}$,

т.е. $FN=NM=R\sqrt{2}$.

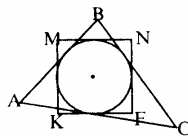
$$S=NM^2=(R\sqrt{2})^2=2R^2$$

$AB=R\sqrt{3}$, т.к. $\triangle ABC$ – правильный, то

$$S_{\Delta}=\frac{1}{2}\cdot AB^2\cdot\sin 60^{\circ}=\frac{1}{2}\cdot 3R^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}R^2}{4}$$

значит

$$\frac{S_{\Delta}}{S}=\frac{3\sqrt{3}R^2}{4}\cdot\frac{1}{2R^2}=\frac{3\sqrt{3}}{8}$$



б) Пусть r – радиус окружности
 $MN=2r \Rightarrow$

$$S=4r^2$$

$AB=2\sqrt{3}r \Rightarrow$

$$S_{\Delta}=\frac{1}{2}\cdot AB\cdot AC\cdot\sin 60^{\circ}=\frac{1}{2}\cdot 12r^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}r^2$$

$$\frac{S_{\Delta}}{S}=\frac{3\sqrt{3}r^2}{4r^2}=\frac{3\sqrt{3}}{4}$$

1133.

Дано: $A_1A_2\dots A_{12}$ – правильный вписанный в Окр(O ; R);
 $A_1A_6\cap A_2A_9=B$

Доказать: а) $\triangle A_1A_2B$ и $\triangle A_6A_9B$ — правильные; б) $A_1A_6=2r$

Доказательство:

а) т.к. правильный 12-угольник вписан в окружность, то каждая дуга $A_1A_2=A_2A_3=\dots=A_{11}A_{12}=360^{\circ}:12=30^{\circ}$, имеем

$$\angle A_2A_1B=\frac{1}{2}\cdot A_2A_4A_6=\frac{1}{2}\cdot 120^{\circ}=60^{\circ}$$

$$\angle A_1A_2B=\frac{1}{2}\cdot A_1A_{11}A_9=\frac{1}{2}\cdot 120^{\circ}=60^{\circ}$$

$$\angle A_9 A_6 B = \frac{1}{2} \cdot A_1 A_{11} A_9 = \frac{1}{2} \cdot 120^\circ = 60^\circ$$

$$\angle A_6 A_9 B = \frac{1}{2} \cdot A_2 A_4 A_6 = \frac{1}{2} \cdot 120^\circ = 60^\circ$$

т.к. сумма углов треугольника 180° , то $\angle A_1 B A_2 = \angle A_6 B A_9 = 60^\circ$, т.е. $\triangle A_1 A_2 B$ и $\triangle A_6 A_9 B$ – правильные.

б) $\angle A_1 A_6 A_7$ – вписанный, $\angle A_1 A_6 A_7 = \frac{1}{2} A_1 A_{10} A_7 = 90^\circ$, т.е.

$A_6 A_1 \perp A_1 A_{12}$ и $OH_2 \perp A_1 A_{12} \Rightarrow OH_2 \parallel A_1 A_6$

Так же и $\angle A_{12} A_1 A_6 = 90^\circ$, $A_1 A_6 \perp A_6 A_7$ и $OH_1 \perp A_6 A_7 \Rightarrow OH_1 \parallel A_1 A_6$

Получаем, что 4-угольник $A_1 A_6 H_1 H_2$ — прямоугольный, т.е. $A_1 A_6 = H_1 H_2 = 2r$.

1134.

Дано: $A_1 A_2 \dots A_{10}$ – правильный; $A_1 A_4 \cap A_2 A_7 = B$

Доказать: а) $A_2 A_7 = 2R$; б) $\triangle A_1 A_2 B \sim \triangle B A_4 O$; в) $A_1 A_4 = A_1 A_2 = R$

Доказательство:

Так как правильный 10-угольник вписан в окружность, то каждая дуга $A_1 A_2 = A_2 A_3 = \dots = A_9 A_{10} = 360^\circ : 10 = 36^\circ$.

$\triangle A_1 A_2 B$ и $\triangle A_4 B O$:

$$\angle A_1 A_2 B = \angle A_4 B O,$$

$$\angle A_1 = \frac{1}{2} A_2 A_4 = 36^\circ,$$

$$\angle A_2 = \frac{1}{2} A_1 A_7 = 72^\circ, \angle O = A_2 A_4 = 72^\circ \Rightarrow \angle A_2 = \angle O$$

$\triangle A_1 A_2 B \sim \triangle A_4 B O$ (по двум углам).

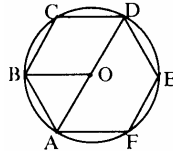
Рассмотрим $\angle A_2 O A_7$ — это центральный угол, тогда $\angle A_2 O A_7 = \angle A_2 A_4 A_7 = 180^\circ$, значит $A_2 A_7$ – диаметр, т.е. $A_2 A_7 = 2R$.

$\triangle A_1 A_2 B$ – равнобедренный, т.к. $\angle A_2 = \angle B = 72^\circ$, значит, $A_1 A_2 = A_1 B$.

$\triangle B A_4 O$ – равнобедренный, т.к. $\angle B = \angle O = 72^\circ$, значит $B A_4 = A_4 O$.

$A_1 A_4 = A_1 A_2 = A_1 A_4 = A_1 B = B A_4 = A_4 O = R$, суть утверждения задачи.

1135.



Дано: ABCDEF – правильный; $S_{\text{окр}} = 36\pi \text{ см}^2$

Найти: AB и S

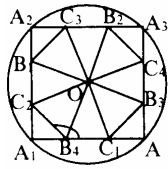
Решение:

$S_{\text{окр}} = \pi R^2$; $36\pi = \pi R^2$, значит $R^2 = 36 \Rightarrow R = 6$; т.к.

$AB = R$, то $AB = 6 \text{ см}$.

$$S = 6 \cdot \frac{1}{2} AB^2 \cdot \sin 60^\circ = 3 \cdot 36 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 54\sqrt{3} \text{ см}^2.$$

1136.



Дано: $A_1A_2A_3A_4$ – квадрат, вписан в Окр $(O;R)$

Доказать: $B_1C_3B_2C_4B_3C_1B_4C_2$ – правильный

Доказательство:

Докажем, что все стороны равны:

$A_1B_1=A_2C_2=R$, $A_1A_2=A_1C_2+C_2B_1+B_1A_2$, если

$C_2B_1=x$, то

$$x+R-x+R-x=2R-x=A_1A_2$$

$$x=2R-A_1A_2$$

Аналогично: $C_3B_2=C_4B_3=C_1B_4=2R-A_1A_2$, т.к. $A_1A_2=R\sqrt{2}$, то $C_2B_1=...=B_4C_1=R(2-\sqrt{2})$.

Докажем, что $C_2B_1=B_1C_3$.

По т. Пифагора из ΔB_1C_3 :

$$B_1C_3=\sqrt{2(R-x)^2}$$

$$B_1C_3=\sqrt{2}(R-x).$$

Подставим x :

$$B_1C_3=\sqrt{2}(R-2R+R\sqrt{2}) \quad B_1C_3=2R-R\sqrt{2}$$

Получаем, что все стороны равны.

Докажем, что все углы равны:

$\Delta A_1C_2B_4=\Delta B_1A_2C_3=\Delta B_2A_3C_4=\Delta B_3A_4C_1$ – прямоугольные равнобедренные треугольники, острые углы по 45° . Углы многоугольника являются смежными с внутренними углами треугольников, т.е. $\angle C_2=\angle B_1=\angle C_3=\angle B_2=\angle C_4=\angle B_3=\angle C_1=\angle B_4=135^\circ$

Закключаем, что $B_1C_3B_2C_4B_3C_1B_4C_2$ – правильный

$$S=8 \cdot S_{\Delta B_1OC_2}$$

$$S_{\Delta B_1OC_2}=\frac{1}{2} OB_1 \cdot OC_2 \cdot \sin \angle B_1OC_2$$

$\angle B_1OC_2=45^\circ$ (т.к. все углы по 135°), то в ΔB_1OC_2 : $\angle B_1=67,5^\circ$, $\angle C_2=67,5^\circ$.

OB_1 и OC_2 выразим через R по т. косинусов:

$$B_1C_2^2=OB_1^2+OC_2^2-2 \cdot OB_1 \cdot OC_2 \cdot \cos 45^\circ$$

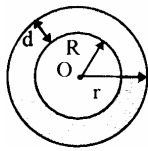
$$R^2(2-\sqrt{2})^2=x^2+x^2-2x^2 \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$R^2(2-\sqrt{2})^2=x^2(2-\sqrt{2}) \Rightarrow x=R\sqrt{2-\sqrt{2}}$$

$$S_{\Delta B_1OC_2}=\frac{1}{2} R\sqrt{2-\sqrt{2}} R\sqrt{2-\sqrt{2}} \sin 45^\circ=\frac{1}{2} R^2(2-\sqrt{2}) \frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{(2\sqrt{2}-2)R^2}{4}$$

$$S=8 \cdot S_{\Delta B_1OC_2}=8 \frac{(\sqrt{2}-1)R^2}{2}=4(\sqrt{2}-1)R^2.$$

1137.



Дано: круг (O; R); R=6370 км; 2C=84152 км

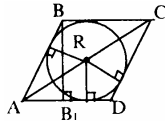
Найти: d

Решение:

$$C=2\pi r, 42076=2\pi r, r=6700 \text{ км}$$

$$d=r-R=6700-6370=330 \text{ км}$$

1138.



Дано: ABCD – ромб описан около Окр(O; R)

Найти: C

Решение:

а) BD=6 см, AC=8 см.

$\triangle ABO$: AO=4 см, AB=5 см, BO=3 см (по т. Пифагора).

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = 24 \text{ см}^2;$$

$$S_{ABCD} = BC \cdot 2R$$

$$24 = 5 \cdot 2R$$

$$R = 2,4 \text{ см}$$

$$BB_1 = a \cdot \sin \alpha$$

$$C = 2\pi R = 2 \cdot 3,14 \cdot 2,4 \approx 15,072 \text{ см}$$

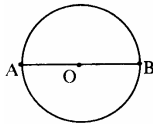
б) AB=a, $\angle A = \alpha$

$\triangle ABB_1$: $\angle B_1 = 90^\circ$, $\angle A = \alpha$, AB=a

$$BB_1 = a \cdot \sin \alpha \quad R = \frac{1}{2} BB_1 = \frac{a \sin \alpha}{2}$$

$$C = 2\pi R = \pi a \cdot \sin \alpha$$

1139.



Дано: круг (O; R), v=4 км/ч, $t_1 > t_2$ на $\frac{3}{4}$ ч

Найти: C_{круга}

Решение:

Пусть время, если идти по диаметру, равно t, тогда

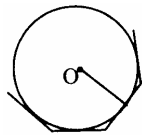
$$R = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} 4t = 2t,$$

отсюда $C = 4\pi t$, но: $S = 4(t + \frac{3}{4})$, т.к. $C = S$, то $4\pi t = 4(t + \frac{3}{4}) = 4t + 3$,

$$t = \frac{3}{4\pi - 4} \approx 0,35$$

$$C = 4\pi \cdot 0,35 \approx 4,396 \text{ км}$$

1140.



Дано: правильный n-угольник описан около окружности

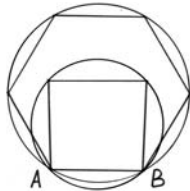
Доказать: $\frac{S}{S_n} = \frac{C}{P_n}$

Доказательство:

$$S = \pi R^2; S_n = \frac{1}{2} P_n \cdot R \Rightarrow$$

$$\frac{S}{S_n} = \frac{\pi R^2}{\frac{1}{2} P_n \cdot R} = \frac{2\pi R}{P_n} = \frac{C}{P_n}$$

1141.



Пусть дана хорда $AB=6$ см.

Для квадрата $a_4 = \sqrt{2} R_1$, где a_4 — сторона квадрата, а R_1 — радиус описанной около него окружности, значит, $R_1 = \frac{a_4}{\sqrt{2}} = \frac{AB}{\sqrt{2}} = \frac{6}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$ см.

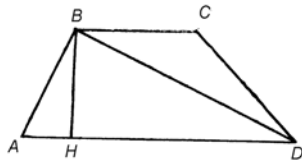
Для правильного шестиугольника $a_6 = R_2$, где a_6 — сторона шестиугольника, а R_2 — радиус описанной около него окружности, значит, $R_2 = a_6 = 6$ см.

Большая дуга AB для окружности, в которую вписан квадрат, $l_1 = 2\pi R_1 - \frac{2\pi R_1}{4} = \frac{3\pi R_1}{2}$; а большая дуга AB для окружности, в которую вписан шестиугольник $l_2 = 2\pi R_2 - \frac{2\pi R_2}{6} = \frac{5\pi R_2}{3}$. Ис-

комая сумма длин этих дуг:

$$l_1 + l_2 = \frac{3\pi R_1}{2} + \frac{5\pi R_2}{3} = \pi \left(\frac{9\sqrt{2}}{2} + \frac{5 \cdot 6}{3} \right) = \frac{\pi}{2} (9\sqrt{2} + 20) \text{ см}$$

1142.



Дано: $ABCD$ — трапеция, $AB=13$ см, $AD=14$ см, $BC=4$ см

Найти: S описанной окружности

Решение:

Т.к. вокруг трапеции можно описать окружность, то она является равнобокой.

$$AH = \frac{14 - 4}{2} = 5 \text{ см}$$

$$\sin A = \frac{5}{13} \quad \cos A = \sqrt{1 - \frac{25}{169}} = \frac{12}{13}$$

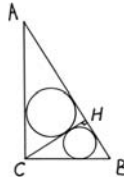
Из тр-ка ABD:

$$BD = \sqrt{196 + 169 - 2 \cdot 13 \cdot 14 \cos A} = \sqrt{365 - 336} = 5$$

$$\frac{BD}{\sin A} = 2R \quad R = \frac{5 \cdot 13}{2 \cdot 5} = 6,5$$

$$C = 2\pi R = 13\pi \text{ см}$$

1143.



Рассмотрим $\triangle ABC$ с прямым углом ACB , пусть CH — высота, опущенная на гипотенузу. Из того, что $\triangle AHC \sim \triangle CHB$, следует $\left(\frac{AC}{BC}\right)^2 = \frac{S_{\triangle AHC}}{S_{\triangle CHB}} = k^2$, где k — коэффициент подобия этих треугольников.

$$S_{\triangle AHC} = \frac{1}{2} P_{\triangle AHC} \cdot r_1,$$

где r_1 — радиус вписанной в $\triangle AHC$ окружности.

$$S_{\triangle CHB} = \frac{1}{2} P_{\triangle CHB} \cdot r_2,$$

где r_2 — радиус вписанной в $\triangle CHB$ окружности.

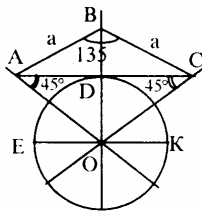
Получим, что $k^2 = \frac{\frac{1}{2} P_{\triangle AHC} \cdot r_1}{\frac{1}{2} P_{\triangle CHB} \cdot r_2} = k \cdot \frac{r_1}{r_2}$, следовательно $\frac{r_1}{r_2} = k$.

Длина окружности, вписанной в $\triangle AHC$ равна $2\pi r_1$, а в $\triangle CHB$ равна $2\pi r_2$, значит, отношение длин этих окружностей

$$\frac{2\pi r_1}{2\pi r_2} = \frac{r_1}{r_2} = k.$$

Что и требовалось доказать.

1144.



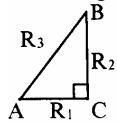
Так как 8-угольник правильный, то $\angle B = 135^\circ$. Построим $\triangle ABC$ по двум сторонам и углу между ними, т.к. $\angle B = 135^\circ$; по свойству углов треугольника $\angle A = \angle C = 45^\circ$.

Строим $\triangle ACO$: по AC и прилежащим углам по 45° . Точка O — центр окружности радиусом OD ; далее построение симметрично точке O .

1145.

Дано: круг $(O_1; R_1)$, круг $(O_2; R_2)$; $S_3=S_1+S_2$

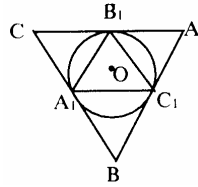
Построить: круг $(O_3; R_3)$



Построение:

Так как $S_3=S_1+S_2$, то $R_3^2=R_1^2+R_2^2$. Построим прямоугольный треугольник с катетами R_1 и R_2 , его гипотенуза и будет R_3 . Построим круг с радиусом R_3 .

1146.

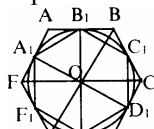


а) Дано: окр $(O; R)$

Построить: $\triangle ABC$: $OA=OB=OC=R$

Построение:

Впишем в окружность правильный $\triangle ABC$, затем через каждую вершину проведем прямые параллельные противоположной стороне. Фигура, образованная пересечением 3-ех сторон – искомый треугольник.



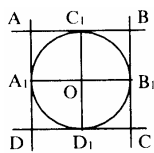
б) Дано: окр $(O; R)$

Построить: описанный 6-угольник

Построение:

Построить вписанный 6-угольник со стороной равной R . Через точки A_1, B_1, \dots, F_1 провести прямые перпендикулярные OA_1, OB_1, \dots, OF_1 , эти прямые пересекутся в точках A, B, C, D, E, F ; $ABCDEF$ – искомый 6-угольник.

1147.

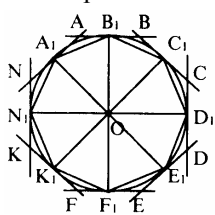


а) Дано: окр $(O; R)$

Построить: описанный квадрат

Построение:

Построить два взаимно перпендикулярных диаметра $A_1B_1 \perp C_1D_1$. Через C_1 и D_1 построить прямые, параллельные A_1B_1 , а через A_1 и B_1 – параллельные C_1D_1 , эти прямые пересекаются в точках A, B, C, D ; $ABCD$ – искомый квадрат.



б) Дано: окр $(O; R)$

Построить: описанный 8-угольник

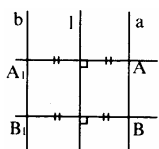
Построение:

Через т. O построить $N_1D_1 \perp B_1F_1$; $C_1K_1 \perp A_1E_1$ и K_1C_1, A_1E_1 – биссектрисы прямых углов. $\angle B_1OD_1 = \angle D_1OF_1 = \angle F_1ON_1 = \angle N_1OB_1$.

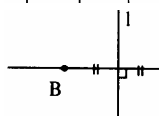
Через каждую точку A_1, B_1, \dots, N_1 построить прямые, перпендикулярные OA_1, OB_1, \dots, ON_1 . Эти прямые пересекутся в точках A, B, C, D, E, F, K, N . $ABCDEFKN$ – искомый.

ГЛАВА XIII. ДВИЖЕНИЯ

1148.



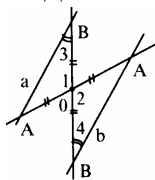
а) При осевой симметрии сохраняется расстояние между точками.
 $AA_1 \perp l$ и $BB_1 \perp l$, отсюда $b \parallel a$.
 Так как $a \parallel l$ и $a \parallel b$, то $b \parallel l$



б) Если $a \perp l$, то симметричная ей $a \perp l$; Осевая симметрия – отображение плоскости на себя.

1149.

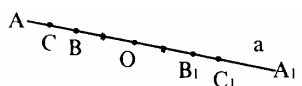
а) Дано: a при центральной симметрии отобразилась в прямую b
 Доказать: $a \parallel b$



Доказательство:

$A \rightarrow A_1, AO = OA_1$ $B \rightarrow B_1, BO = OB_1$

$\triangle AOB$ и $\triangle A_1OB_1$: $AO = OA_1, BO = OB_1, \angle 1 = \angle 2$; отсюда, $\triangle AOB = \triangle A_1OB_1$ (по признаку), значит $\angle 3 = \angle 4$ т.к. они накрест лежащие при AB и A_1B_1 и секущей BB_1 , следовательно $a \parallel b$ (по признаку).

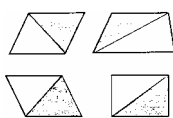


б) Если прямая проходит через центр симметрии, то каждая точка луча OA отображается на луч OA_1 дополняющий OA до прямой a $BO = OB_1; CO = OC_1$.

1150.

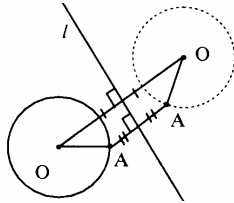
Так как осевая и центральная симметрия есть движение, то $a \parallel b$ отображаются на прямые $a_1 \parallel b_1$.

1152.



Все пункты доказываются одинаково.
 Все 4 фигуры состоят из 2 треугольников. Так как при движении отрезок отображается на равный отрезок, то треугольник — на равный треугольник.

1153.



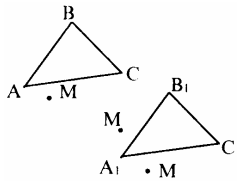
При движении сохраняются расстояния, т.е. $OA=O_1A_1$

Каждая точка окружности отображается в точку на окружности, симметричной данной.

1154.

См. учебник.

1155.



Дано: $\triangle ABC, \triangle A_1B_1C_1$

Доказать: f – единственное движение

Доказательство:

Пусть f – не единственное, есть еще и g , получим существует M , такая, что:

$$M \xrightarrow{f} M_1 \quad M \xrightarrow{g} M_2$$

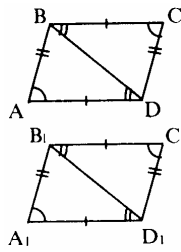
т.к. при движении расстояния сохраняются, то

$$AM=A_1M_1; \quad AM=A_1M_2,$$

значит $A_1M_1=A_1M_2$, т.е. A_1 – равноудаленная от M_1 и M_2 , точки B_1 и C_1 – равноудалены от M_1 и M_2 , т.е. по свойству A_1, B_1, C_1 – лежат на серединном перпендикуляре к отрезку M_1M_2 – противоречие.

A_1, B_1, C_1 – вершины $\triangle A_1B_1C_1$, т.е. не лежат на одной прямой, следовательно, f – единственное движение.

1157.



Дано: $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ – параллелограммы;

$AB=A_1B_1, AD=A_1D_1, \angle A=\angle A_1$

Доказать: $ABCD=A_1B_1C_1D_1$

Доказательство:

$BC=AD, \angle A=\angle C, \angle CBD=\angle ADB$ (накрест лежащие), т.е. $\triangle ABD=\triangle BDC$ (по признаку).

Аналогично $\triangle A_1B_1D_1=\triangle B_1C_1D_1$.

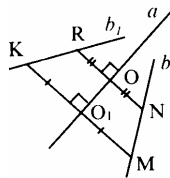
$\triangle ABD=\triangle A_1B_1D_1$, т.к. $AB=A_1B_1, AD=A_1D_1,$

$\angle A=\angle A_1$ (по признаку).

Получаем, что $\triangle ABD=\triangle BDC=\triangle A_1B_1D_1=\triangle B_1C_1D_1$.

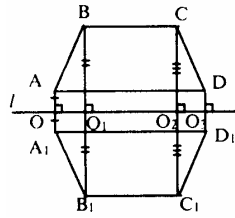
$ABCD=\triangle ABD+\triangle BDC, A_1B_1C_1D_1=\triangle A_1B_1D_1+\triangle B_1C_1D_1$, значит $ABCD=A_1B_1C_1D_1$.

1158.



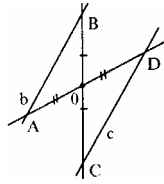
Дано: a, b – прямые
 Построить: b_1 с учетом осевой траектории от b к a
Построение:
 Построим перпендикуляры от b к a : NR, MK .
 $RN \cap a = O, MK \cap a = O_1, ON = OR, KO_1 = MO_1$.
 Через K и R построим b_1 .

1159.



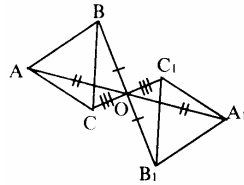
Дано: $ABCD$ – 4-х угольник, l – прямая
 Построить: $A_1B_1C_1D_1$ симметричный относительно l
Построение:
 Через точки A, B, C, D опустить перпендикуляры к l . На этих перпендикулярах отложить отрезки $AO = OA_1; BO_1 = O_1B_1; CO_2 = O_2C_1; DO_3 = O_3D_1$; $A_1B_1C_1D_1$ – искомый.

1160.



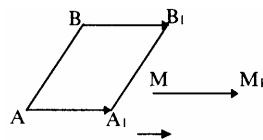
Дано: O и b
 Построить: симметричную прямую c
Построение:
 Построить лучи AO и BO , отложить на них $AO = OD, BO = OC$; через C и D провести прямую c ;
 c – искомая.

1161.



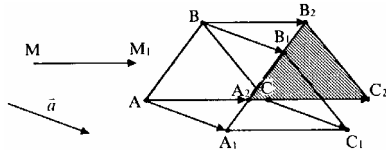
Дано: $\triangle ABC, O$
 Построить: $\triangle A_1B_1C_1$ симметричный $\triangle ABC$
Построение:
 Построить лучи: AO, BO, CO .
 Отложить $AO = OA_1, BO = OB_1, CO = OC_1$;
 $\triangle A_1B_1C_1$ – искомый.

1162.



От B отложить вектор, равный $\overrightarrow{MM_1}$ и от A сделать то же самое.
 B_1A_1 – искомый.

1163.



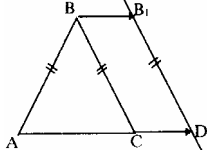
Построение выполнено аналогично предыдущему номеру.

1164.

Дано: $\triangle ABC$, $AB=BC$, $D \in AC$, $A-C-D$

а) построить: B_1D : $BC \rightarrow B_1D$ при переносе на CD

б) доказать: ABB_1D — равнобедренная трапеция



Построение:

Построить прямую l , проходящую через т. D и $\parallel BC$; от D вверх отложить отрезок, равный CB ($B_1D=CB$); B_1D — искомый.

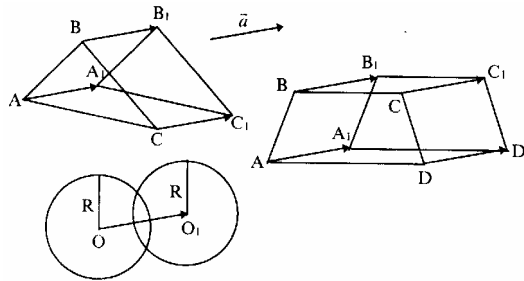
Доказательство:

Так как $BB_1=CD$, то $BB_1 \parallel CD$

$DB_1=BC$ (из а)), и $AB=BC$, т.е. $AB=B_1D$

$ABCD$ — трапеция равнобедренная.

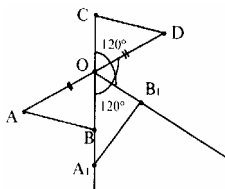
1165.



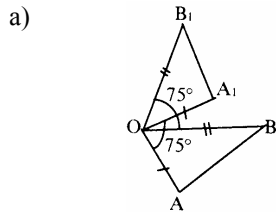
Построение

В каждом случае от вершин фигур откладываем вектора, равные вектору \vec{a} , получаем фигуру, равную данной.

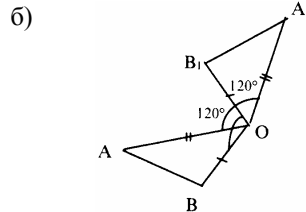
1166.



При центральной симметрии $A \rightarrow D$, $B \rightarrow C$, а затем при повороте на 120° $C \rightarrow B_1$, $D \rightarrow A_1$

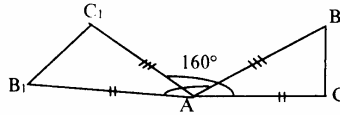


при повороте на 75° : $A \rightarrow A_1$,
 $B \rightarrow B_1$

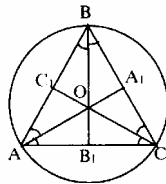


при повороте на 120° : $A \rightarrow A_1$,
 $B \rightarrow B_1$

1167.

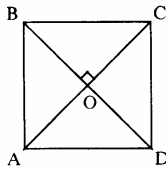


1168.



При повороте на 120° $A \rightarrow C$, $C \rightarrow B$, $B \rightarrow A$; имеем:
 $AA_1 \rightarrow CC_1$, $CC_1 \rightarrow BB_1$, $BB_1 \rightarrow AA_1$, $\triangle ABC \rightarrow \triangle CBA$, а
 биссектрисы перешли в биссектрисы.

1169.



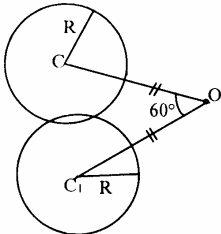
Дано: $AC \cap BD = O$

Доказать: $ABCD \xrightarrow[O]{90^\circ} ABCD$

Доказательство:

Так как $AC \perp BD$, то $AC \rightarrow BD$, т.к. $AO = OC$,
 $BO = OD$, то $A \rightarrow D$, $D \rightarrow C$, $C \rightarrow B$, $B \rightarrow A$, т.е. $ABCD \rightarrow ABCD$.

1170.



а) Если C и O не совпадают, то $OC \rightarrow OC_1$.

Наша окружность с центром в точке C переходит в окружность с центром в т. C_1 .

б) Если C и O совпадают, то окружность отобразится сама на себя.

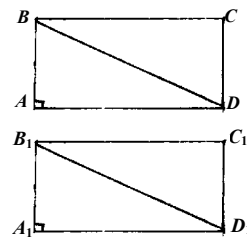
№ 1172.

Возьмем некоторую точку C на отрезке AB . Докажем, что она перейдет сама в себя. Допустим, она переходит в некоторую точку C_1 , не лежащую на AB . Тогда получается, что при движении отрезок AB отобразился на треугольник ABC_1 , что невозможно, т.к. по теореме отрезок переходит в отрезок. Т.о. $AB \rightarrow AB$.

№ 1173.

Возьмем некоторую точку D на плоскости. Допустим D не переходит в D_1 , тогда $\triangle ABD \neq \triangle ABD_1$, а по следствию при движении треугольник отображается на равный ему треугольник.

№ 1174.



Дано: а) $AB=A_1B_1$, $AD=A_1D_1$;
 б) $AB=A_1B_1$, $BD=B_1D_1$.
 Доказать: $ABCD=A_1B_1C_1D_1$.

Доказательство:

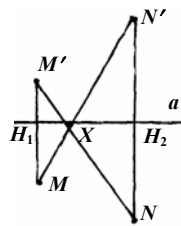
а) Так как $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ — прямоугольники, то $AB=CD=A_1B_1=C_1D_1$ и $AD=BC=A_1D_1=B_1C_1$.
 $\triangle ABD=\triangle A_1B_1D_1$ (по 2-м катетам),
 $\triangle BCD=\triangle B_1C_1D_1$ (по 2-м катетам).

Получаем, что $ABCD = A_1B_1C_1D_1$.

б) Исходя из пункта (а): $\triangle ABD=\triangle A_1B_1D_1$ (по катету и гипотенузе), $\triangle BCD=\triangle B_1C_1D_1$ (по катету и гипотенузе).

Получаем, что $ABCD = A_1B_1C_1D_1$.

№ 1175.



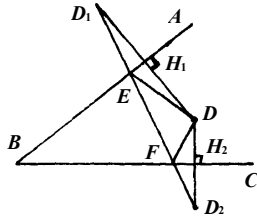
Доказать, что существует единственная точка X на прямой a , такая, что $MX + XN$ принимает минимальное значение.

Доказательство:

Построим точки M' и N' , симметричные точкам M и N соответственно относительно прямой a . Прямые $M'N$ и $N'M$ пересекутся в искомой точке X . $\triangle MH_1X \sim \triangle NH_2X$ (по построению) с коэффициентом $k = \frac{MH_1}{NH_2}$, т.е. $MX = k \cdot XN$ и точка X будет такая, что

$MX+XN$ примет наименьшее значение в искомой точке X .

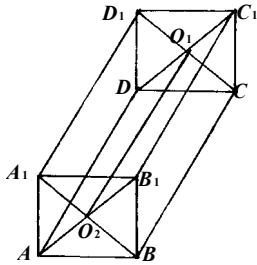
№ 1176.



Построить $\triangle EDF$ с минимальным периметром.

Построим точку D_1 , симметричную точке D относительно AB и точку D_2 , симметричную точке D относительно AC . Прямая D_1D_2 пересечет AB в точке E , а прямую AC в точке F . $\triangle EDF$ — искомый.

№ 1178.



Так как ABB_1A_1 и DCC_1D_1 квадраты, то $AB \parallel A_1B_1 \parallel DC \parallel D_1C_1$; $AB_1 \parallel DC_1$ и $AO_2 = DO_1$.

Докажем, что ADO_1O_2 — параллелограмм.

Так как $AO_2 = DO_1$, $AO_2 \parallel DO_1$, то $AD \parallel O_1O_2$, а т.к. $\angle DAO_2 = \angle DO_1O_2$ (две параллельные прямые и секущая), то $AD = O_1O_2$.

№ 1179.

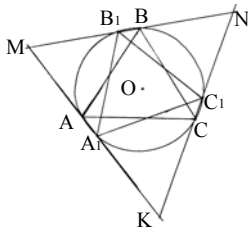
См. рис. 333 (стр. 305 учебника).

Перенесем $\triangle SAB$ на вектор \vec{BC} . CC_1 и DD_1 будут его высотами, которые пересекутся в точке K . Тогда третья высота, опущенная на сторону CD , обязана проходить также через точку K и принадлежать прямой SK . Получаем, что $SK \perp CD$, а, значит, и AB .

1180.

1) Случай, когда прямые AA_1 , BB_1 , CC_1 пересекаются в точке O очевиден, т.к. в этом случае точки A и A_1 , B и B_1 , C и C_1 должны быть диаметрально противоположны.

2) $\triangle MNK$ может лежать внутри и вне круга.



Рассмотрим случай, когда он лежит вне круга (случай, когда он лежит внутри круга аналогичен).

Докажем, что $\triangle MNK$ — правильный.

$$\begin{cases} \overset{\frown}{B_1C} = \overset{\frown}{B_1C} \\ \overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{B_1C_1} = 120^\circ \end{cases}$$

вычтем, получим: $\overset{\frown}{CC_1} = \overset{\frown}{BB_1}$, аналогично, $\overset{\frown}{CC_1} = \overset{\frown}{BB_1} = \overset{\frown}{AA_1}$.

$$\begin{cases} \overset{\cup}{AA_1} = \overset{\cup}{AA_1} = 120^\circ \\ \overset{\cup}{B_1A_1} = \overset{\cup}{AC} \end{cases}$$

вычтем, получим $\overset{\cup}{B_1A} = \overset{\cup}{A_1C}$, аналогично, $\overset{\cup}{B_1A} = \overset{\cup}{A_1C} = \overset{\cup}{BC_1}$.

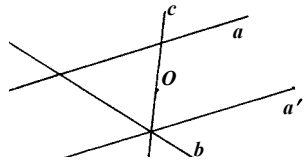
Пусть $\overset{\cup}{B_1B} = \alpha$, тогда

$$\angle NMK = \frac{\overset{\cup}{A_1CB} - \overset{\cup}{AB_1}}{2} = \frac{1}{2}(120^\circ + 120^\circ - \alpha - 120^\circ + \alpha) = \frac{1}{2} \cdot 120^\circ = 60^\circ,$$

аналогично, $\angle NMK = \angle MNK = \angle MKN = 60^\circ$.

Таким образом, $\triangle MNK$ – правильный.

№ 1181.

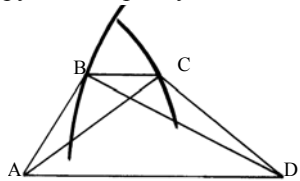


Построим прямую a' , симметричную a относительно точки O .

Наша искомая прямая будет проходить через точку O и через точку пересечения прямой a' и b .

1182.

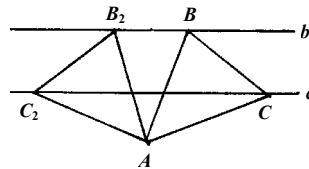
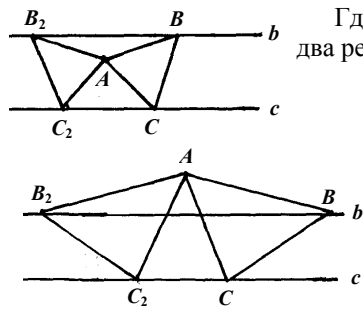
Построим сначала большее основание, затем проведем две окружности радиусами диагоналей. Затем от верхней точки пересечения окружностей параллельным переносом (параллельно AD) начнем опускать отрезок BC пока точка B не совпадет с окружностью с центром в точке D и C с окружностью с центром в точке A .



$ABCD$ – искомая трапеция.

№ 1183.

Где бы точка A не лежала, существует два решения задачи.



ГЛАВА XII. НАЧАЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ СТЕРЕОМЕТРИИ

№ 1184.

- а) прямоугольный параллелепипед имеет 6 граней, 12 ребер, 8 вершин.
 б) тетраэдр имеет: 4 грани, 6 ребер, 4 вершины.
 в) октаэдр имеет: 8 граней, 12 ребер, 6 вершин.

№ 1185.

Пусть имеется n -угольная призма. Так как призма получается параллельным переносом n -угольника и соединением соответствующих вершин, то число вершин равно $2n$ ($2n$ делится на 2). А число ребер равно $n+n+n=3n$ ($3n$ делится на 3).

№ 1186.

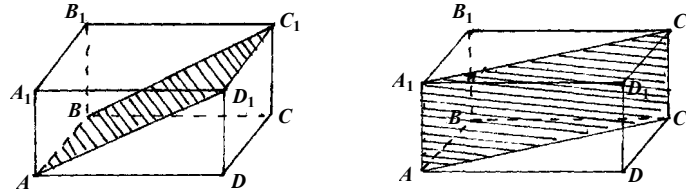
Доказать, что площадь боковой поверхности прямой призмы равна $P_{\text{осн}} \cdot h$ (боковое ребро прямой призмы равно ее высоте).

Если развернуть боковую поверхность, то получится прямоугольник со сторонами $a_1+a_2+\dots+a_n=P_{\text{основания}}$ (a_1, \dots, a_n — стороны основания) и h — высота призмы, т.о. $S=P_{\text{осн}} \cdot h$.

№ 1187.

- а) нет; б) нет; в) нет; г) да; д) нет

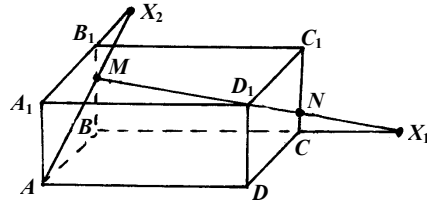
№ 1189.



а) т.к. $AD_1 \parallel BC_1$, $AD_1=BC_1$ и $C_1D_1 \parallel AB$, $C_1D_1=AB$, то ABC_1D_1 — параллелограмм.

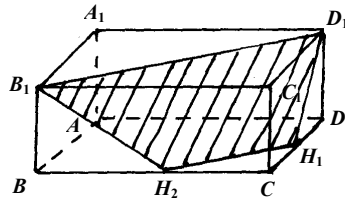
б) т.к. $AC=A_1C_1$, $AC \parallel A_1C_1$ и $AA_1=CC_1$ и $AA_1 \parallel CC_1$, то AA_1C_1A — параллелограмм.

№ 1190.



№ 1191.

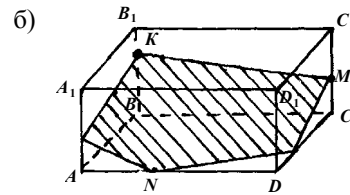
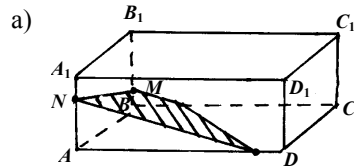
Докажем, что $B_1D_1H_1H_2$ — трапеция.



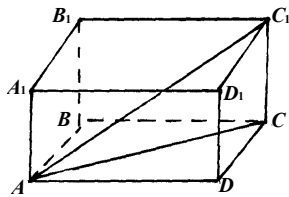
Так как $B_1D_1H_1H_2$ — плоскость,
то $H_2C = CH_1 = \frac{1}{2} CD$.

Так как $B_1D_1 \parallel BD$, а $\triangle CH_2H_1 \sim \triangle CBD$ (по 2 сторонам и углу между ними), то $BD \parallel H_1H_2 \parallel B_1D_1$, т.е. $H_1H_2B_1D_1$ — трапеция.

№ 1192.



№ 1193.



а) $AB=BC=1$; $CC_1=2$;

$$AC = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2};$$

$$AC_1 = \sqrt{2 + 4} = \sqrt{6}.$$

б) $AB=8$; $BC=9$; $CC_1=12$;

$$AC = \sqrt{64 + 81} = \sqrt{145};$$

$$AC_1 = \sqrt{145 + 144} = \sqrt{289} = 17.$$

в) $AB = \sqrt{39}$; $BC=7$; $CC_1=9$;

$$AC = \sqrt{39 + 49} = \sqrt{88};$$

$$AC_1 = \sqrt{88 + 81} = \sqrt{169} = 13.$$

№ 1194.

$$AB=BC=CC_1=a$$

$$AC=\sqrt{a^2+a^2}=a\sqrt{2}$$

$$AC_1=\sqrt{2a^2+a^2}=a\sqrt{3}$$

№ 1195.

Т.к. объем тела, состоящего из двух других тел, равен сумме объемов этих тел минус их пересечение, то

а) $V=V_1+V_2$

б) $V=V_1+V_2-\frac{1}{3}V_1=\frac{2}{3}V_1+V_2$.

№ 1196.

$$AB=8; BC=12; AA_1=18.$$

$$V=AB \cdot BC \cdot AA_1=8 \cdot 12 \cdot 18=1728 \text{ см}^3$$

$$a_{\text{куба}}=\sqrt[3]{V}=\sqrt[3]{1728}=12 \text{ см.}$$

№ 1197.

$$AC_1=13; BD=12; BC_1=11.$$

Т.к. $BD=AC$, то по теореме Пифагора

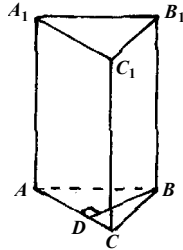
$$CC_1=\sqrt{AC_1^2-AC^2}=\sqrt{13^2-12^2}=\sqrt{25}=5 \text{ см}$$

$$BC=\sqrt{BC_1^2-CC_1^2}=\sqrt{11^2-5^2}=\sqrt{6 \cdot 16}=4\sqrt{6} \text{ см}$$

$$AB=\sqrt{AC^2-BC^2}=\sqrt{12^2-16 \cdot 6}=\sqrt{48}=4\sqrt{3} \text{ см}$$

$$V=4\sqrt{3} \cdot 4\sqrt{6} = 240\sqrt{2} \text{ см}^3$$

№ 1199.



Дано: $\angle BAC=120^\circ$, $AB=5 \text{ см}$, $AC=3 \text{ см}$,

$$S_{\text{грани}}=35 \text{ см}^2.$$

Найти: V

Решение:

По теореме косинусов:

$$BC^2=25+9-2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot \cos 120^\circ=34+15=49 \text{ см}^2$$

$$BC=7 \text{ см.}$$

$$BC \cdot BB_1=35; \quad BB_1=35:7=5 \text{ см.}$$

$$V=S_{\text{осн}} \cdot H=\frac{1}{2}AB \cdot AC \cdot \sin \angle BAC \cdot BB_1=\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 3 \cdot \sin 120^\circ \cdot 5=\frac{75\sqrt{3}}{4} \text{ см}^3.$$

№ 1200.

Т.к. все ребра равны a , то в основании призмы лежит правильный n -угольник.

а) $V = \frac{1}{2} \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \sin 60^\circ = \frac{a^3 \sqrt{3}}{4}$;

б) $V = a \cdot a \cdot a = a^3$;

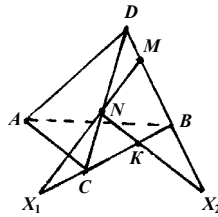
в) $V = a \left(\frac{1}{2} \cdot 6a \cdot a \cdot \cos 30^\circ \right) = \frac{3a^3 \sqrt{3}}{2}$;

г) $V = \frac{1}{2} \cdot a \cdot 8a \cdot \left(\frac{a}{\sqrt{2-\sqrt{2}}} \cos 22,5^\circ \right) = \frac{4a^3 \cos 22^\circ 30'}{\sqrt{2-\sqrt{2}}} = \frac{2a^3}{\operatorname{tg} 22^\circ 30'}$.

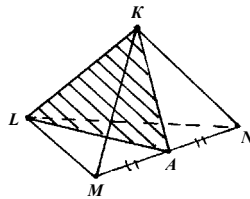
№ 1201.

Нет.

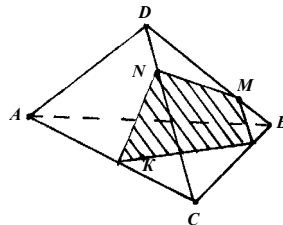
№ 1202.



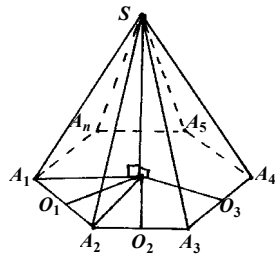
№ 1203.



№ 1204.



№ 1205.



Так как пирамида правильная, то в основании лежит правильный n -угольник, т.е.

$$HO_1=HO_2=HO_3=\dots=HO_n=r.$$

Значит,

$$SO_1=SO_2=\dots=SO_n=\sqrt{SH^2+r^2}.$$

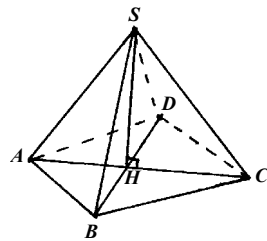
№ 1206.

Из задачи № 1205 все апофемы правильной пирамиды равны друг другу, площадь каждой боковой грани равна $\frac{ha}{2}$, где h — апофема, а a — сторона основания пирамиды, значит,

$$S_{\text{бок}} = \frac{1}{2}h(a_1 + a_2 + \dots + a_n) = \frac{1}{2}P_{\text{осн}} \cdot h.$$

№ 1207.

Дано: $SH=7$, $AB=5$, $DB=8$.



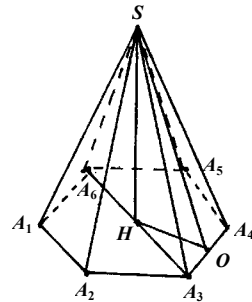
Найти: боковые ребра
По теореме Пифагора:

$$AH = \sqrt{AB^2 - \left(\frac{DB}{2}\right)^2} = \sqrt{25 - 16} = 3 \text{ см};$$

$$SA = SC = \sqrt{AH^2 + SH^2} = \sqrt{49 + 9} = \sqrt{58} \text{ см};$$

$$SB = SD = \sqrt{DH^2 + SH^2} = \sqrt{16 + 49} = \sqrt{65} \text{ см}.$$

№ 1208.



Дано: $A_1A_2=a$, $S_{SA_3A_6}=S_{SA_1A_2}$.

Найти: $S_{\text{бок.пов.}}$

$$A_3A_6=2R=2a; \quad HO=r = a \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$SO = \sqrt{SH^2 + HO^2}$, т.к. $S_{SA_3A_6} = S_{SA_1A_2}$, то

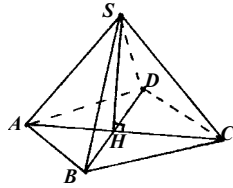
$$\frac{a}{2} \sqrt{SH^2 + \frac{3a^2}{4}} = a \cdot SH;$$

$$4SH^2 + 3a^2 = 16SH;$$

$$SH = \frac{a}{2}; \quad SO = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{3}{4}a^2} = a;$$

$$S_{\text{бок.пов.}} = 6 \cdot \frac{a}{2} \cdot a = 3a^2.$$

№ 1211.



а) $h=2$ м, $a=3$ м.

Так как $V = \frac{1}{3} S_{\text{осн.}} \cdot h$, а в основании лежит

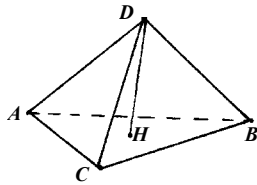
квадрат, то

$$V = \frac{1}{3} \cdot 3^2 \cdot 2 = 6 \text{ м}^3;$$

б) $h=2,2$ м, $AB=20$ см, $BC=13,5$ см, $\angle ABC=30^\circ$.

$$S_{\text{ABC}} = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 13,5 \cdot \sin 30^\circ = 67,5 \text{ см}^2;$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot 67,5 \cdot 2,2 = 4950 \text{ см}^3.$$



№ 1212.

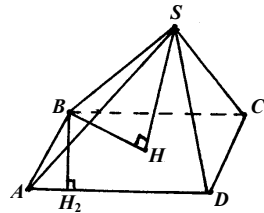
Дано: $AB=m$, $\angle BSD=\alpha$.

Найти: V .

$$BD = \sqrt{m^2 + m^2} = m\sqrt{2}.$$

Так как $SB=SD=SC=SA$, то $\text{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{BH}{SH}$.

$$SH = \frac{m\sqrt{2}}{2 \text{tg} \frac{\alpha}{2}}; \quad V = \frac{1}{3} m^2 \cdot \frac{m\sqrt{2}}{2 \text{tg} \frac{\alpha}{2}} = \frac{m^3 \sqrt{2}}{6 \text{tg} \frac{\alpha}{2}}.$$



№ 1214.

а) $r=2\sqrt{2}$ см, $h=3$ см.

$$V = S_{\text{осн.}} \cdot h = \pi \cdot 8 \cdot 3 = 24\pi \text{ см}^3.$$

б) $V=120 \text{ см}^3$, $h=3,6$ см.

$$V = Sh = \pi r^2 \cdot h; \quad r = \sqrt{\frac{V}{\pi h}} = \sqrt{\frac{120}{3,6\pi}} = \frac{10}{\sqrt{3\pi}} \text{ см.}$$

в) $r=h$, $V=8\pi \text{ см}^3$.

$$V = \pi r^2 h = \pi h^3; \quad h^3 = 8; \quad h = 2 \text{ см.}$$

№ 1215.

$$V_{\text{цилиндра}} = \pi r^2 h$$

$$\text{а) } V_{\text{призмы}} = \frac{1}{2} h \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{2}; \quad \frac{a}{\sin 60^\circ} = 2r; \quad a = \sqrt{3}r$$

$$\frac{V_{\text{п}}}{V_{\text{ц}}} = \frac{h \cdot r^2 3\sqrt{3}}{4\pi r^2 h} = \frac{3\sqrt{3}}{4\pi};$$

$$\text{б) } V_{\text{п}} = h \cdot a^2; \quad r = \frac{a\sqrt{2}}{2};$$

$$\frac{V_{\text{п}}}{V_{\text{ц}}} = \frac{2 \cdot h \cdot a^2}{\pi a^2 h} = \frac{2}{\pi};$$

$$\text{в) } V_{\text{п}} = \frac{1}{2} \cdot 6r \cdot r \cdot \cos 30^\circ \cdot h = \frac{3\sqrt{3}r^2 h}{2};$$

$$\frac{V_{\text{п}}}{V_{\text{ц}}} = \frac{3\sqrt{3}r^2 h}{2\pi r^2 h} = \frac{3\sqrt{3}}{2\pi};$$

$$\text{г) } a = 2r \sin \frac{180^\circ}{8} = 2r \sin \frac{45^\circ}{2};$$

$$V_{\text{п}} = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot a \cdot r \cdot \cos \frac{180^\circ}{8} \cdot h = 8r^2 \cdot h \cdot \cos \frac{45^\circ}{2} \sin \frac{45^\circ}{2} = 2\sqrt{2} r^2 h;$$

$$\frac{V_{\text{п}}}{V_{\text{ц}}} = \frac{2\sqrt{2}r^2 h}{\pi r^2 h} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi};$$

$$\text{д) } V_{\text{п}} = \frac{1}{2} \cdot n \cdot 2r \cdot \sin \frac{180^\circ}{n} \cdot r \cos \frac{180^\circ}{n} \cdot h = \frac{1}{2} n r^2 h \cdot \sin \frac{360^\circ}{n};$$

$$\frac{V_{\text{п}}}{V_{\text{ц}}} = \frac{n \cdot r^2 h \cdot \sin \frac{360^\circ}{n}}{2\pi r^2 h} = \frac{n \cdot \sin \frac{360^\circ}{n}}{2\pi}.$$

№ 1216.

Дано: $D = 1 \text{ м}, h = L.$

Найти: $S_{\text{бок.пов.}}$

$$L = 2\pi r = \pi D = \pi = h$$

$$S_{\text{бок.пов.}} = L \cdot h = \pi^2 \text{ м}^2.$$

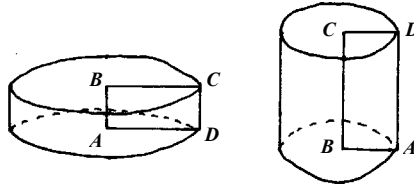
№ 1217.

Задача сводится к нахождению площади боковой поверхности цилиндра высотой 4 м и диаметром 20 см.

$$L = 2\pi r = \pi D = 0,2\pi \text{ м.}$$

$$S_{\text{бок.пов.}} = L \cdot h = 0,2\pi \cdot 4 = 0,8\pi \text{ м}^2; \quad 0,8\pi \cdot 1,025 = 0,82\pi \text{ м}^2.$$

№ 1218.



Пусть $AB = a$, $BC = b$

а) $S_{1\text{бок.пов.}} = 2\pi r \cdot h_1 = 2\pi ab$;

$S_{2\text{бок.пов.}} = 2\pi r h_2 = 2\pi ba$;

б) $S_1 = 2\pi ab + 2\pi r^2 = 2\pi ab + 2\pi b^2$; $S_2 = 2\pi ab + 2\pi a^2$;

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{2\pi(ab + b^2)}{2\pi(ab + a^2)} = \frac{b}{a}.$$

№ 1220.

а) $h = 3$ см, $r = 1,5$ см,

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \pi \cdot 2,25 \cdot 3 = 2,25\pi \text{ см}^3;$$

б) $r = 4$ см, $V = 48\pi \text{ см}^3$,

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h; \quad h = \frac{3V}{\pi r^2} = \frac{3 \cdot 48\pi}{\pi \cdot 16} = 9 \text{ см};$$

в) $h = m$, $V = p$,

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h \quad r = \sqrt{\frac{3V}{\pi h}} = \sqrt{\frac{3p}{\pi m}}.$$

№ 1221.

Дано: $S_{\text{осн}} = Q$, $S_{\text{бок.пов.}} = P$.

Найти: V

Решение:

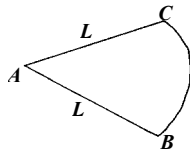
$$S_{\text{бок.пов.}} = \pi r L = P; \quad S_{\text{осн}} = \pi r^2 = Q;$$

$$L = \frac{P\sqrt{\pi}}{\pi\sqrt{a}}; \quad r = \sqrt{\frac{Q}{\pi}};$$

$$h = \sqrt{L^2 - r^2} = \sqrt{\frac{P^2}{\pi Q} - \frac{Q}{\pi}} = \frac{\sqrt{P^2 - Q^2}}{\sqrt{\pi a}};$$

$$V = \frac{1}{3} Q \cdot \frac{\sqrt{P^2 - Q^2}}{\sqrt{\pi Q}}.$$

№ 1222.



Дано: $\angle BAC = 60^\circ$, $S = 45\pi$ дм².

Найти: V

Решение:

$$S_{ABC} = \pi L^2 \cdot \frac{1}{6} = \pi L; \quad L = 6r;$$

$$S_{\text{осн}} = S - S_{ABC} = 45\pi - \frac{\pi L^2}{6};$$

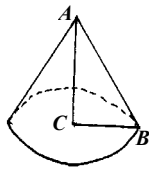
$$\pi r^2 = 45\pi - \frac{\pi L^2}{6} = 45\pi - 6r^2\pi; \quad r^2 = \frac{45}{7}.$$

По теореме Пифагора:

$$h = \sqrt{L^2 - r^2} = \sqrt{35 \cdot \frac{45}{7}} = 15 \text{ дм};$$

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \pi \cdot \frac{45}{7} \cdot 15 = \frac{225\pi}{7} \text{ дм}^3.$$

№ 1223.



Дано: $AC = 6$ см, $CB = 8$ см.

Найти: $S_{\text{бок.пов.}}$; S

Решение:

$$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{64 + 36} = 10 \text{ см}$$

$$S_{\text{бок.пов.}} = \pi r h = 8 \cdot 10 \cdot \pi = 80\pi \text{ см}^2$$

$$S = S_{\text{бок.пов.}} + S_{\text{осн}} = 80\pi + \pi \cdot 64 = 144\pi \text{ см}^2$$

№ 1226.

а) $R = 4$ см.

$$S = 4\pi R^2 = 64\pi \text{ см}^2; \quad V = \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{256}{3} \pi \text{ см}^3$$

б) $V = 113,04$ см³.

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3$$

$$R = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}} \approx 3 \text{ см}; \quad S = 4\pi R^2 \approx 36\pi \text{ см}^2$$

в) $S = 64\pi$ см².

$$S = 4\pi R^2$$

$$R = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{S}{\pi}} = 4 \text{ см}; \quad V = \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{256}{3} \pi \text{ см}^3$$

№ 1227.

$$V_1 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{D_1}{2}\right)^3 = \frac{32}{3}\pi D_2^3; \quad V_2 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{D_2}{2}\right)^3 = \frac{1}{6}\pi D_2^3;$$
$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{32 \cdot \pi D_2^3 \cdot 6}{3 \cdot \pi D_2^3} = 64.$$

№ 1228.

Дано: $h_1 = 12$ см, $D_1 = 5$ см; $D_2 = 5$ см.

Найти: $V_1 - V_2$

$$V_1 = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{5}{2}\right)^2 \cdot 12 = 25\pi \text{ см}^3$$

$$V_2 = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{5}{2}\right)^3 = \frac{125\pi}{6} \approx 21 \text{ см}^3$$

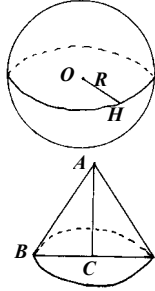
$V_1 - V_2 > 0$, т.е. не переполнит.

№ 1229.

Задача сводится к нахождению площади поверхности мяча радиусом 10 см.

$$S = 4\pi R^2 = 400\pi \text{ см}^2; \quad 1,08 \cdot 400\pi = 432\pi \text{ см}^2$$

№ 1230.



Дано: $AB = 2OH = 2R$, $BC = \frac{1}{2} AC$.

Доказать: $S_1 = S_2$.

$$S_1 = 4\pi R^2$$

По теореме Пифагора:

$$AC = \sqrt{BC^2 + AB^2} \quad 4BC^2 = BC^2 + 4R^2$$

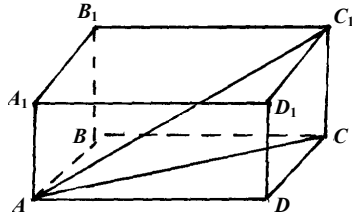
$$BC = \frac{2R}{\sqrt{3}}; \quad AC = \frac{4R}{\sqrt{3}}$$

$$S_2 = \pi \cdot BC \cdot AC + \pi BC^2 = \pi \cdot \frac{2R}{\sqrt{3}} \cdot \frac{4R}{\sqrt{3}} + \pi \cdot \frac{4R^2}{3} = \frac{8R^2\pi}{3} + \frac{4R^2\pi}{3} = 4\pi R^2$$

№ 1231.

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{4}{3}\pi R_1^3}{\frac{4}{3}\pi R_2^3} = 8; \quad \frac{R_1}{R_2} = 2; \quad \frac{S_1}{S_2} = \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 = 4.$$

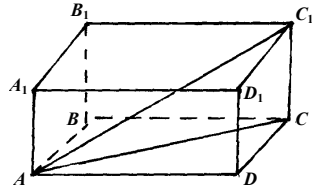
№ 1232.



По свойству параллелограмма:
 $AB=CD$, $AA_1=CC_1$. Из неравенства
 треугольника:

$$\begin{aligned} AC &< AB+AD; \\ AC_1 &< AC+AA_1; \\ AC_1 &< AB+AD+AA_1. \end{aligned}$$

№ 1233.



По теореме косинусов:

$$\begin{aligned} AC^2 &= AD^2 + CD^2 - 2AC \cdot DC \cdot \cos \angle D; \\ BD^2 &= AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cdot \cos \angle A; \end{aligned}$$

т.к. $\cos \angle A = -\cos \angle D$, получим

$$AC^2 + BD^2 = AD^2 + CD^2 + AB^2 + AD^2.$$

Аналогично получим, что

$$A_1C_1^2 + B_1D_1^2 = A_1D_1^2 + C_1D_1^2 + A_1B_1^2 + A_1D_1^2;$$

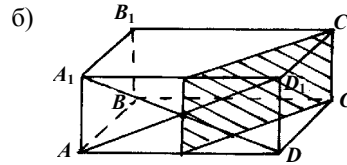
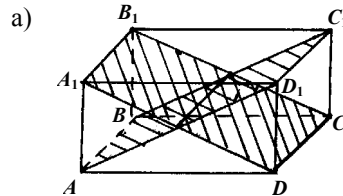
$$AC_1^2 + CA_1^2 = AC^2 + CC_1^2 + AA_1^2 + A_1C_1^2;$$

$$DB_1^2 + BD_1^2 = BD^2 + BB_1^2 + DD_1^2 + B_1D_1^2.$$

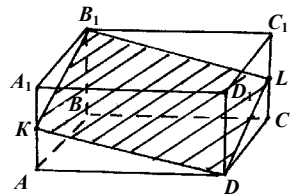
Складывая, получим

$$\begin{aligned} AC_1^2 + CA_1^2 + DB_1^2 + BD_1^2 &= \\ = AC^2 + CC_1^2 + AA_1^2 + A_1C_1^2 + BD^2 + BB_1^2 + DD_1^2 + B_1D_1^2 &= AD^2 + CD^2 + \\ + AB^2 + AD^2 + CC_1^2 + AA_1^2 + BB_1^2 + DD_1^2 + A_1D_1^2 + C_1D_1^2 + A_1B_1^2 + A_1D_1^2. \end{aligned}$$

№ 1234.



№ 1235.



$KD = B_1L$ и $KD \parallel B_1L$, т.к.

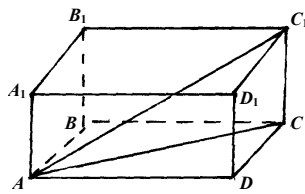
$$KD = \sqrt{AD^2 + AK^2} = \sqrt{B_1C_1^2 + C_1L^2} = B_1L$$

(по теореме Пифагора), аналогично,
 $DL \parallel KB_1$ и $DL = KB_1$, т.к.

$$DL = \sqrt{BC^2 + CL^2} = \sqrt{A_1B_1^2 + A_1K^2} = KB_1,$$

т.е. KB_1LD — параллелограмм.

№ 1236.



Дано: $S_{ABCD} + S_{AA_1B_1B} + S_{ADD_1A_1} = 404 \text{ дм}^2$,

$AA_1 = 3k$, $AD = 7k$, $AB = 8k$.

Найти: AC_1

Решение:

$$AD \cdot AA_1 + AA_1 \cdot AB + AD \cdot AB = 404;$$

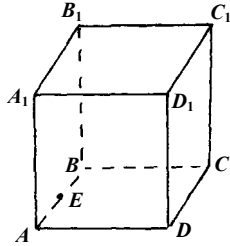
$$7k \cdot 3k + 3k \cdot 8k + 7k \cdot 8k = 404;$$

$$101k = 404, \quad k = 4.$$

$$AA_1 = 12 \text{ дм}; \quad AD = 28 \text{ дм}; \quad AB = 32 \text{ дм}.$$

$$AC_1 = \sqrt{AA_1^2 + AD^2 + AB^2} = \sqrt{144 + 784 + 1024} = \sqrt{1952} = 4\sqrt{122} \text{ дм}.$$

№ 1237.



Дано: куб; а) $AC = 12 \text{ см}$; б) $AC_1 = 3\sqrt{2} \text{ см}$;
в) $DE = 1$, $BE = AE$.

Найти: V

Решение:

$$\text{а) } AD = \frac{AC}{\sqrt{2}} = 6\sqrt{2} \text{ см}$$

$$V = 216 \cdot (\sqrt{2})^3 = 432\sqrt{2} \text{ см}^3.$$

$$\text{б) } AC_1 = \sqrt{3AA_1^2}; \quad AA_1 = \frac{AC_1}{\sqrt{3}} = \sqrt{6} \text{ см};$$

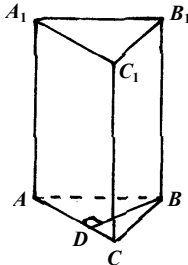
$$V = 6\sqrt{6} \text{ см}^3.$$

в) По теореме Пифагора:

$$DE = \sqrt{AD^2 + \frac{1}{4}AB^2} = \frac{\sqrt{5}}{2} AB \quad AB = \frac{2}{\sqrt{5}} \text{ см};$$

$$V = \frac{8\sqrt{5}}{25} \text{ см}^3.$$

№ 1238.



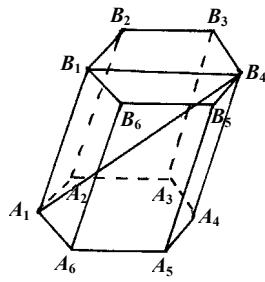
$AB = BC = m$, $\angle ABC = \varphi$, $BB_1 = BD$.

Так как $AB = BC$, то $\angle DBC = \frac{\varphi}{2}$, $\cos \frac{\varphi}{2} = \frac{BD}{BC}$,

$$BB_1 = DB = m \cdot \cos \frac{\varphi}{2};$$

$$V = \frac{1}{2} \cdot m \cdot m \cdot \sin \varphi \cdot m \cos \frac{\varphi}{2} = \frac{1}{2} m^3 \sin \varphi \cos \frac{\varphi}{2}.$$

№ 1239.



Дано: $A_1B_4=8$, $\angle B_4A_1B_1=30^\circ$.

Найти: V

Решение:

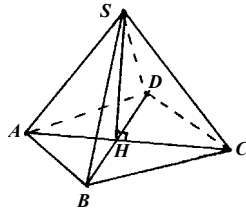
$$B_1B_4 = 8 \cdot \sin 30^\circ = 4;$$

$$A_1B_1 = \sqrt{64 - 16} = 4\sqrt{3};$$

$$B_1B_2 = \frac{1}{2} \cdot B_1B_4 = 2;$$

$$V = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \sin 60^\circ \cdot 4\sqrt{3} = \frac{12 \cdot 4 \cdot 3}{2} = 72 \text{ см.}$$

№ 1241.



$AD = 5 \text{ м}$, $AB = 4 \text{ м}$, $BD = 3 \text{ м}$, $SH = 2 \text{ м}$.

$S_{\Delta ASB} = S_{\Delta CSD}$; $S_{\Delta BSC} = S_{\Delta ASD}$.

$$SB = \sqrt{SH^2 + BH^2} = \sqrt{4 + 2,25} = 2,5 \text{ см.}$$

В ΔABD : $AD^2 = AB^2 + BD^2$, следовательно, он прямоугольный с прямым углом ABD .

Из ΔABH по теореме Пифагора:

$$AH = \sqrt{AB^2 + BH^2} = \sqrt{16 + 2,25} = \sqrt{18,25};$$

$$AS = \sqrt{AH^2 + SH^2} = \sqrt{18,25 + 4} = \sqrt{22,25};$$

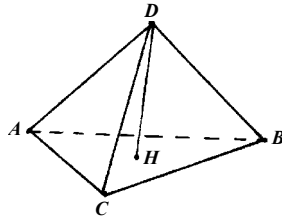
$$S_{\Delta ASB} = \frac{1}{4} \sqrt{(AS + SB + BA)(AS + SB - BA)(AS + BA - SB)(SB + BA - AS)};$$

$$S_{\Delta BSC} = \frac{1}{4} \sqrt{(BS + SC + BC)(BS + SC - BC)(BS - SC + BC)(SC + BC - BS)};$$

$$S_{ABCD} = 2 \cdot S_{\Delta ABD} = 2 \cdot \frac{1}{2} AB \cdot BD$$

$$S = S_{ABCD} + 2S_{\Delta ASB} + 2S_{\Delta BSC} = 2\sqrt{34} + 22 \text{ м}^2.$$

№ 1242.



Дано: $DH = 12 \text{ см}$, $AB = 13 \text{ см}$.

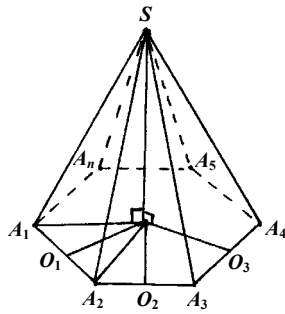
Найти: V .

Решение:

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{очн}} \cdot h = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} AB \cdot CB \cdot \sin \angle ABC \right) \cdot DH =$$

$$= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} \cdot 13 \cdot 13 \cdot \sin 60^\circ \right) \cdot 12 = 169\sqrt{3} \text{ см}^3.$$

№ 1243.



$$A_1A_2=a, \angle A_1SA_2=\alpha.$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{a}{2SO_1},$$

$$SO_1 = \frac{a}{2\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}, \quad HA_1 = \frac{a}{2\sin \frac{180^\circ}{n}},$$

$$HO_1 = \frac{a}{2\sin \frac{180^\circ}{n}} \cdot \cos \frac{180^\circ}{n} = \frac{a}{2} \operatorname{ctg} \frac{180^\circ}{n},$$

по теореме Пифагора:

$$SH = \sqrt{SO_1^2 - HO_1^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} \cdot \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} - \frac{a^2}{4} \cdot \operatorname{ctg}^2 \frac{180^\circ}{n}};$$

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} n \cdot a \cdot \frac{a}{2} \operatorname{ctg} \frac{180^\circ}{n} \cdot \frac{a}{2} \sqrt{\operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} - \operatorname{ctg}^2 \frac{180^\circ}{n}} = \\ &= \frac{a^3 \cdot n}{24} \cdot \operatorname{ctg} \frac{180^\circ}{n} \cdot \sqrt{\operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} - \operatorname{ctg}^2 \frac{180^\circ}{n}}. \end{aligned}$$

№ 1244.

Задача сводится к нахождению объема цилиндра $r=2$ мм = 0,2 см.

$$V = \pi r^2 h = 0,04\pi h \text{ см}^3 \quad m = 2,6 \cdot V = 0,104\pi h = 6800 \text{ г}$$

$$h \approx 20823 \text{ см} \approx 208 \text{ м.}$$

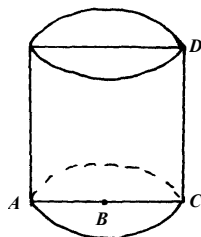
№ 1245.

Задача сводится к нахождению объема цилиндра радиуса 17 мм и высотой 25 м и цилиндра радиуса 13 мм и высотой 25 м.

$$V_1 = \pi \cdot 1,7^2 \cdot 2500 = 7225\pi \text{ см}^3; \quad V_2 = \pi \cdot 1,3^2 \cdot 2500 = 4225\pi \text{ см}^3;$$

$$V = V_1 - V_2 = 3000\pi \text{ см}^3; \quad m = \rho \cdot V = 11,4 \cdot 3000\pi \approx 107 \text{ кг.}$$

№ 1246.



Дано: $BC = x$ см, $DC = x + 12$ см, $S = 288\pi \text{ см}^2$.

Найти: BC ; DC .

Решение:

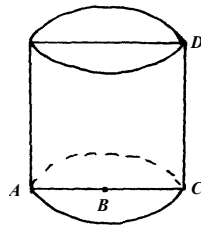
$$S = 2\pi r h + 2\pi r^2 = 2\pi \cdot x(x+12) + 2\pi x^2 = 288\pi.$$

$$x^2 + 12x + x^2 = 144 \quad x^2 + 6x - 72 = 0$$

$$\frac{D}{4} = 9 + 72 = 81. \quad x_{1,2} = -3 \pm 9,$$

но т.к. $x > 0$, то $x = 6$ см, тогда $x + 12 = 6 + 12 = 18$ см.

№ 1247.

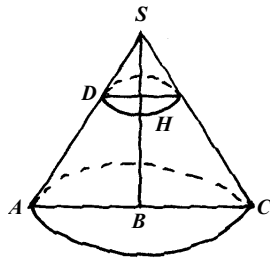


Сторона квадрата равна $\frac{d}{\sqrt{2}}$, т.е. $2\pi r = \frac{d}{\sqrt{2}}$;

$$r = \frac{d}{2\pi\sqrt{2}};$$

$$S = \pi r^2 = \pi \cdot \frac{d^2}{4\pi^2 \cdot 2} = \frac{d^2}{8\pi}.$$

№ 1248.



$$V_1 = 24 \text{ см}^3, SB = 5 \text{ см}, SH = 2 \text{ см}.$$

$$V_1 = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot 2 = 24. \quad r = \frac{6}{\sqrt{\pi}}$$

$\triangle ASB \sim \triangle DSH$ (по катету и углу).

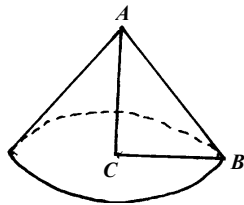
$$\frac{DH}{AB} = \frac{SH}{SB}; \quad AB = \frac{5}{2} \cdot \frac{6}{\sqrt{\pi}} = \frac{15}{\sqrt{\pi}};$$

$$V = \frac{1}{3} \pi AB^2 \cdot SB = 375 \text{ см}^3.$$

№ 1249.

$$AC = 12 \text{ см}, V = 324\pi \text{ см}^3.$$

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h = 324\pi; \quad CB = r = \sqrt{\frac{324 \cdot 3}{AC}} = \sqrt{\frac{972}{12}} = 9 \text{ см}.$$



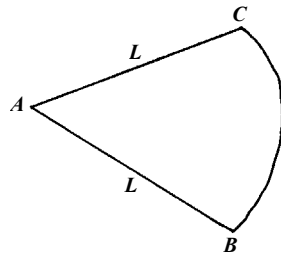
Из прямоугольного $\triangle ABC$ по теореме Пифагора:

$$AB = \sqrt{AC^2 + CB^2} = \sqrt{144 + 81} = 15 \text{ см}.$$

Тогда искомая дуга равна

$$360^\circ \cdot \frac{CB}{AB} = 360^\circ \cdot \frac{9}{15} = 216^\circ.$$

№ 1250.



$$\angle CAB = 120^\circ, AB = L = 9 \text{ см}.$$

$$S_{\text{бок}} = \frac{120^\circ}{360^\circ} \pi L^2 = 27\pi \text{ см}^2;$$

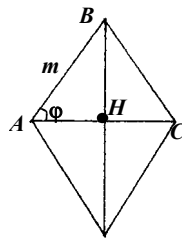
$$\pi r L = 27\pi; \quad r = 3 \text{ см};$$

по теореме Пифагора:

$$h = \sqrt{L^2 - r^2} = \sqrt{81 - 9} = 6\sqrt{2} \text{ см};$$

$$S_{\text{осн}} = \pi r^2 = 9\pi \text{ см}^2.$$

№ 1251.



Дано: $AB = BC = m$, $\angle BAC = \varphi$.

Найти: V

Решение:

$$BH = m \sin \varphi;$$

$$S_{\text{бок. пов.}} = \pi \cdot BH \cdot AB = \pi m^2 \sin \varphi;$$

$$S = 2S_{\text{бок. пов.}} = 2\pi m^2 \sin \varphi.$$

№ 1252.

Дано: $D_1 = D_2$, $V_1 = V_2$.

Найти: h .

Решение:

$$V_1 = V_2; \quad \frac{4}{3} \pi R^3 = \pi R^2 h; \quad h = \frac{4}{3} R.$$

№ 1253.

Задача сводится к нахождению объема шариков.

$$V_1 = 4 \cdot \frac{4}{3} \pi \left(\frac{D_1}{2} \right)^3 = \frac{16}{3} \pi \cdot \frac{1}{8} = \frac{2}{3} \pi \text{ см}^3; \quad V_2 = \pi \left(\frac{2,5}{2} \right)^2 \cdot h = \frac{25}{16} \pi h \text{ см}^3$$

$$V_1 = V_2; \quad \frac{2}{3} \pi = \frac{25}{16} \pi h; \quad h = \frac{32}{75} \text{ см.}$$

№ 1254.

Задача сводится к нахождению площади поверхности шара.

$$S = 4\pi R^2 = 4 \cdot (6375)^2 \pi; \quad \frac{1}{4} S = (6375)^2 \pi \text{ км}^2 \approx 1,28 \cdot 10^8 \text{ км}^2.$$

№ 1255.

Дано: $\frac{S_1}{S_2} = \frac{m^2}{h^2}$.

Найти: $\frac{V_1}{V_2}$

Решение:

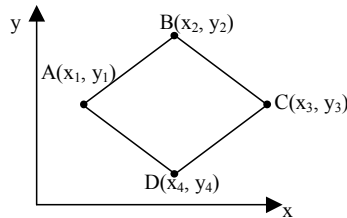
$$\frac{4\pi R_1^2}{4\pi R_2^2} = \frac{m^2}{h^2}; \quad \frac{R_1}{R_2} = \frac{m}{n}; \quad \frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{1}{3} \pi R_1^3}{\frac{1}{3} \pi R_2^3} = \left(\frac{m}{n} \right)^3.$$

ЗАДАЧИ ПОВЫШЕННОЙ ТРУДНОСТИ

№ 1256.

По признаку параллелограмма (если диагонали четырехугольника точкой пересечения делятся пополам, то это – параллелограмм).

Таким образом, точка пересечения диагоналей: $\left(\frac{x_1 + x_3}{2}, \frac{y_1 + y_3}{2}\right)$,



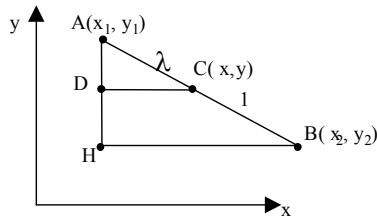
а с другой стороны $\left(\frac{x_2 + x_4}{2}, \frac{y_2 + y_4}{2}\right)$

приравняем координаты.

$$\begin{cases} \frac{x_1 + x_3}{2} = \frac{x_2 + x_4}{2} \\ \frac{y_1 + y_3}{2} = \frac{y_2 + y_4}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 + x_3 = x_2 + x_4 \\ y_1 + y_3 = y_2 + y_4 \end{cases}$$

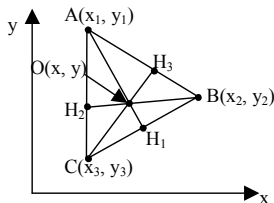
№ 1257.

Рассмотрим $\triangle ADC$ и $\triangle AHB$. Они подобны (по гипотенузе и углу). Таким образом,



$$\begin{aligned} \frac{DC}{HB} &= \frac{AC}{AB} & \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} &= \frac{\lambda}{1 + \lambda} \\ x &= \frac{\lambda x_2 - \lambda x_1}{1 + \lambda} + x_1 & x &= \frac{\lambda x_2 + x_1}{1 + \lambda} \\ \frac{AD}{AH} &= \frac{AC}{AB} & \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} &= \frac{\lambda}{1 + \lambda} \\ y &= \frac{\lambda y_2 - \lambda y_1}{1 + \lambda} + y_1 = \frac{\lambda y_2 + y_1}{1 + \lambda} \end{aligned}$$

№ 1258.

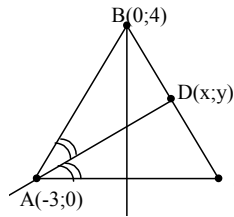


$$H_1\left(\frac{x_2 + x_3}{2}, \frac{y_2 + y_3}{2}\right)$$

Так как медианы делятся точкой пересечения в отношении 2:1 начиная от вершины, то используя задачу 1257 получим, что $\lambda=2$

$$x = \frac{x_1 + 2 \cdot \left(\frac{x_2 + x_3}{2}\right)}{1+2} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \quad y = \frac{y_1 + 2 \cdot \left(\frac{y_2 + y_3}{2}\right)}{1+2} = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$$

№ 1259.



AD – биссектриса; A(-3; 0); C(3; 0); B(0; 4)

$$AB=BC=\sqrt{3^2+4^2}=5 \quad AC=6$$

Пусть $BD=z$, тогда $DC=5-z$. Так как по

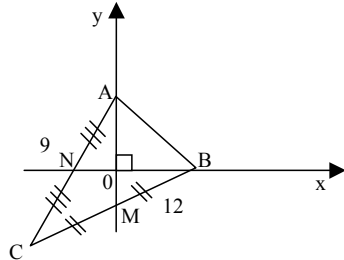
свойству биссектрисы $\frac{BD}{AB} = \frac{DC}{AC}$, то

$$\frac{z}{5} = \frac{5-z}{6} \quad 6z=25-5z \quad z = \frac{25}{11} = 2\frac{3}{11} \quad 5-z = 2\frac{8}{11}$$

Воспользовавшись задачей 1257, получим:

$$\lambda = \frac{25}{11} : \frac{30}{11} = \frac{5}{6}; \quad x = \frac{0 + \frac{5}{6} \cdot 3}{\frac{5}{6} + 1} = \frac{15}{11}; \quad y = \frac{4}{1 + \frac{5}{6}} = \frac{24}{11}; \quad D\left(\frac{15}{11}; \frac{24}{11}\right).$$

№ 1260.



Введем систему координат, как показано на рисунке:

Пусть $NO=x$, а $OM=y$, тогда по свойству медианы $AO=2y$, $BO=2x$.

По теореме Пифагора:

$$\begin{cases} y^2 + 4x^2 = 36 \\ x^2 + 4y^2 = \frac{81}{4} \end{cases} \quad \begin{cases} 4x^2 + 16y^2 = 81 \\ 4x^2 + y^2 = 36 \end{cases}$$

$15y^2=45$; $y = \pm\sqrt{3}$, но $y>0$. Таким образом, $y=\sqrt{3}$, $x = \frac{\sqrt{33}}{2}$. Таким об-

разом, координаты точки $B(2\sqrt{3}; 0)$; $A(0; \sqrt{33})$.

$$AB = \sqrt{12+33} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}.$$

№ 1261.

Решим сначала задачу для двух точек:

$$m_1(x-x_1)=m_2(x-x_2) \quad m_1x-m_1x_1=m_2x-m_2x_2$$

$$x = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2}$$

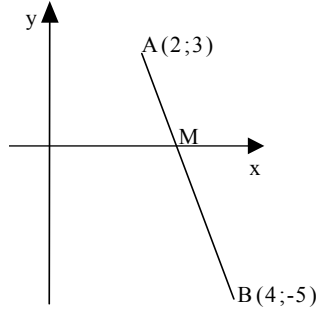
Теперь найдем центр тяжести между точкой x и x_3 :

$$x' = \frac{\frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} (m_1 + m_2) + x_3 m_3}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

Аналогично: $y' = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3}{m_1 + m_2 + m_3}$; получим точки

$$\left(\frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{m_1 + m_2 + m_3}, \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3}{m_1 + m_2 + m_3} \right)$$

№ 1262.



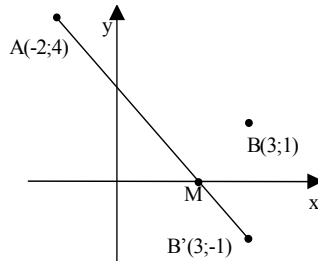
а) Искомая точка лежит на пересечении прямой АВ с осью Х. Если бы точка М не лежала на этой прямой, то получился бы $\triangle ABM$. А из неравенства треугольника $AB < AM + BM$.

Таким образом, найдем уравнение прямой АВ:

$$\begin{cases} -5 = 4k + b \\ 3 = 2k + b \end{cases} \begin{cases} k = -4 \\ b = 11 \end{cases}$$

$$y = -4x + 11$$

Так как $y=0$, то $-4x+11=0$; $x = \frac{11}{4}$. Таким образом, $M\left(\frac{11}{4}; 0\right)$.



б) Используем задачу 1175.

Построим образ точки В относительно оси Х: $B'(3; -1)$.

Теперь, исходя из предыдущего пункта, найдем уравнение прямой AB' :

$$\begin{cases} 4 = -2k + b \\ -1 = 3k + b \end{cases} \begin{cases} 5k = -5 \\ b = 4 + 2k \end{cases} \begin{cases} k = 1 \\ b = 2 \end{cases}$$

$$y = -x + 2.$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ y = -x + 2 \end{cases} \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases}$$

Таким образом, $M(2; 0)$.

№ 1263.

а) $Ax + By + c = 0$; $A \neq 0$; $B \neq 0$. Доказать, что это уравнение прямой.

Так как $B \neq 0$, то можно разделить все уравнение на В.

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}.$$

Пусть $-\frac{A}{B} = k$, $-\frac{C}{B} = b$, $y=kx+b$ – линейная функция, график – прямая.

б) Доказать, что $x^2 - xy - 2 = 0$ не уравнение окружности.

Так как $x \neq 0$, то разделим обе части уравнения на x , $y = x - \frac{2}{x}$, а это не уравнение окружности.

№ 1264.

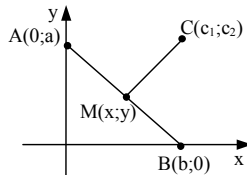
$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y-2)^2 = 4 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} 1 - 2x - 4y + 1 + 4 = 4 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1 - 2y \\ 1 + 4y^2 - 4y + y^2 = 1 \end{cases} \quad y(5y-4) = 0$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ x = 1 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} y = 0,8 \\ x = -0,6 \end{cases}$$

Длина хорды равна: $\sqrt{(1+0,6)^2 + 0,8^2} = \sqrt{2,56 + 0,64} = \sqrt{3,2} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$

№ 1265.



Пусть эта константа равна k .

$$\begin{aligned} \alpha AM^2 + \beta CM^2 + \gamma BM^2 &= \\ = \alpha x^2 + \alpha(a-y)^2 + \beta(c_1-x)^2 + \beta(c_2-y)^2 + \gamma(x-b)^2 + \gamma y^2 &= \\ = x^2(\alpha + \beta + \gamma) - 2x(c_1\beta + \gamma b) + y^2(\gamma + \alpha + \beta) - & \\ 2y(\alpha a + \beta c_2) &= k \end{aligned}$$

а) $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$

$$(\alpha + \beta + \gamma) \left(\left(x - \frac{c_1\beta + \gamma b}{\alpha + \beta + \gamma} \right)^2 + \left(y - \frac{\alpha a + \beta c_2}{\alpha + \beta + \gamma} \right)^2 - \frac{(c_1\beta + \gamma b)^2 + (2\alpha a + \beta c_2)^2}{(\alpha + \beta + \gamma)^2} \right) = k$$

Таким образом, это может быть и окружность, и точка, и пустое множество.

б) $\alpha + \beta + \gamma = 0$

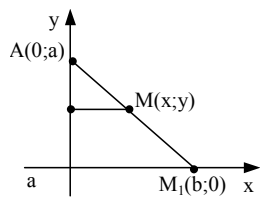
$$-2x(c_1\beta + \gamma b) - 2y(\alpha a + \beta c_2) = k$$

Это может быть прямая; плоскость или пустое множество.

№ 1266.

$$AM \cdot AM_1 = k.$$

Введем систему координат, как показано на рисунке



$$\sqrt{(x^2 + (y-a)^2)(b^2 + a^2)} = k;$$

$$(x^2 + (y-a)^2)(b^2 + a^2) = k^2$$

$$x^2 + (y-a)^2 = \frac{k^2}{b^2 + a^2}$$

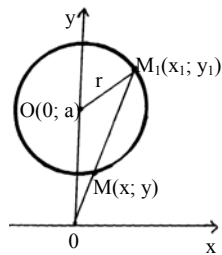
Таким образом, из уравнения видно, что это окружность без точки.

№ 1267.

$$OM = kOM_1.$$

$$\frac{1}{k} = 1 + \frac{MM_1}{OM} \quad \frac{MM_1}{OM} = \frac{1-k}{k} = p \quad 1+p = \frac{1}{k}$$

Введем систему координат так, как показано на рисунке.



Координаты точки M_1 удовлетворяют уравнению: $x_1^2 + (y_1 - a)^2 = r^2$. Воспользуемся задачей

№ 1257 ($\lambda = p$)

$$x = \frac{x_1}{1+p} \quad y = \frac{y_1}{1+p}$$

$$x^2(1+p)^2 + (y(1+p) - a)^2 = r^2; \quad x^2 + (y - ak)^2 = k^2r^2$$

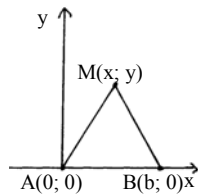
Из уравнения видно, что это окружность с центром $(0; ak)$ и радиусом kr .

№ 1268.

а) Введем систему координат, как показано на рисунке.

$$AM = \sqrt{x^2 + y^2}; \quad BM = \sqrt{(x-b)^2 + y^2}. \quad \text{Так как } AM = k \cdot BM, \text{ то}$$

$$x^2 + y^2 = k^2(x-b)^2 + y^2k^2; \quad x^2(1-k^2) + 2xbk^2 + y^2(1-k^2) = k^2b^2$$



$$(1-k^2) \left(\left(x + \frac{bk^2}{1-k^2} \right)^2 - \frac{b^2k^4}{(1-k^2)^2} + y^2 \right) = k^2b^2;$$

$$\left(x + \frac{bk^2}{1-k^2} \right)^2 + y^2 = \frac{k^2b^2}{(1-k^2)} + \frac{b^2k^4}{(1-k^2)^2};$$

$$\left(x + \frac{bk^2}{1-k^2} \right)^2 + y^2 = \frac{k^2b^2}{(1-k^2)^2} (1-k^2 + k^2) = \frac{k^2b^2}{(1-k^2)^2}.$$

Таким образом, это окружность с центром $\left(-\frac{bk^2}{1-k^2}; 0 \right)$ и $r = \frac{kb}{1-k^2}$.

б) Построим окружность, проходящую через точки А и В и с центром в точке $(x_1; y_1)$ и радиусом r .

$$\begin{cases} x_1^2 + y_1^2 = r^2 \\ (x_1 - b)^2 + y_1^2 = r^2 \end{cases} \quad (x_1 - b)^2 - x_1^2 = 0 \quad \begin{cases} x_1 = \frac{b}{2} \\ y_1 = \pm \sqrt{r^2 - \frac{b^2}{4}} \end{cases}$$

Таким образом, уравнение окружности:

$$\left(x - \frac{b}{2}\right)^2 + \left(y \mp \sqrt{r^2 - \frac{b^2}{4}}\right)^2 = r^2$$

Если радиусы в точке пересечения окружностей пересекаются под прямым углом, то по теореме Пифагора:

$$\frac{k^2 b^2}{(1-k^2)^2} + r^2 = \left(\frac{b}{2} + \frac{bk^2}{1-k^2}\right)^2 + r^2 - \frac{b^2}{4};$$

$$\frac{k^2 b^2}{(1-k^2)^2} = \frac{b^2 k^4}{(1-k^2)^2} + 2 \cdot \frac{b}{2} \cdot \frac{bk^2}{1-k^2}; \quad \frac{k^2 b^2 - b^2 k^4 - b^2 k^2 (1-k^2)}{(1-k^2)^2} = 0.$$

$0=0$ получили тождество. Таким образом, утверждение задачи доказано.

№ 1269.

См. рис. 369 учебника стр. 341.

Так как $NA = \frac{1}{2} MN = \frac{1}{2} NP$, то А — середина отрезка NP.

$QB = \frac{1}{3} MN = \frac{1}{3} PQ$. Пусть сторона квадрата — а, тогда,

$$\operatorname{tg} \angle NMA = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}, \quad \operatorname{tg} \angle BMQ = \frac{a}{3a} = \frac{1}{3}.$$

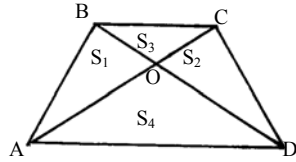
$$\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{1}{2} - \operatorname{arctg} \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{\operatorname{tg} \left(\operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \operatorname{arctg} \frac{1}{3} \right)} =$$

$$= \frac{1 - \operatorname{tg} \left(\operatorname{arctg} \frac{1}{2} \right) \operatorname{tg} \left(\operatorname{arctg} \frac{1}{3} \right)}{\operatorname{tg} \left(\operatorname{arctg} \frac{1}{2} \right) + \operatorname{tg} \left(\operatorname{arctg} \frac{1}{3} \right)} = \frac{1 - \frac{1}{6}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}} = \frac{5}{6} \cdot \frac{6}{5} = 1.$$

Таким образом, $\angle AMB = \frac{\pi}{4}$.

№ 1270.

Пусть $AO=x$; $BO=y$; $OC=x_2$; $OD=y_2$.

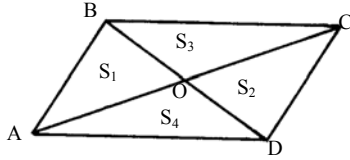


$$S_1 = \frac{1}{2} xysin\alpha; \quad S_2 = \frac{1}{2} x_2y_2sin\alpha;$$

$$S_3 = \frac{1}{2} x_2ysin\alpha; \quad S_4 = \frac{1}{2} xy_2sin\alpha;$$

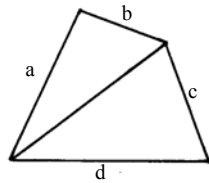
$$xy \cdot x_2y_2 = xy \cdot x_2y_2.$$

Таким образом, $S_1 \cdot S_2 = S_3 \cdot S_4$, а т.к. только для двух четырехугольников (трапеция и параллелограмм) выполняется то, что $S_1 = S_2$, то $S_1^2 = S_3 S_4$, $S_1 = \sqrt{S_3 S_4}$, утверждение доказано.



№ 1271.

Разобьем четырехугольник на 2 треугольника. Так как $\sin\alpha \leq 1$, то

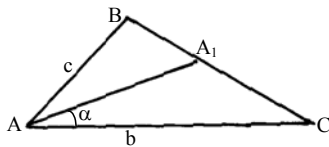


$$S = \frac{1}{2} (cd \cdot \sin \hat{cd} + ab \cdot \sin \hat{ab}) \leq \frac{1}{2} (cd + ab).$$

Докажем, что $cd + ab \leq ac + bd$: $(c-b)d \leq (b-c)a$, тогда $-d \leq a$, верное неравенство, следовательно,

$$S \leq \frac{1}{2} (cd + ab) \leq \frac{1}{2} (ac + bd).$$

№ 1272.



Дано: $\angle A_1AC = \alpha$; $AC = b$; $AB = c$.

Доказать: $AA_1 = \frac{2bccos\alpha}{b+c}$.

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} cbsin(2\alpha).$$

Пусть $AA_1 = x$

$$S_{ABC} = S_{ABA_1} + S_{ACA_1} = \frac{1}{2} (bx \cdot \sin\alpha + cx \cdot \sin\alpha) = \frac{1}{2} cb \cdot \sin 2\alpha;$$

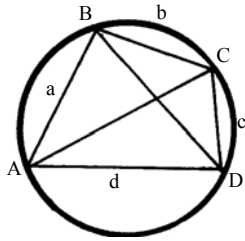
$$(b+c)x \cdot \sin\alpha = 2cb \cdot \cos\alpha \sin\alpha; \quad x = \frac{2cb \cos\alpha}{b+c}.$$

№ 1273.

Т.к. $\hat{ab} + \hat{dc} = \hat{bc} + \hat{ad} = 180^\circ$, то пусть $\hat{ab} = x$; $\hat{da} = y$.

По теореме косинусов:

$$AC^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos x = c^2 + d^2 - 2cd \cos(180^\circ - x);$$



$$(2cd+2ab)\cos x = \frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{1};$$

$$\cos x = \frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2cd + 2ab}.$$

$$AC = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2(cd + ab)}} =$$

$$= \sqrt{\frac{a^2cd + b^2cd + a^3b + b^3a - a^3b - b^3a + c^2ab + d^2ab}{cd + ab}} =$$

$$= \sqrt{\frac{a^2cd + b^2cd + c^2ab + d^2ab}{cd + ab}}.$$

Аналогично:

$$a^2 + d^2 - 2ab \cos y = c^2 + b^2 + 2cb \cos y; \quad \cos y = \frac{a^2 + d^2 - c^2 - b^2}{2cb + 2ab};$$

$$BD = \sqrt{a^2 + d^2 - 2ab \frac{a^2 + d^2 - c^2 - b^2}{2(cb + ad)}} = \sqrt{\frac{a^2bc + d^2bc + b^2ad + c^2ad}{ad + bc}}.$$

№ 1274.

См. рис. к № 1273. Из предыдущей задачи:

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} ab \sin x + \frac{1}{2} cd \sin x;$$

$$\cos x = \frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2cd + 2ab}; \quad 1 - \sin^2 x = \frac{(a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2}{4(cd + ab)^2}$$

Так как $x \in (0; \pi)$, то $\sin x > 0$,

$$\sin x = \frac{\sqrt{4(cd + ab)^2 - (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2}}{2cd + 2ab} =$$

$$= \frac{\sqrt{(2cd + 2ab + a^2 + b^2 - c^2 - d^2)(2cd + 2ab - a^2 - b^2 + c^2 + d^2)}}{2cd + 2ab} =$$

$$= \frac{\sqrt{((a + b)^2 - (c - d)^2)((c + d)^2 - (a - b)^2)}}{2cd + 2ab} =$$

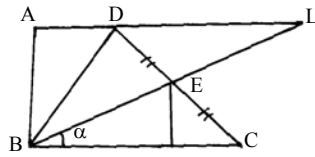
$$= \frac{\sqrt{(a + b + c - d)(a + b + d - c)(a + c + d - b)(c + d + b - a)}}{2cd + 2ab} =$$

$$= \frac{4\sqrt{(p - a)(p - b)(p - c)(p - d)}}{2(cd + ab)} = \frac{2\sqrt{(p - a)(p - b)(p - c)(p - d)}}{cd + ab}$$

Таким образом,

$$S_{ABCD} = \frac{2\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}}{cd+ab} (ab+cd) = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

№ 1276.



Продлим сторону BE в 2 раза и AD на BC (как показано на рисунке).

Пусть $BC=x$.

$$\cos\alpha = \frac{3+x}{2BE}; \quad BE = \frac{3+x}{2\cos\alpha}.$$

Из $\triangle DEL$ по теореме косинусов:

$$DE^2 = DL^2 + EL^2 - 2 \cdot DL \cdot EL \cdot \cos\alpha;$$

$$9 = x^2 + \frac{(3+x)^2}{4\cos^2\alpha} - \frac{2x(x+3)}{2\cos\alpha} \cdot \cos\alpha; \quad 9 = \frac{x^2 + 6x + 9}{4\cos^2\alpha} - 3x;$$

$$x^2 + 9 + 6x - 12\cos^2\alpha - 36\cos^2\alpha = 0$$

$$x^2 + x(6 - 12\cos^2\alpha) + (9 - 36\cos^2\alpha) = 0$$

$$D = 36 + 144\cos^4\alpha - 144\cos^2\alpha - 36 + 144\cos^2\alpha = (12\cos^2\alpha)^2$$

$$x_{1,2} = \frac{12\cos 2\alpha - 6 \pm 12\cos 2\alpha}{2} \Rightarrow x = 12\cos^2\alpha - 3, \text{ тогда } BE = 6\cos\alpha.$$

$$S_{ABCD} = S_{\triangle ABL} = \frac{1}{2} AL \cdot BL \cdot \sin\angle ALB =$$

$$= \frac{(3 + 12\cos^2\alpha - 3)(2 \cdot 6\cos\alpha) \sin\alpha}{2} = 72\sin\alpha \cdot \cos^3\alpha.$$

№ 1279.

См. рис. 370 учебника стр. 341.

а) $\angle AOB = \frac{360^\circ}{1} = 360^\circ$. Так как $\triangle ABO$ – равнобедренный, то

$$\angle ABC = \angle BAO = \frac{180^\circ - 36^\circ}{2} = 72^\circ \quad \angle BAC = \angle CAO = 36^\circ$$

$$\angle BCA = 180^\circ - 36^\circ - 72^\circ = 72^\circ$$

Таким образом, $\triangle ABC \sim \triangle ABO$ (по трем углам).

б) $AB = AC = OC$ следует из того, что все три треугольника равнобедренные. Пусть $AB = x$, тогда $BC = R - x$; $\cos 72^\circ = \frac{R-x}{2x}$ (из $\triangle ABC$).

А из $\triangle ABO$:

$$\cos 72^\circ = \frac{x}{2R} = \frac{R-x}{2x}$$

$$x^2 + xR - R^2 = 0;$$

$$D = 5R^2; x_{1,2} = \frac{-R \pm R\sqrt{5}}{2}, \text{ но } x > 0. \text{ Таким образом, } x = \frac{R\sqrt{5} - R}{2}.$$

№ 1280.

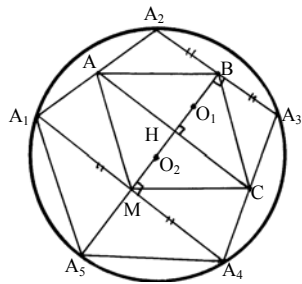
См. рис. 371 учебника стр. 341.

Посчитаем длину АК:

$$AK = \sqrt{R^2 + \left(\frac{R}{2}\right)^2} - \frac{R}{2} = \frac{R\sqrt{5} - R}{2}$$

Исходя из предыдущей задачи (№ 1279) выходит, что это длина стороны правильного 10-угольника вписанного в окружность радиуса R.

№ 1281.



Проведем биссектрису угла A_5 , т.к. она является и медианой и высотой, то она пройдет через точку O (центр исходной окружности) и совпадет с биссектрисой угла ABC (т.к. $A_1A_4 \parallel AC \parallel A_2A_3$, а биссектриса $\angle ABC$ является и медианой и высотой). Таким образом, $OO_1 \perp AC$. Осталось доказать, что $O_1H = HO$.

$$\angle A_5 = 108^\circ; \angle A_5A_1A_4 = \frac{180^\circ - 108^\circ}{2} = 36^\circ;$$

$$\angle A_2A_1A_4 = 72^\circ; \angle AA_2B = 108^\circ; \angle A_2AB = \angle A_2BA = \angle CBA_3 = 36^\circ.$$

Таким образом, $\angle ABC = 108^\circ$ и $\angle BAC = 36^\circ$.

В $\triangle A_1A_2A_4$ AM – средняя линия и равна $\frac{1}{2} A_2A_4 = \frac{1}{2} A_1A_4 = A_1M$,

т.е. $\triangle A_1MA$ – равнобедренный, таким образом, $\angle A_1AM = 72^\circ$,

$$\angle CAM = 180^\circ - 72^\circ - 36^\circ - 36^\circ = 36^\circ,$$

следовательно, $\triangle ABC = \triangle AMC$, а точка O является центром вписанной окружности для $\triangle AMC$, т.к. лежит на пересечении биссектрис, таким образом, $O_1H = HO$. Утверждение доказано.

№ 1282.

См. задачу № 1280.

AK – сторона 10-угольника.

Нужно взять циркуль измерить отрезок AK и «пройтись», отмечая точки, по окружности, затем соединить их.

№ 1283.

См. задачу № 1282.

Сначала построить 10-угольник, затем соединить

A_1 с A_3 A_3 с A_5 A_5 с A_7 A_7 с A_9 A_9 с A_1

Полученная фигура – искомая.

№ 1284.

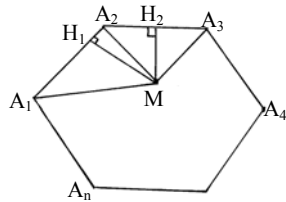
См. задачу № 1283.

Сначала построить 5-угольник, затем соединить.

A_3 с A_5 A_3 с A_1 A_4 с A_1 A_4 с A_2 A_5 с A_2

Полученная фигура – искомая.

№ 1285.



$$S_{A_1 \dots A_n} = \frac{1}{2} P \cdot r =$$

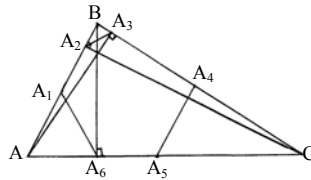
$$= \frac{1}{2} (A_1 A_2 \cdot MH_1 + \dots + A_n A_1 \cdot MH_n);$$

$$Pr = A_1 A_2 \cdot MH_1 + \dots + A_n A_1 \cdot MH_n =$$

$$= A_1 A_2 (MH_1 + \dots + MH_n);$$

$$n \cdot r = MH_1 + \dots + MH_n.$$

1286.



Исходя из задачи № 895: точки A_1, \dots, A_6 лежат на одной окружности, и, таким образом, докажем, что отрезки $A_1 A_2, \dots, A_6 A_1$ равны.

Пусть $\angle C = \alpha$, тогда $\angle A = 2\alpha$, $\angle B = 4\alpha$.

Т.к. $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$, то $\alpha = 180^\circ / 7$.

Пусть $AB = x$, тогда:

$$A_4 A_5 = \frac{x}{2} \text{ (средняя линия треугольника).}$$

$$A_1 A_6 = \frac{x}{2} \text{ (медиана в прямоугольном треугольнике, проведенная}$$

к гипотенузе, равна ее половине).

$A_3 A_2$:

По теореме синусов:

$$\frac{x}{\sin \alpha} = \frac{BC}{\sin 2\alpha}; \quad BC = 2x \cos \alpha;$$

$$\frac{AC}{\sin 4\alpha} = \frac{x}{\sin \alpha}; \quad AC = \frac{x \sin 4\alpha}{\sin \alpha} = x(3 - 4 \sin^2 \alpha) = 4x \cos 2\alpha \cos \alpha,$$

т.к. $\cos B = \cos 4\alpha = \frac{BA_3}{AB} = \frac{BA_2}{BC}$, то $\Delta A_2BA_3 \sim \Delta ABC$ с коэффициентом подобия $\cos B$, таким образом,

$$\frac{A_2A_3}{AC} = |\cos 4\alpha| = -\cos 4\alpha; \quad A_2A_3 = -4x \cos 4\alpha \cos 2\alpha \cos \alpha = \frac{x \sin \alpha}{2 \sin \alpha} = \frac{x}{2}.$$

A_6A_5 :

$$A_6C = BC \cos \alpha = 2x \cos^2 \alpha;$$

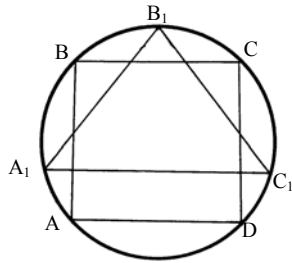
$$A_5A_6 = 2x \cos 2\alpha - \frac{x}{2} (3 - 4 \sin 2\alpha) = 2x \cos 2\alpha - \frac{x}{2} (4 \cos 2\alpha - 1) = \frac{x}{2}.$$

A_3A_4 :

Т.к. $\angle CAB = \angle A_2A_3B$ (из доказанного выше), то $\angle A_2A_3A_4 = 180^\circ - 2\alpha = 5 \cdot 180^\circ / 7$, а это как раз и есть угол правильного семиугольника, таким образом, $A_3A_4 = \frac{x}{2}$.

$A_1A_2 \neq \frac{x}{2}$, т.к. $\angle ABC \neq \frac{x}{2}$, таким образом, точка A_1 искомая седьмая вершина.

№ 1287.



Пусть R – радиус окружности. Тогда $AB = R\sqrt{2}$; $A_1B_1 = \sqrt{3}R$. Длина полуокружности равна $L = 3,14R$.

$$\sqrt{2} + \sqrt{3} \cup 3,14R; \quad 5 + 2\sqrt{6} \cup 9,9;$$

$$\sqrt{6} \cup 2,46; \quad 6 = 6.$$

Итого:

$$R(\sqrt{2} + \sqrt{3}) \approx \pi R + 0,1R$$

№ 1288.

См. рис. 372 учебника стр. 342.

$$AO = \sqrt{R^2 - \frac{R^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}R; \quad AB = \frac{\sqrt{3} + 2}{2}R;$$

$$AC = \sqrt{36R^2 + \frac{7 + 4\sqrt{3}}{4}R^2} = \frac{1}{2}R\sqrt{151 + 4\sqrt{3}};$$

$$\frac{1}{2}R\sqrt{151 + 4\sqrt{3}} \cup (2\pi + 0,001)R; \quad 151 + 4\sqrt{3} \cup 158,005; \quad \sqrt{3} \cup 1,75; \quad 3 = 3.$$

Таким образом, $\frac{1}{2}R\sqrt{151 + 4\sqrt{3}} = (2\pi + 0,001)R$.

№ 1289.

См. рис. 373 учебника стр. 342 (это не треугольники, а полукружности).

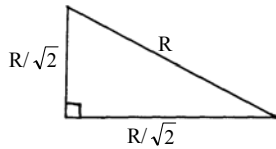
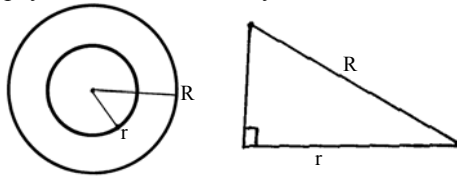
$$\begin{aligned} S &= S_{AEB} + S_{CFD} - 2 \cdot S_{AKC} = \frac{1}{2} \pi (OE)^2 + \frac{1}{2} \pi (OF)^2 - \pi \left(\frac{AC}{2} \right)^2 = \\ &= \frac{1}{2} \pi \left(OE^2 + OF^2 - \frac{1}{2} (OE - OF)^2 \right) = \frac{1}{2} \pi \left(\frac{1}{2} OE^2 + \frac{1}{2} OF^2 + OE \cdot OF \right) = \\ &= \frac{1}{4} \pi (OE + OF)^2 = \pi \left(\frac{OE + OF}{2} \right)^2, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

№ 1290.

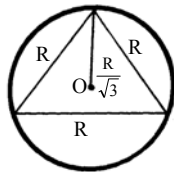
а) $S = \pi R^2 - \pi r^2 = \pi(R^2 - r^2)$.

Радиус нашего круга будет равен $\sqrt{R^2 - r^2}$, а это есть катет прямоугольного треугольника с гипотенузой R и катетом r .

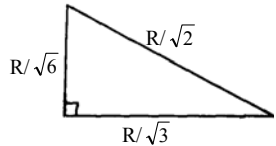


б) $S = \frac{\pi R^2}{2} = \pi \left(\frac{R}{\sqrt{2}} \right)^2$.

Радиус нашего круга будет равен $R/\sqrt{2}$, а это есть катет прямоугольного равнобедренного треугольника с гипотенузой R .



в) $S = \frac{\pi R^2 \cdot 60}{360} = \pi \left(\frac{R}{\sqrt{6}} \right)^2$.

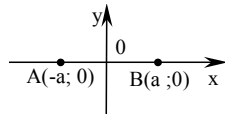


Радиус нашего круга будет равен $\frac{R}{\sqrt{6}}$, а это катет прямоугольного треугольника, гипотенуза которого $\frac{R}{\sqrt{2}}$, а второй катет

$\frac{R}{\sqrt{3}}$, а $\frac{R}{\sqrt{3}}$ — это радиус описанной окружности вокруг равностороннего треугольника со стороной R .

№ 1291.

Введем систему координат, как показано на рисунке.



При центральной симметрии:

$$B \rightarrow O - OB = 0 - a = -a = A; \quad A \rightarrow O + OA = 0 + a = B.$$

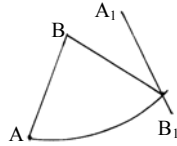
При осевой симметрии относительно середины АВ аналогично.

$$B \rightarrow O - OB = 0 - a = -a = A; \quad A \rightarrow O + OA = 0 + a = B.$$

№ 1292.

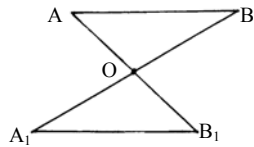
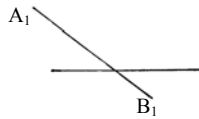
Приведем контрпримеры того, что кроме симметрии относительно прямой и поворота вокруг точки, никаких других отображений нет, которые бы переводили отрезок в равный ему отрезок.

1) поворот на угол φ : если эти отрезки не пересекаются, то это невозможно.



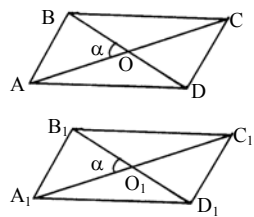
A ————— B

2) параллельный перенос: если они не параллельны, то это невозможно.



3) симметрия относительно точки: два параллельных отрезка.

№ 1293.



Так как $AC = A_1C_1$ и $BD = B_1D_1$, то
 $AO = OC = A_1O_1 = O_1C_1$; $BO = OD = B_1O_1 = O_1D_1$;
 $\alpha = \angle AOB = \angle COD = \angle A_1O_1B_1 = \angle C_1O_1D_1$ (как вертикальные);

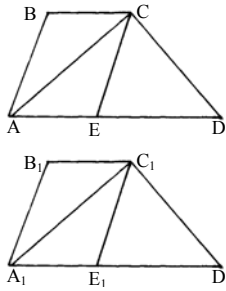
$$\angle BOC = 180^\circ - \alpha = \angle AOD = \angle B_1O_1C_1 = \angle A_1O_1D_1.$$

Таким образом, мы получим 4 равных треугольника, а значит $ABCD = A_1B_1C_1D_1$.

№ 1294.

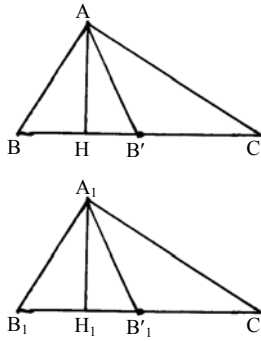
Отложим от точек A и A₁ отрезок AE = BC (A₁E₁ = B₁C₁) и соединим с вершиной C (C₁).

$\triangle ECD = \triangle E_1C_1D_1$ (по трем сторонам, т.к. CE = AB = A₁B₁ = C₁E₁).



Так как в равных треугольниках соответствующие элементы равны, $\angle CED = \angle C_1E_1D_1$ и $\angle AEC = \angle A_1E_1C_1$ (смежные с $\angle CED = \angle C_1E_1D_1$).
 Таким образом,
 $\triangle ACE = \triangle A_1C_1E_1$ (по двум сторонам и углу между ними);
 $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ (по трем сторонам)
 Трапеции составлены нами из трех равных треугольников, значит, они равны.

№ 1295.



$BA = B_1A_1$; $AC = A_1C_1$; $\angle B - \angle C = \angle B_1 - \angle C_1$.
 Отобразим точку B относительно высоты AH (B_1 относительно A_1H_1); $AB' = AB = A_1B_1 = A_1B_1'$; $\angle B = \angle AB'B = \angle B'AC + \angle C$ (т.к. внешний угол треугольника равен сумме двух других). Аналогично $\angle B_1 = \angle A_1B_1'V_1 = \angle B_1'A_1C_1 + \angle C_1$.

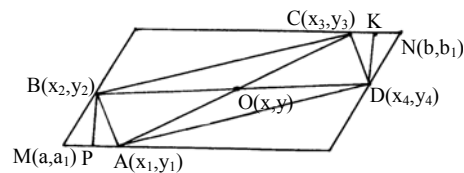
Таким образом, $\angle B'AC = \angle B_1'A_1C_1$.

Таким образом, $\triangle AB'C = \triangle A_1B_1'C_1$ (по двум сторонам и углу между ними).

Таким образом, $\angle AB'C = \angle A_1B_1'C_1$ и $\angle AB'B = \angle A_1B_1'V_1$. Следовательно, $\triangle BAV' = \triangle B_1A_1V_1'$ (т.к. $\triangle ABH = \triangle ABH' = \triangle A_1H_1V_1' = \triangle A_1V_1'H_1$ по гипотенузе и острому углу).

Таким образом, исходные треугольники состоят из двух равных треугольников, а значит они равны.

№ 1296.



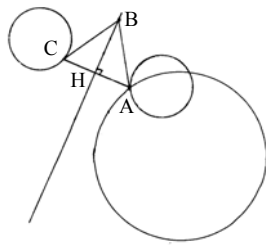
Построим параллелограммы, как показано на рисунке.

Координаты точки пересечения диагоналей:

$$x = \frac{x_1 + x_3}{2} = \frac{x_1 - MP + x_3 + MP}{2} = \frac{a + b}{2}; \quad y = \frac{y_1 + y_3}{2} = \frac{a_1 + b_1}{2},$$

Таким образом, точка пересечения диагоналей вписанного параллелограмма совпадает с точкой пересечения диагоналей исходного.

№ 1297.



Чтобы высота лежала на прямой, необходимо, чтобы основание треугольника было перпендикулярно данной прямой. Таким образом, если прямая будет не между окружностей, то решений не будет.

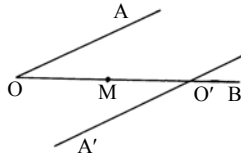
Отразим одну окружность относительно прямой. Если окружность не имеет общих точек, то решений не будет.

Допустим, они пересеклись в некоторой точке А.

Опустим из нее перпендикуляр h на прямую. Затем их этой же точки опустим наклонную к нашей прямой длиной $2h$. Получим точку В удлинив AH в два раза. Получим С.

$\triangle ABC$ – искомый.

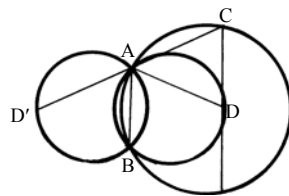
№ 1298.



Построим прямую $O'A'$ симметричную прямой OA относительно точки M . Она пересечет прямую OB в точке O' такой, что $O'M=OM$.

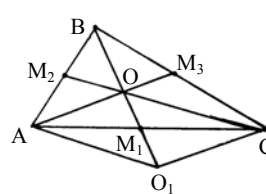
$O'M$ — искомый отрезок.

№ 1299.



Построим окружность симметричную относительно прямой AB , затем проводим линии, параллельные прямой AB до тех пор, пока не найдем такую прямую, что $AC=AD$ ($BC=BD$) (D и C – точки пересечения прямой с окружностями). Затем точку D отображаем относительно прямой AB в точку D' на исходной окружности. Отрезок $D'C$ – искомый.

№ 1300.



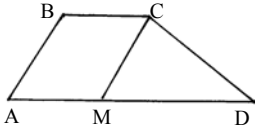
Построим $\triangle AOO_1$ по трем сторонам ($AO = \frac{2}{3} AM_3$; $AO_1 = \frac{2}{3} CM_2$; $OO_1 = \frac{2}{3} M_1B$).

Затем проведем медиану AM_1 ($OM_1 = M_1O_1 = \frac{1}{3} BM_1$) и продлим ее до точки С

($CM_1 = M_1A$), затем продлим сторону OM_1 до точки В ($BO = 2OM_1$), затем соединим вершины А, В и С. $\triangle ABC$ — искомый.

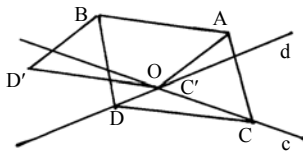
№ 1301.

Построим $\triangle MCD$ по трем сторонам ($MC=AB$), затем продлим MD на вектор \vec{CB} . Получим точку A . Затем, построив окружность с радиусом AB из точки A и с радиусом BC из точки C , отметим точку B (точка их пересечения находится в верхней полуплоскости от прямой AC). $ABCD$ — искомая трапеция.



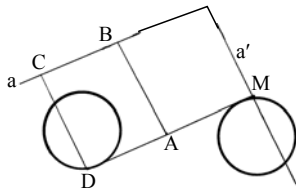
№ 1302.

Перенесем точку C' (точку пересечения прямых s и d) на вектор \vec{AB} . $C' \rightarrow D'$. Затем путем параллельного переноса отрезка $D'C'$ вдоль прямой s находим точку D . $ABCD$ — искомый параллелограмм.

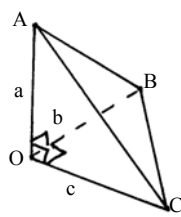


№ 1303.

Отобразим прямую $a \rightarrow a'$ путем поворота вокруг точки A на 90° . Затем путем симметрии отобразим окружность относительно точки A . Найдем точку пересечения M новой окружности с прямой a' . Затем путем поворота точки M вокруг точки A на 90° (в обратную сторону) мы получим точку B на прямой a . После точку M путем центральной симметрии отобразим на исходную окружность. Получим точку V . Затем отложим от точки V вектор \vec{AD} , таким образом, $V \rightarrow C$. $ABCD$ — искомый квадрат.



№ 1304.



Пусть $OA=a$; $OC=c$; $OB=b$. Площадь трех верхних граней равна: $\frac{1}{2}(cb + ba + ac)$, а сумма квадратов

этих площадей: $\frac{1}{4}(c^2b^2 + b^2a^2 + a^2c^2)$.

$$AC^2 = a^2 + c^2; \quad AB^2 = a^2 + b^2; \quad CB^2 = c^2 + b^2.$$

По теореме косинусов:

$$a^2 + c^2 = a^2 + b^2 + c^2 + b^2 - 2\sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + b^2)} \cos ABC;$$

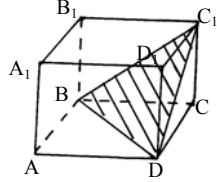
$$\cos ABC = \frac{b^2}{\sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + b^2)}}.$$

$$S = \frac{1}{4} AB^2 \cdot BC^2 \cdot \sin^2 ABC = \frac{1}{4} (a^2 + b^2)(c^2 + b^2) \left(1 - \frac{b^4}{(a^2 + b^2)(b^2 + c^2)} \right) =$$

$$= \frac{1}{4} ((a^2 + b^2)(c^2 + b^2) - b^4) = \frac{1}{4} (a^2 c^2 + a^2 b^2 + b^2 c^2 + b^4 - b^4) = \frac{1}{4} (a^2 c^2 + a^2 b^2 + b^2 c^2),$$

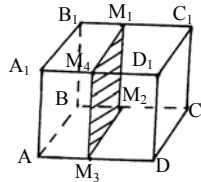
что и требовалось доказать.

№ 1305.



1) Пусть сторона куба равна a , тогда $DC_1 = a\sqrt{2} = BD = BC$ (по теореме Пифагора).

Таким образом, BC_1D — правильный треугольник.



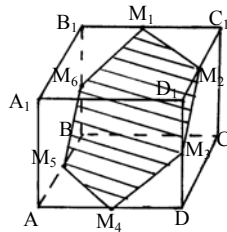
2) $M_1M_2 \parallel M_3M_4 \parallel AA_1$;

$M_1M_2 = M_3M_4 = AA_1$;

$M_1M_4 \parallel M_2M_3 \parallel AB$;

$M_1M_4 = M_2M_3 = AB$.

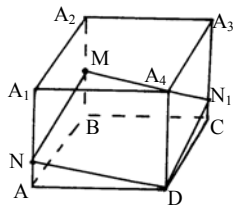
Таким образом, сечение $M_1M_2M_3M_4$ — квадрат.



3) Проводим сечение плоскостью $M_1M_2M_5$, где $B_1M_1 = M_1C_1 = C_1M_2 = AM_5$.

Таким образом, $M_1M_2 = M_2M_3 = M_3M_4 = M_4M_5 = M_5M_6$ и это получается правильный шестиугольник.

№ 1306.



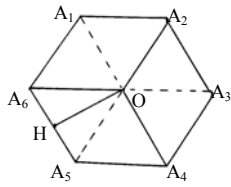
Пусть паук сидит в точке M (на ребре BB_1), а муха в точке D .

Если развернуть боковую поверхность куба, то кратчайшее расстояние от точки M до точки D будет, очевидно, прямая, которая пересекает ребро AA_1 в точке N , такой, что

$$AN = \frac{1}{2} BM.$$

Таким образом, паук должен идти по прямой до точки N (или N_1), а затем по прямой до точки D .

№ 1307.



Спроецируем куб на плоскость так, чтобы диагональ его была перпендикулярна этой плоскости: $A_3A_6 = \sqrt{a^2 + a^2 + a^2} = a\sqrt{3}$. Таким образом, сторона шестиугольника равна $\frac{\sqrt{3}}{2}$ и $OH = \sqrt{\frac{3}{4}a^2 - \frac{3}{16}a^2} = \frac{3}{4}a$. Таким образом, радиус вписанной окружности равен $\frac{3}{4}a$, т.е. в нее можно вписать квадрат стороной $\frac{3\sqrt{2}}{4}a$, что явно больше a . Что и требовалось доказать.

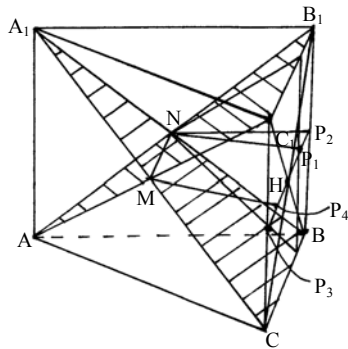
№ 1308.

Пусть $AC=a$, $A_1A=h$.

$$V_1 = V_{MNCC_1DB_1B}, \quad V_2 = V_{A_1B_1C_1MN} = V_{ABCMN}, \quad V_3 = V_{AA_1MN}$$

Так как все грани составляющие эти фигуры равны между собой:

$$V = \frac{1}{2}a \cdot a \sin 60^\circ \cdot h = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2h; \quad V_1 + V_2 = \frac{1}{3}a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot ah = \frac{\sqrt{3}}{6}a^2h = \frac{2}{3}V;$$



$$V_2 + V_3 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}h \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a \cdot a = \frac{\sqrt{3}}{12}a^2h.$$

$$\text{Таким образом, } V_1 - V_3 = \frac{1}{3}V.$$

Разобьем V_1 на 3 фигуры плоскостями, перпендикулярными основанию и проходящими через точку P_1 (середина NP_2) и P_4 (середина P_3N). Получится две четырех угольных пирамиды (одинакового объема) и треугольная призма.

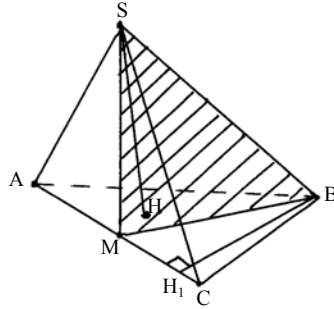
$$NP_2 = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}a; \quad MN = \frac{1}{2}a \text{ (средние линии); } NP_1 = NP_2 \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4}a.$$

$$V_{\text{пирамиды}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a}{4} \cdot h \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}a = \frac{\sqrt{3}}{48}a^2h = \frac{1}{12}V;$$

$$V_{\text{призмы}} = \frac{a}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot NP_1 \cdot AA_1 = \frac{a}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}ah = \frac{\sqrt{3}}{16}a^2h = \frac{1}{4}V;$$

$$V_1 = 2 \cdot \frac{1}{12}V + \frac{1}{4}V = \frac{5}{12}V; \quad V_3 = -\frac{1}{3}V + \frac{5}{12}V = \frac{1}{12}V; \quad V_2 = \frac{1}{3}V - \frac{1}{12}V = \frac{1}{4}V.$$

№ 1309.

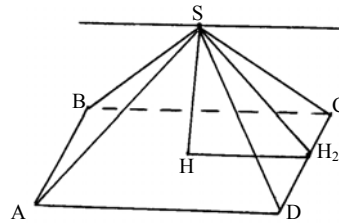


$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{1}{3} \cdot AM \cdot BH_1 \cdot \frac{1}{2} \cdot SH = \\ &= \frac{1}{6} AM \cdot BH_1 \cdot SH_2 = \\ &= \frac{1}{6} MC \cdot BH_1 \cdot SH = V_2 \end{aligned}$$

где V_1 – объем $ABMS$
 V_2 – объем $MBCS$, таким образом,
 $V_1 = V_2$, что и требовалось доказать.

№ 1310.

Объем будет равен объему цилиндра высотой a и радиусом SH без двух конусов высотой $a/2$ и радиусом SH .



$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{a}{2SH_2}; \quad SH_2 = \frac{a}{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} = \frac{a}{2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$$

$HH_2 = \frac{a}{2}$. Таким образом,

$$SH = \sqrt{\frac{a^2}{4} \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} - \frac{a^2}{4}} = \frac{a}{2} \sqrt{\operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} - 1};$$

$$V_{\text{ц}} = \pi \cdot r^2 \cdot h = \pi \frac{a^2}{4} \left(\operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} - 1 \right) \cdot a = \frac{\pi a^3}{4} \left(\operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} - 1 \right);$$

$$2V_{\text{к}} = \frac{2}{3} \pi r^2 \cdot h = \frac{2}{3} \pi \frac{a^2}{4} \left(\operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} - 1 \right) \frac{a}{2} = \frac{\pi a^3}{12} \left(\operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} - 1 \right);$$

$$V_{\text{ц}} - 2V_{\text{к}} = \frac{\pi a^3}{6} \left(\operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} - 1 \right).$$