

# **Домашняя работа по геометрии за 9 класс**

**к учебнику «Геометрия. 7-9 класс»  
А.В. Погорелов, М.: «Просвещение», 2001 г.**

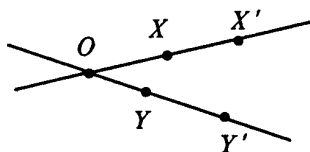
учебно-практическое  
пособие

## **СОДЕРЖАНИЕ**

|                                    |           |
|------------------------------------|-----------|
| <b>§ 11. Подобие фигур</b>         | <b>3</b>  |
| <b>§ 12. Решение треугольников</b> | <b>39</b> |
| <b>§ 13. Многоугольники</b>        | <b>60</b> |
| <b>§ 14. Площади фигур</b>         | <b>89</b> |

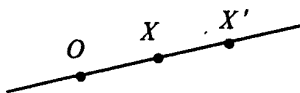
## § 11. ПОДОБИЕ ФИГУР

- № 1. При гомотетии точка  $X$  переходит в точку  $X'$ , а точка  $Y$  — в точку  $Y'$ . Как найти центр гомотетии, если точки  $X, X', Y, Y'$  не лежат на одной прямой?<sup>1</sup>



По определению преобразования гомотетии — центр гомотетии лежит на одном луче с данными точками, поэтому точка пересечения прямых  $XX'$  и  $YY'$  является центром. Эти прямые пересекутся, так как точки  $X, X', Y$  и  $Y'$  не лежат на одной прямой, по условию.

- № 2. При гомотетии точка  $X$  переходит в точку  $X'$ . Постройте центр гомотетии если коэффициент гомотетии равен 2.



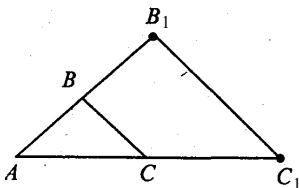
1) Так как искомым центр гомотетии лежит на одной прямой с точками  $X$  и  $X'$ , то для нахождения центра проведем прямую  $XX'$ .

---

<sup>1</sup> Условия заданий приводятся в учебных целях и в необходимом объеме — как иллюстративный материал. Имя автора и название цитируемого издания указаны на титульном листе данной книги. (Ст. 19 п. 2 Закона РФ об авторском праве и смежных правах от 9 июня 1993 г.)

2) Так как  $k = 2$ , то по определению гомотетии  $OX' = 2OX$ , где  $O$  — центр гомотетии, значит, отложим от точки  $X'$  отрезок  $OX' = 2OX$  и получим искомую точку  $O$ .

**№ 3.** Начертите треугольник. Постройте гомотетичный ему треугольник, приняв за центр гомотетии одну из его вершин и коэффициент гомотетии, равным 2.



Построим  $\triangle ABC$  и примем точку  $A$  — центр гомотетии. На продолжении  $AB$  отложим отрезок  $AB_1 = 2AB$ , получим точку  $B_1$ , гомотетичную точке  $B$ .

Аналогично, на продолжении  $AC$  отложим отрезок  $AC_1 = 2AC$ , получим точку  $C_1$ , гомотетичную точке  $C$ .

Проведем отрезки  $AB_1$ ,  $AC_1$ ,  $BC_1$  и получим  $\triangle AB_1C_1$ , гомотетичный  $\triangle ABC$  с  $k = 2$ .

**№ 5.** Что представляет собой фигура, подобная треугольнику?

Фигура, подобная треугольнику, также является треугольником.

**№ 6.** У подобных треугольников  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$   $\angle A = 30^\circ$ ,  $AB = 1$  м,  $BC = 2$  м,  $B_1C_1 = 3$  м. Чему равны угол  $A_1$  и сторона  $A_1B_1$ ?

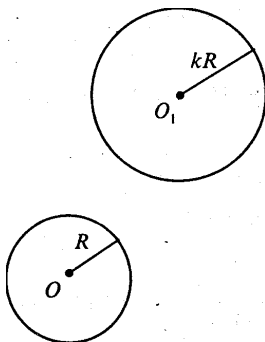
Так как подобие сохраняет углы, то  $\angle A = \angle A_1 = 30^\circ$ . Далее  $B_1C_1 = kBC$ , а значит:

$$k = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{3}{2} = 1,5.$$

Также  $A_1B_1 = kAB = 1,5 \cdot 1 = 1,5$  (м).

Ответ:  $\angle A_1 = 30^\circ$ ,  $A_1B_1 = 1,5$  (м).

№ 7. Докажите, что фигура, подобная окружности, есть окружность.



Докажем, что отношение радиусов окружностей равно  $k$ . Тогда рассмотрим преобразование подобия с этим коэффициентом  $k$ , при котором точка  $O$  переходит в точку  $O_1$ . Точки, находящиеся на расстоянии  $R$  от точки  $O$  (т.е. точки первой окружности), будут находиться на расстоянии  $kR$  от точки  $O_1$ , т.е. будут лежать на окружности с радиусом  $kR$ . А, значит, окружность перейдет в окружность. Что и требовалось доказать.

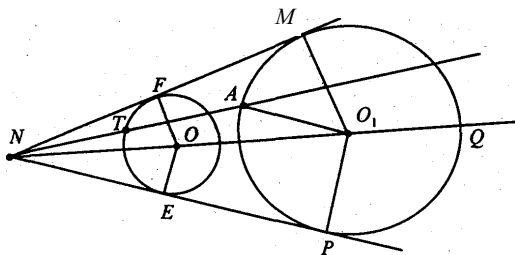
№ 8\*. Даны угол и внутри его точка  $A$ . Постройте окружность, касающуюся сторон угла и проходящую через точку  $A$ .

Построение:

- 1) Проведем биссектрису угла  $NQ$ .
- 2) Отметим на ней точку  $O$ , опустим перпендикуляры  $OF$  и  $OE$  на стороны угла.
- 3) Построим окружность с центром в точке  $O$  и радиусом  $OE$ .
- 4) Проведем луч  $NA$ , который пересекает окружность в точке  $T$ .
- 5) Проведем прямую  $AO_1$ , так что  $AO_1 \parallel TO$ . Тогда  $\triangle NTO$  и  $\triangle NAO_1$  подобны, так что

$$\frac{AO_1}{TO} = \frac{AN}{NT} = \frac{O_1N}{NO} = k$$

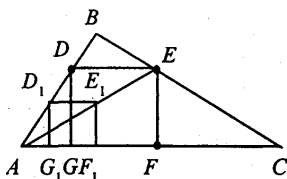
6) Построим окружность с центром в точке  $O_1$  и радиусом  $O_1A_1$ .



Докажем, что эта окружность искомая, то есть  $AO_1 = O_1M = O_1P$ , где  $O_1M$  и  $O_1P$  — перпендикуляры из точки  $O_1$  на стороны угла.

Так как  $\Delta NMO_1$  и  $\Delta NFO_1$  подобны, то  $\frac{MO_1}{FO} = \frac{O_1N}{NO} = k$ . То есть  $\frac{MO_1}{OT} = k$ ,  $MO_1 = kOT = AO_1$ . Равенство  $O_1M = O_1P$  следует из равенства  $\Delta NMO_1$  и  $\Delta NPO_1$ . Значит, окружность с центром в точке  $O_1$  и радиусом  $O_1A$  искомая.

**№ 9\*.** Впишите в данный треугольник квадрат, у которого две вершины лежат на одной стороне, а две другие вершины — на двух других сторонах.



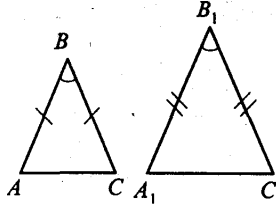
Сначала построим квадрат  $D_1E_1F_1G_1$  так, чтобы вершины  $F_1$  и  $G_1$  лежали на стороне  $AC$ , а вершина  $D_1$  — на стороне  $AB$ .

Гомотетия относительно вершины  $A$ , переводящая точку  $E_1$  в точку  $E$ , лежащую на стороне  $BC$ , переводит  $D_1$  в  $D$ ,  $F_1$  в  $F$ ,  $G_1$  в  $G$ .

Так как гомотетия переводит фигуру в подобную фигуру, то четырехугольник  $DEFG$  — искомый квадрат.

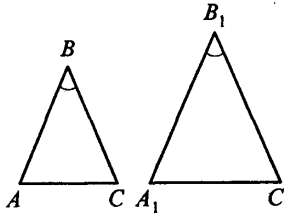
**№ 10.** Докажите подобие равнобедренных треугольников с равными углами при вершинах, противолежащих основаниям.

Пусть  $\angle B = \angle B_1$ . И  $\triangle ABC$  и  $\triangle A_1B_1C_1$  — равнобедренные.



Тогда  $\angle A = \angle A_1$  и  $\angle C = \angle C_1$  (так как  $\angle A = \angle C$  и  $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$  и  $\angle A = \angle C = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle B)$ . Аналогично  $\angle A_1 = \angle C_1 = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle B_1)$ . Так что  $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ , (по двум углам). Что и требовалось доказать.

**№ 11.** У двух равнобедренных треугольников углы между боковыми сторонами равны. Боковая сторона и основание одного треугольника равны 17 см и 10 см, основание другого равно 8 см. Найдите его боковую сторону.



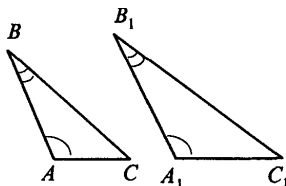
Пусть  $\triangle ABC$  и  $\triangle A_1B_1C_1$  — равнобедренные;  $\angle B = \angle B_1$ ,  $AC = 8$  см,  $A_1C_1 = 10$  см,  $A_1B_1 = 17$  см. Тогда  $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$  (следует из задачи № 10), значит

$$\frac{AC}{A_1C_1} = \frac{AB}{A_1B_1}.$$

$$\text{то есть } AB = \frac{AC \cdot A_1B_1}{A_1C_1} = \frac{8 \cdot 17}{10} = 13,6 \text{ см.}$$

Ответ:  $AB = 13,6$  см.

- № 12.** У треугольников  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$   $\angle A = \angle A_1$ ,  $\angle B = \angle B_1$ ,  $AB = 5$  м,  $BC = 7$  м,  $A_1B_1 = 10$  м,  $A_1C_1 = 8$  м. Найдите остальные стороны треугольников.



$\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ , (по двум углам). Значит

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1}.$$

Так что

$$B_1C_1 = \frac{A_1B_1 \cdot BC}{AB} = \frac{10 \cdot 7}{5} = 14 \text{ м и } AC = \frac{AB \cdot A_1C_1}{A_1B_1} = \frac{5 \cdot 8}{10} = 4 \text{ м.}$$

Ответ:  $AC = 4$  м,  $B_1C_1 = 14$  м.

- № 13.** Решите задачу 12 при условии, что  $AB = 16$  см,  $BC = 20$  см,  $A_1B_1 = 12$  см,  $AC - A_1C_1 = 6$  см.

$\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$  (по двум углам). Далее

$$k = \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{16}{12} = \frac{4}{3}$$

— коэффициент подобия, значит,  $AC = \frac{4}{3} A_1C_1$ , и, поскольку

$$AC - A_1C_1 = 6,$$

$$\frac{4}{3} A_1C_1 - A_1C_1 = 6; \frac{1}{3} A_1C_1 = 6; A_1C_1 = 18 \text{ см.}$$

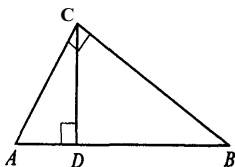


Тогда  $AC = 18 + 6 = 24$  см. Далее

$$B_1C_1 = \frac{3}{4} \cdot BC = \frac{3 \cdot 20}{4} = 15 \text{ см.}$$

Ответ:  $AC = 24$  см,  $A_1C_1 = 18$  см,  $B_1C_1 = 15$  см.

- № 14. Докажите, что высота прямоугольного треугольника, опущенная из вершины прямого угла, разбивает его на два треугольника, подобные исходному.



Пусть  $\triangle ABC$  — прямоугольный,  $\angle C = 90^\circ$ ,  $CD$  — высота.

Рассмотрим  $\triangle ABC$  и  $\triangle ACD$ :

а)  $\angle ACB = \angle CDA = 90^\circ$ .

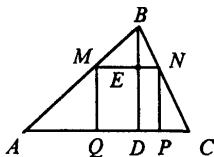
б)  $\angle CAB = \angle DAC$  (общий угол).

Значит,  $\triangle ABC \sim \triangle ACD$  (по двум углам).

Аналогично доказывается, что  $\triangle ABC \sim \triangle CBD$ .

- № 15. Прямая, параллельная стороне  $AB$  треугольника  $ABC$ , пересекает его сторону  $AC$  в точке  $A_1$ , а сторону  $BC$  в точке  $B_1$ . Докажите, что  $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C$ .  
Задача решена в учебнике на стр. 149 п. 103.

- № 16. В треугольнике с основанием  $a$  и высотой  $h$  вписан квадрат так, что две его вершины лежат на основании треугольника, а другие две — на боковых сторонах. Вычислите сторону квадрата.



Пусть в  $\triangle ABC$   $BD$  — высота. Далее  $MNPQ$  — квадрат,  $N \in BC$ ,  $M \in AB$ ,  $P$  и  $Q \in AC$ . Тогда  $AC = a$ ,  $BD = h$  (по условию).

Рассмотрим  $\triangle ABC$  и  $\triangle MBN$ :

а)  $\angle ABC = \angle MBN$  (общий угол);

б)  $\angle BAC = \angle BMN$  (как односторонние углы при параллельных прямых  $AC$  и  $MN$  и секущей  $AB$ ).

Следовательно,  $\triangle ABC \sim \triangle MBN$  (по двум углам). Значит стороны и высоты треугольников  $ABC$  и  $MBN$  пропорциональны. То есть:

$$\frac{BE}{BD} = \frac{MN}{AC}.$$

Пусть  $x$  — сторона квадрата. Тогда  $BE = h - x$ . То есть

$$\frac{h-x}{h} = \frac{x}{a},$$

$$a(h-x) = hx,$$

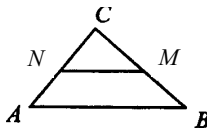
$$ah - ax = hx,$$

$$ah = x(h+a),$$

$$x = \frac{ah}{h+a}.$$

Ответ:  $\frac{ah}{h+a}$ .

**№ 17.** Прямая, параллельная стороне  $AB$  треугольника  $ABC$ , делит его сторону  $AC$  в отношении  $m : n$ , считая от вершины  $C$ . В каком отношении она делит сторону  $BC$ ?

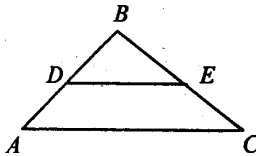


Пусть  $MN \parallel AB$ ;  $\frac{CN}{AN} = \frac{m}{n}$ . Из задачи № 15 следует, что  $\triangle ABC \sim \triangle CNM$ . Значит  $\frac{AC}{CN} = \frac{BC}{CM}$ , но  $AC = CN + AN$ ,  $BC = MB + CM$ , имеем  $\frac{AN+CN}{CN} = \frac{MB+CM}{CM}$  или  $\frac{AN}{CN} + 1 = \frac{MB}{CM} + 1$  то есть  $\frac{AN}{CN} = \frac{MB}{CM}$ . Так что

$$\frac{CM}{BM} = \frac{CN}{NA} = \frac{m}{n}.$$

Ответ:  $\frac{m}{n}$ .

**№ 18.** В треугольнике  $ABC$  проведен отрезок  $DE$ , параллельный стороне  $AC$  (конец  $D$  отрезка лежит на стороне  $AB$ , а  $E$  — на стороне  $BC$ ). Найдите  $AD$ , если  $AB = 16$  см,  $AC = 20$  см и  $DE = 15$  см.



Из задачи № 15 следует, что  $\triangle ABC \sim \triangle DBE$ . Тогда:

$$\frac{AB}{BD} = \frac{AC}{DE}.$$

Далее  $BD = AB - AD$ , так что:

$$\frac{AB}{AB - AD} = \frac{AC}{DE}, \quad \frac{16}{16 - AD} = \frac{20}{15},$$

$$240 = 320 - 20AD, \quad 20AD = 80; \quad AD = 4 \text{ см.}$$

Ответ:  $AD = 4$  см.

№ 19. В задаче 18 найдите отношение  $AD : BD$ , если известно, что  $AC : DE = 55:28$ .

Так как  $\frac{AB}{BD} = \frac{AC}{DE} = \frac{55}{28}$  и  $AB = BD + AD$ , то

$$\frac{BD + AD}{BD} = \frac{55}{28},$$

$$1 + \frac{AD}{BD} = \frac{55}{28},$$

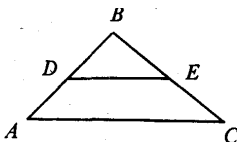
$$\frac{AD}{BD} = \frac{27}{28}.$$

Ответ:  $\frac{AD}{BD} = \frac{27}{28}$ .

№ 20. Найдите длину отрезка  $DE$  в задаче 18, если:

1)  $AC = 20$  см,  $AB = 17$  см и  $BD = 11,9$  см;

2)  $AC = 18$  дм,  $AB = 15$  дм и  $AD = 10$  дм.



1) Имеем:  $\frac{AB}{BD} = \frac{AC}{DE}$ ,

откуда получаем, что:

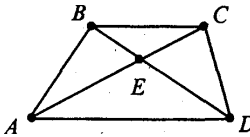
$$DE = \frac{AC \cdot BD}{AB} = \frac{20 \cdot 11,9}{17} = 14 \text{ см.}$$

2)  $BD = AB - AD$ , то есть

$$BD = 15 - 10 = 5 \text{ дм и } DE = \frac{AC \cdot BD}{AB} = \frac{18 \cdot 5}{15} = 6 \text{ дм.}$$

Ответ: 1) 14 см; 2) 6 дм.

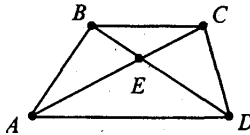
- № 21. Диагонали трапеции ABCD пересекаются в точке E. Докажите подобие треугольников BCE и DAE.



Рассмотрим  $\triangle BCE$  и  $\triangle DAE$ :

- а)  $\angle BEC = \angle AED$  (как вертикальные углы);  
 б)  $\angle CBE = \angle EDA$  (как накрест лежащие углы при пересечении параллельных прямых AD и BC секущей BD). Значит,  $\triangle BCE \sim \triangle DAE$  (по двум углам). Что и требовалось доказать.

- № 22. Найдите отношение отрезков диагонали трапеции, на которые она разбивается другой диагональю, если основания трапеции относятся как  $m : n$ .

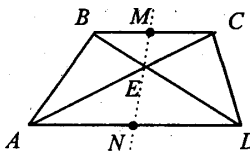


$\triangle AED \sim \triangle BCE$  (см. решение № 21). Значит

$$\frac{AE}{EC} = \frac{AD}{BC} = \frac{m}{n}.$$

Ответ:  $\frac{m}{n}$

- № 23. Прямая, проходящая через точку пересечения диагоналей трапеции, делит одно основание в отношении  $m : n$ . В каком отношении она делит другое основание?



Пусть  $\frac{BM}{MC} = \frac{m}{n}$ .

Рассмотрим  $\triangle MCE$  и  $\triangle AEN$ :

1)  $\angle MEC = \angle AEN$  (углы вертикальные);

2)  $\angle MCE = \angle EAN$  (как накрест лежащие углы при пересечении параллельных прямых  $MC$  и  $AN$  секущей  $AC$ ).

Значит  $\triangle MCE \sim \triangle AEN$  (по двум углам). Тогда

$$\frac{MC}{AN} = \frac{ME}{NE}.$$

Аналогично доказывается, что  $\triangle BME \sim \triangle DNE$ , а, значит,

$$\frac{MB}{ND} = \frac{ME}{NE}.$$

Так что  $\frac{ME}{NE} = \frac{MC}{AN} = \frac{MB}{ND}$ , значит,

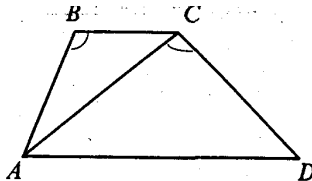
$$MC \cdot ND = MB \cdot AN;$$

$$\frac{AN}{ND} = \frac{MC}{MB} = \frac{n}{m}.$$

Ответ:  $\frac{n}{m}$ .

**№ 24.** В трапеции  $ABCD$  с диагональю  $AC$  углы  $ABC$  и  $ACD$  равны. Найдите диагональ  $AC$ , если основания  $BC$  и  $AD$  соответственно равны 12 м и 27 м.

Рассмотрим  $\triangle ACD$  и  $\triangle CBA$ :



а)  $\angle ACD = \angle ABC$  (по условию);

б)  $\angle CAD = \angle BCA$  (как накрест лежащие углы при пересечении параллельных прямых  $AD$  и  $BC$  секущей  $AC$ ).

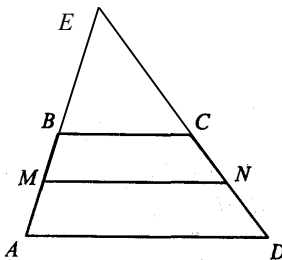
Так что  $\triangle ACD \sim \triangle CBA$ . Поэтому:  $\frac{AC}{CB} = \frac{AD}{AC}$ , то есть

$$AC^2 = CB \cdot AD;$$

$$AC = \sqrt{CB \cdot AD} = \sqrt{12 \cdot 27} = \sqrt{324} = 18 \text{ см.}$$

Ответ:  $AC = 18$  см.

**№ 25.** Линия, параллельная основаниям трапеции, делит одну боковую сторону в отношении  $m : n$ . В каком отношении делит она вторую боковую сторону?



Пусть  $ABCD$  — трапеция,  $AD$  и  $BC$  — ее основания,  $MN \parallel AD \parallel BC$ ,

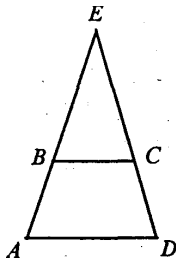
$$\frac{AM}{MB} = \frac{m}{n}.$$

Боковые стороны трапеции пересекаются в точке  $E$ . По теореме о пропорциональных отрезках, параллельные прямые  $AD$ ,  $MN$  и  $BC$ , пересекающие стороны  $\angle E$  отсекают от сторон пропорциональные отрезки, так что:

$$\frac{AM}{MB} = \frac{DN}{NC} = \frac{m}{n}.$$

Ответ:  $\frac{m}{n}$ .

- № 26. Продолжения боковых сторон  $AB$  и  $CD$  трапеции  $ABCD$  пересекаются в точке  $E$ . Найдите стороны треугольника  $AED$ , если  $AB = 5$  см,  $BC = 10$  см,  $CD = 6$  см,  $AD = 15$  см.



Рассмотрим  $\triangle AED$  и  $\triangle BEC$ . Так как  $AD \parallel BC$ , то эти треугольники подобны (см решение задачи № 15). Значит,

$$\frac{AE}{BE} = \frac{AD}{BC},$$

но  $AE = AB + BE$ , так что

$$\frac{AB + BE}{BE} = \frac{AD}{BC}; \quad \frac{5 + BE}{BE} = \frac{15}{10};$$

$$50 + 10BE = 15BE; \quad 5BE = 50; \quad BE = 10 \text{ см.}$$

Тогда  $AE = AB + BE = 5 + 10 = 15$  см.

Аналогично из подобия треугольников  $AEB$  и  $BEC$  имеем:

$$\frac{DE}{CE} = \frac{AD}{BC}.$$

А, так как  $DE = CD + CE$ , то

$$\frac{CD + CE}{CE} = \frac{AD}{BC}; \quad \frac{6 + CE}{CE} = \frac{15}{10};$$

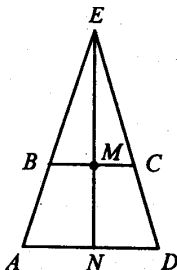
$$15CE = 60 + 10CE; \quad 5CE = 60; \quad CE = 12 \text{ см,}$$

$$DE = CE + CD = 6 + 12 = 18 \text{ см.}$$

Ответ:  $AE = 15$  см,  $DE = 18$  см.



- № 27. Найдите высоту треугольника AED из задачи № 26, опущенную на сторону AD, если BC=7 см, AD=21 см и высота трапеции равна 3 см.



Пусть EN — высота треугольника AED, MN — высота трапеции.

$\triangle AED \sim \triangle BEC$  (было доказано в задаче № 26). Поэтому

$$\frac{AE}{BE} = \frac{AD}{BC} = \frac{21}{7} = 3.$$

Далее рассмотрим  $\triangle AEN$  и  $\triangle BEM$ .

а)  $\angle A = \angle B$  (углы при пересечении параллельных прямых BM и AN секущей AB);

б)  $\angle N = \angle M = 90^\circ$ .

Тогда,  $\triangle AEN \sim \triangle BEM$  и

$$\frac{EN}{EM} = \frac{AE}{BE} = 3.$$

Но  $EN = EM + MN$ , так что:

$$\frac{EM + 3}{EM} = \frac{3}{1};$$

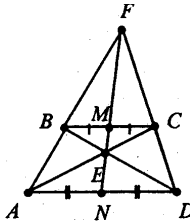
$$3EM = EM + 3; 2EM = 3; EM = 1,5 \text{ см,}$$

тогда  $EN = EM + MN = 1,5 + 3 = 4,5$  см.

Ответ: 4,5 см.

- № 28\*. Диагонали трапеции пересекаются в точке E, а продолжения боковых сторон пересекаются в точке F.

Докажите, что прямая EF делит основания трапеции пополам.



$\triangle FMC \sim \triangle FND$  (так как  $\angle FMC = \angle FND$  — односторонние углы при  $BC \parallel AD$  и  $\angle NFD$  — общий). Так что  $\frac{MC}{ND} = \frac{FM}{FN}$ .

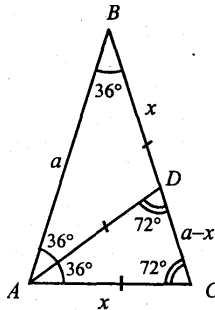
Аналогично  $\triangle FMB \sim \triangle FNA$  и  $\frac{BM}{AN} = \frac{FM}{FN}$ , так что

$$\frac{MC}{MD} = \frac{BM}{AN}, \text{ то есть } \frac{BM}{MC} = \frac{AN}{ND} = k.$$

В задаче № 23 было доказано, что  $\frac{BM}{MC} = \frac{AN}{ND} = \frac{1}{k}$ , так что  $k = 1$  и  $BM = MC$ ;  $ND = AN$ . Что и требовалось доказать.

**№ 29\*.** У равнобедренного треугольника ABC с основанием AC и противолежащим углом  $36^\circ$  проведена биссектриса AD.

- 1) Докажите подобие треугольников ABC и CAD.
- 2) Найдите основание треугольника ABC, если его боковая сторона равна  $a$ .  $AB = BC = a$ .



1) Так как  $\angle B = 36^\circ$ , то

$$\angle BAC = \angle ACB = (180^\circ - 36^\circ) : 2 = 72^\circ.$$

Поскольку AD — биссектриса  $\angle A$ , то:

$$\angle CAD = \angle DAB = 72^\circ : 2 = 36^\circ.$$

Рассмотрим  $\triangle ABC$  и  $\triangle CAD$ . Так как

а)  $\angle BAC = \angle ACB = 72^\circ$ ;

б)  $\angle ABC = \angle CAD = 36^\circ$ .

Значит,  $\triangle ABC \sim \triangle CAD$  (по двум углам). Что и требовалось доказать.

2) Из подобия треугольников ABC и ACD следует:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{CD}.$$

Пусть  $BD = x$  см, следовательно  $DC = a - x$ .

Далее  $BD = AD = AC$  (стороны равнобедренных треугольников), то есть  $BD = AD = AC = x$  см.

Подставляя в пропорцию:  $\frac{a}{x} = \frac{x}{a-x}$ , получим

$$x^2 = a^2 - ax, x^2 + ax - a^2 = 0,$$

$$D = a^2 + 4a^2 = 5a^2, x_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{5a^2}}{2},$$

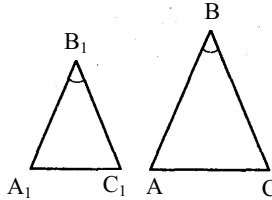
$x_1 = \frac{-a - a\sqrt{5}}{2} = -\frac{a(1+\sqrt{5})}{2} < 0$ , не удовлетворяет условию задачи, так как  $x > 0$ .

$$x_2 = \frac{-a + a\sqrt{5}}{2} = \frac{a\sqrt{5} - a}{2} = \frac{a(\sqrt{5} - 1)}{2} > 0.$$

Значит,  $AC = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} a$  см.

Ответ:  $AC = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} a$ .

- № 30.** Углы  $B$  и  $B_1$  треугольников  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$  равны. Стороны треугольника  $ABC$ , прилежащие к углу  $B$ , в 2,5 раза больше сторон треугольника  $A_1B_1C_1$ , прилежащих к углу  $B_1$ . Найдите  $AC$  и  $A_1C_1$ , если их сумма равна 4,2 м.



$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = 2,5 \text{ и } \angle B = \angle B_1, \text{ так что } \triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$$

(по признаку подобия треугольников) с коэффициентом подобия, равным 2,5.

Пусть  $A_1C_1 = x$  м, следовательно  $AC = 2,5x$  м, но

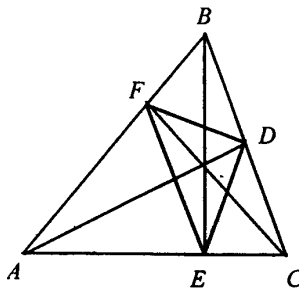
$$A_1C_1 + AC = 4,2 \text{ м,}$$

Так что  $x + 2,5x = 4,2$ ,  $3,5x = 4,2$ ,  $x = 1,2$  м. Тогда,  $A_1C_1 = 1,2$  м, следовательно

$$AC = 4,2 - A_1C_1 = 4,2 - 1,2 = 3 \text{ м.}$$

Ответ.  $A_1C_1 = 1,2$  м,  $AC = 3$  м.

- № 32\*.** В остроугольном треугольнике  $ABC$  проведены высоты  $AD$ ,  $BE$ ,  $CF$ . Найдите углы треугольника  $DEF$ , зная углы треугольника  $ABC$ .



Из предыдущей задачи получаем, что  $\triangle FBD \sim \triangle ABC$ , следовательно,  $\angle BDF = \angle A$ ,  $\angle BFD = \angle C$ .

Далее  $\triangle DCE \sim \triangle ABC$  так, что  $\angle CDE = \angle A$  и  $\angle CED = \angle B$ .

$$\angle D = 180^\circ - (\angle BDF + \angle CDE) = 180^\circ - (\angle A + \angle A) = 180^\circ - 2\angle A.$$

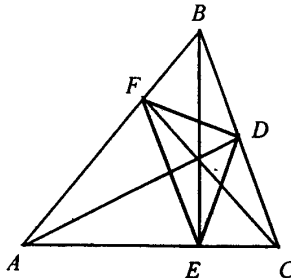
Так как  $\triangle AEF \sim \triangle ABC$ , то  $\angle AEF = \angle B$ ,  $\angle AFE = \angle C$ . Так что:

$$\angle E = 180^\circ - (\angle CED + \angle AEF) = 180^\circ - (\angle B + \angle B) = 180^\circ - 2\angle B.$$

$$\angle F = 180^\circ - (\angle AFE + \angle BFD) = 180^\circ - (\angle C + \angle C) = 180^\circ - 2\angle C.$$

Ответ.  $\angle D = 180^\circ - 2\angle A$ ;  $\angle E = 180^\circ - 2\angle B$ ,  $\angle F = 180^\circ - 2\angle C$ .

**№ 33\*.** Докажите, что биссектрисы треугольника DEF в задаче № 32 лежат на высотах треугольника ABC.



$\angle FBA = \angle BDA - \angle BDF$ , так что  $\angle FDA = 90^\circ - \angle A$  и  $\angle ADE = \angle ADC - \angle CDE = 90^\circ - \angle A$ , значит, AD — биссектриса  $\angle D$ .

Аналогично доказывается, что EB — биссектриса  $\angle E$  и FC — биссектриса  $\angle F$ , то есть биссектрисы этих углов лежат на высотах  $\triangle ABC$ .

Что и требовалось доказать.

**№ 34.** Подобны ли два равносторонних треугольника?

Так как стороны равностороннего треугольника равны, то три стороны одного треугольника пропорциональны трем сторонам другого, так что равносторонние треугольники подобны.

**№ 35.** Подобны ли треугольники  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$ , если:

- 1)  $AB = 1$  м,  $AC = 1,5$  м,  $BC = 2$  м;  $A_1B_1 = 10$  см,  
 $A_1C_1 = 15$  см,  $B_1C_1 = 20$  см;
- 2)  $AB = 1$  м,  $AC = 2$  м,  $BC = 1,5$  м;  $A_1B_1 = 8$  дм,  
 $A_1C_1 = 16$  дм,  $B_1C_1 = 12$  дм;
- 3)  $AB = 1$  м,  $AC = 2$  м,  $BC = 1,25$  м;  $A_1B_1 = 10$  см,  
 $A_1C_1 = 20$  см,  $B_1C_1 = 30$  см;

Треугольники будут подобны, если будет выполняться равенство:

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{BC}{B_1C_1}.$$

1)  $\frac{100}{10} = \frac{150}{15} = \frac{200}{20} = 10$  — треугольники подобны.

2)  $\frac{10}{8} = \frac{20}{16} = \frac{15}{12}$  — неверно, поэтому треугольники не подобны.

3)  $\frac{100}{10} = \frac{200}{20} = \frac{125}{13}$  — неверно, поэтому треугольники не подобны.

**№ 37.** Стороны треугольника равны 0,8 м, 1,6 м и 2 м. Найдите стороны подобного ему треугольника, периметр которого равен 5,5 м.

$\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ ;  $P$  — периметр  $\triangle ABC$ ;  $P_1$  — периметр  $\triangle A_1B_1C_1$ ;  $AB = 0,8$  м,  $BC = 1,6$  м,  $AC = 2$  м;  $P_1 = 5,5$  м. Тогда

$$P = AB + BC + AC = 0,8 + 1,6 + 2 = 4,4 \text{ м.}$$

Воспользуемся задачей № 36:

$$\frac{P_1}{P} = \frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{A_1C_1}{AC} = k,$$

тогда  $k = \frac{5,5}{4,4} = \frac{5}{4}$ . Значит:

$$A_1B_1 = k \cdot AB = \frac{5}{4} \cdot 0,8 = 1 \text{ м,}$$

$$B_1C_1 = k \cdot BC = \frac{5}{4} \cdot 1,6 = 2 \text{ м,}$$

$$A_1C_1 = k \cdot AC = \frac{5}{4} \cdot 2 = 2,5 \text{ м.}$$

Ответ.  $A_1B_1 = 1$  м,  $B_1C_1 = 2$  м,  $A_1C_1 = 2,5$  м.

**№ 38.** Периметр одного треугольника составляет  $\frac{11}{13}$  периметра подобного ему треугольника. Разность двух соответствующих сторон равна 1 м. Найдите эти стороны.

$$\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1; P_{\triangle ABC} = \frac{11}{13} P_{\triangle A_1B_1C_1}; A_1B_1 - AB = 1 \text{ м.}$$

$$\frac{P_{\triangle A_1B_1C_1}}{P_{\triangle ABC}} = \frac{A_1B_1}{AB} = \frac{13}{11}.$$

Пусть  $AB = x$ , тогда

$$A_1B_1 = x + 1 \text{ и } \frac{x+1}{x} = \frac{13}{11},$$

$$11x + 11 = 13x, 2x = 11, x = 5,5 \text{ м.}$$

То есть  $AB = 5,5$  м, а  $A_1B_1 = 6,5$  м.

Ответ: 6,5 м; 5,5 м.

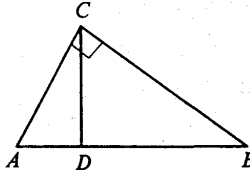
**№ 39.** Подобны ли два прямоугольных треугольника, если у одного из них есть угол  $40^\circ$ , а у другого — угол, равный: 1)  $50^\circ$ ; 2)  $60^\circ$ ?

У подобных треугольников углы равны, к тому же сумма острых углов прямоугольного треугольника  $90^\circ$ .

а)  $40^\circ + 50^\circ = 90^\circ$  (треугольники подобны).

б)  $40^\circ + 60^\circ = 100^\circ$  (треугольники не подобны).

- № 40.** Основание высоты прямоугольного треугольника, опущенной на гипотенузу, делит ее на отрезки 9 см и 16 см. Найдите стороны треугольника.



В  $\triangle ABC$   $\angle C = 90^\circ$ ,  $CD$  — высота,  $AD = 9$  см,  $DB = 16$  см.  
 $\triangle ACD \sim \triangle CBD$  (так как  $\angle CDA = \angle CDB = 90^\circ$  и  $\angle ACD = 90^\circ - \angle A = \angle B$ ). Значит  $\frac{AD}{CD} = \frac{CD}{BD}$ ,  $CD^2 = AD \cdot BD$ ,

$$CD = \sqrt{AD \cdot DB} = \sqrt{9 \cdot 16} = 3 \cdot 4 = 12 \text{ см.}$$

Далее из  $\triangle ACD$  по теореме Пифагора имеем:

$$AC = \sqrt{AD^2 + CD^2} = \sqrt{81 + 144} = 15 \text{ см.}$$

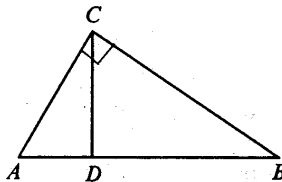
Из  $\triangle CBD$  по теореме Пифагора имеем:

$$CB = \sqrt{DB^2 + CD^2} = \sqrt{256 + 144} = 20 \text{ см;}$$

$$AB = AD + DB = 9 + 16 = 25 \text{ см.}$$

Ответ:  $AC = 15$  см;  $CB = 20$  см,  $AB = 25$  см.

- № 41.** Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 25 см, а один из катетов равен 10 см. Найдите проекцию другого катета на гипотенузу.



В  $\triangle ABC$   $\angle C = 90^\circ$ ;  $CD$  — высота,  $AB = 25$  см,  $AC = 10$  см.



Пусть  $AD = x$  см, следовательно

$$DB = (25 - x) \text{ см.}$$

В  $\triangle ACD$  по теореме Пифагора имеем:

$$CD^2 = AC^2 - AD^2 = 100 - x^2.$$

По доказанному в решении задачи № 40:

$$CD^2 = AD \cdot DB = x \cdot (25 - x) = 25x - x^2.$$

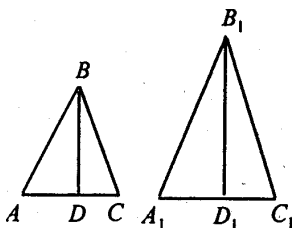
Так что:

$$100 - x^2 = 25x - x^2, 100 = 25x, x = 4 \text{ см.}$$

$$BD = 25 - x = 21 \text{ см.}$$

Ответ:  $BD = 21$  см.

- № 42.** Докажите, что соответствующие высоты подобных треугольников относятся как соответствующие стороны.



$\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ . Пусть  $BD$  — высота  $\triangle ABC$ ,  $B_1D_1$  — высота  $\triangle A_1B_1C_1$ .

Рассмотрим  $\triangle ABD$  и  $\triangle A_1B_1D_1$ .

а)  $\angle A = \angle A_1$  (так как  $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ );

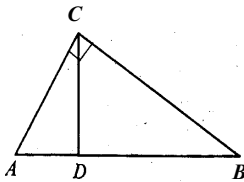
б)  $\angle D = \angle D_1$  (прямые углы).

Значит,  $\triangle ABD \sim \triangle A_1B_1D_1$  (по двум углам), то есть:

$$\frac{B_1D_1}{BD} = \frac{A_1B_1}{AB}.$$

Что и требовалось доказать.

- № 43. Катеты прямоугольного треугольника относятся как  $m:n$ . Как относятся проекции катетов на гипотенузу?



Пусть в  $\triangle ABC$   $\angle C = 90^\circ$ ,  $\frac{AC}{BC} = \frac{m}{n}$ .

$\triangle ACD \sim \triangle ABC$ , так что  $\frac{AC}{AB} = \frac{AD}{AC}$ , откуда  $AD = \frac{AC^2}{AB}$ . Да-

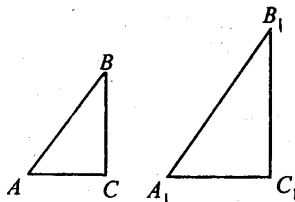
лее  $\triangle ABC \sim \triangle BCD$ , откуда  $\frac{BC}{AB} = \frac{BD}{BC}$ , то есть  $DB = \frac{BC^2}{AB}$ . Так

что

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AC^2}{AB} : \frac{BC^2}{AB} = \frac{AC^2}{BC^2} = \frac{m^2}{n^2}.$$

Ответ:  $\frac{m^2}{n^2}$ .

- № 44. Длина тени фабричной трубы равна 35,8 м; в это же время вертикально воткнутый в землю кол высотой 1,9 м дает тень длиной 1,62 м. Найдите высоту трубы.



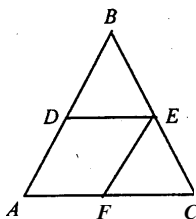
Возьмем  $\triangle ABC$  и  $\triangle A_1B_1C_1$ , где  $\angle C = \angle C_1 = 90^\circ$ ,  $AC = 1,62$  м,  $BC = 1,9$  м,  $A_1C_1 = 35,8$  м. Найдем  $B_1C_1$  (длина трубы).

Свет на кол и трубу падает с одной стороны и под одним углом, значит  $\angle A = \angle A_1$ , к тому же  $\angle C = \angle C_1 = 90^\circ$ . Значит  $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$  и  $\frac{A_1C_1}{AC} = \frac{B_1C_1}{BC}$ , то есть

$$B_1C_1 = \frac{A_1C_1 \cdot BC}{AC} = 41,99 \approx 42 \text{ м.}$$

Ответ:  $B_1C_1 \approx 42$  м.

**№ 45.** В треугольник ABC вписан ромб ADEF так, что угол A у них общий, а вершина E находится на стороне BC. Найдите сторону ромба, если  $AB = c$  и  $AC = b$ .



Так как  $DE \parallel AC$  (по определению ромба), то  $\triangle ABC \sim \triangle DBE$ :

$$\frac{DB}{AB} = \frac{BE}{BC} = \frac{DE}{AC} = \frac{BE}{BC}$$

тогда,  $\frac{DB}{AB} = \frac{DE}{AC}$ . Далее,  $BD = AB - AD = c - AD$ ,  $DE = AD$ , так что:

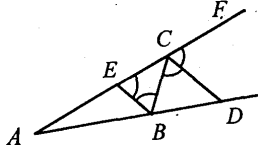
$$\frac{c - AD}{c} = \frac{AD}{b},$$

$bc - b \cdot AD = c \cdot AD$ ,  $bc = AD(b + c)$ , так что

$$AD = \frac{b \cdot c}{b + c}$$

Ответ.  $AD = \frac{b \cdot c}{b + c}$ .

- № 46\*. Биссектриса внешнего угла треугольника ABC при вершине C пересекает прямую AB в точке D. Докажите, что  $AD:BD = AC:BC$ .



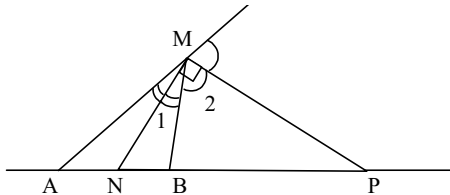
Проведем  $BE \parallel CD$ . Тогда  $\angle CBE = \angle BCD$  (как углы накрест лежащие при пересечении параллельных прямых  $EB$  и  $CD$  секущей  $CB$ );  $\angle BEC = \angle DCF = \angle DCB$  (как соответственные углы при тех же параллельных прямых);  $\angle DCF = \angle DCB$  (т.к.  $CD$  биссектриса  $\angle BCF$ ). Значит,  $\triangle ECB$  — равнобедренный и  $EC = BC$ .

Из решения задачи № 17 имеем: если стороны угла пересечены параллельными прямыми, то отсекаемые на сторонах угла отрезки пропорциональны, то есть

$$\frac{AD}{BD} = \frac{AC}{EC}.$$

Но так как  $EC = BC$ , то  $\frac{AD}{BD} = \frac{AC}{BC}$ , что и требовалось доказать.

- № 47\*. Докажите, что геометрическое место точек, отношение расстояний от которых до двух данных точек постоянно (не равно единице), есть окружность.



Возьмем произвольную точку  $M$ , такую что  $\frac{MA}{MB} = \lambda \neq 1$ .

Проведем биссектрису  $MN$  и биссектрису внешнего угла  $MP$  в  $\triangle AMB$ .

Тогда  $\frac{AN}{NB} = \frac{AM}{BM} = \lambda$  (свойство биссектрисы);

$\frac{AM}{BM} = \frac{AP}{BP} = \lambda$  (см. задачу №46). То есть положение точек  $N$  и

$P$  зависит только от выбора числа  $\lambda$  и не зависит от точки  $M$ .  $\angle NMP = \angle 1 + \angle 2$ . Но  $2 \cdot \angle 1 + 2 \cdot \angle 2 = 180^\circ$ . Значит,  $\angle NMP = 90^\circ$ , а следовательно геометрическое место точек, отношение расстояний от которых до двух данных точек постоянно и не равно 1 — это множество точек, из которых фиксированный отрезок ( $NP$ ) виден под прямым углом, то есть окружность, построенная на диаметре  $NP$ . Что и требовалось доказать.

**№ 48.** Найдите дополнительные плоские углы, зная, что:  
1) один из них в 5 раз больше другого; 2) один из них на  $100^\circ$  больше другого; 3) разность их равна  $20^\circ$ .

1) Пусть 1-й угол равен  $x^\circ$ , тогда 2-й будет  $5x^\circ$ , а т.к. сумма двух плоских углов равна  $360^\circ$ , то:

$$x + 5x = 360^\circ, 6x = 360^\circ, x = 60^\circ.$$

Значит, 1-й угол —  $60^\circ$ , а 2-й —  $300^\circ$ .

2) Пусть 1-й угол равен  $x^\circ$ , тогда 2-й будет  $(x + 100^\circ)$ , а их сумма  $360^\circ$ , т. е.:

$$x + x + 100^\circ = 360^\circ, 2x = 260^\circ, x = 130^\circ,$$

$$100^\circ + x = 230^\circ.$$

Значит, 1-й угол —  $130^\circ$ , а 2-й —  $230^\circ$ .

3) Пусть 1-й угол равен  $x^\circ$ , тогда 2-й будет  $x + 20^\circ$ , а их сумма  $360^\circ$ , т. е.:

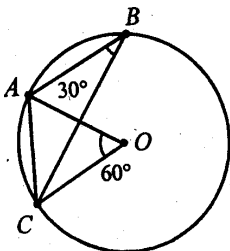
$$x + x + 20^\circ = 360^\circ, 2x = 340^\circ, x = 170^\circ,$$

$$20^\circ + x = 190^\circ.$$

Значит, 1-й угол —  $170^\circ$ , а 2-й —  $190^\circ$ .

Ответ: 1)  $60^\circ, 300^\circ$ ; 2)  $130^\circ, 230^\circ$ ; 3)  $170^\circ, 190^\circ$ .

- № 49. Точки А, В, С лежат на окружности. Чему равна хорда АС, если угол АВС равен  $30^\circ$ , а диаметр окружности 10 см?



Так как вписанный угол  $\angle ABC = 30^\circ$ , то соответствующий ему центральный угол будет  $60^\circ$  (по теореме 11.5), то есть  $\angle AOC = 60^\circ$ .

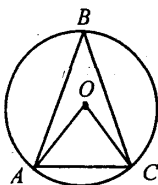
Рассмотрим  $\triangle AOC$ . Так как  $AO = OC$  (как радиусы окружности), а  $\angle O = 60^\circ$ , то  $\triangle AOC$  — равнобедренный, значит,

$$AC = AO = OC = r = 5 \text{ см.}$$

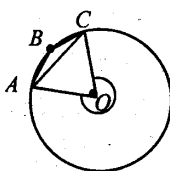
Ответ:  $AC = 5$  см.

- № 50. Точки А, В, С лежат на окружности. Чему равен угол АВС, если хорда АС равна радиусу окружности? (Два случая.)

І случай



ІІ случай



1)  $\angle AOC$  является центральным для  $\angle ABC$ .

Так как  $AC = AO = OC$ , то  $\triangle AOC$  равнобедренный, следовательно  $\angle AOC = 60^\circ$ , а

$$\angle ABC = \frac{1}{2} \angle AOC = 30^\circ.$$

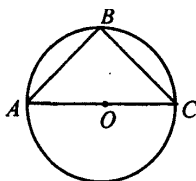
2)  $\angle AOC$  в  $\triangle AOC$  равен  $60^\circ$ , но центральный угол, соответствующий нашему вписанному, есть угол, дополнительный к  $\angle AOC$  и равен  $360^\circ - 60^\circ = 300^\circ$ . Тогда:

$$\angle ABC = \frac{1}{2} 300^\circ = 150^\circ.$$

Ответ:  $\angle ABC = 30^\circ$  или  $150^\circ$ .

**№ 51.** Докажите, что центром окружности, описанной около прямоугольного треугольника, является середина гипотенузы.

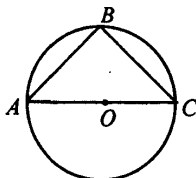
Пусть  $\triangle ABC$  вписан в окружность с центром  $O$ .



Из следствия теоремы 11.5 о вписанном угле имеем, что  $\angle B = 90^\circ$  опирается на диаметр окружности; значит, гипотенуза треугольника  $AC$  — диаметр окружности и точка  $O$  — центр окружности находится в ее середине. Что и требовалось доказать.

**№ 52.** Докажите, что медиана прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе, разбивает его на два равнобедренных треугольника.

Опишем около  $\triangle ABC$  окружность.

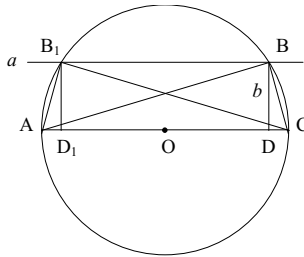


Центр окружности будет совпадать с серединой гипотенузы (по доказанному в задаче № 51). Значит,  $BO$  — медиана, но

$\triangle ABO$  и  $\triangle BCO$  равнобедренные, так как  $AO = OB$  и  $OB = OC$  — радиусы одной окружности. Что и требовалось доказать.

**№ 53.** Постройте прямоугольный треугольник по гипотенузе и высоте, опущенной из вершины прямого угла на гипотенузу.

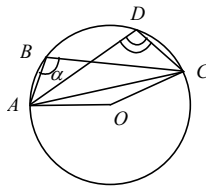
Пусть  $AC$  — гипотенуза;  $BD = b$  — высота.



Построение:

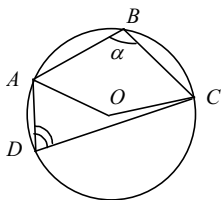
- 1) проведем отрезок  $AC$ , разделим его пополам, приняв  $O$  за середину  $AC$ ;
- 2) проведем окружность с центром в точке  $O$  и радиусом  $AO$ ;
- 3) проведем прямую  $a \parallel AC$  на расстоянии  $b$  от прямой  $AC$ . Прямая  $a$  пересечет окружность в двух точках  $B_1$  и  $B$ . Так что  $\triangle ABC$  и  $\triangle AB_1C$  — искомые.

**№ 54.** На окружности отмечены четыре точки  $A, B, C, D$ . Чему равен угол  $ADC$ , если угол  $ABC$  равен  $\alpha$ ? (Два случая.)



1-й случай:  $\angle ADC$  и  $\angle ABC$  — вписанные, опирающиеся на одну хорду. Поэтому  $\angle ADC = \frac{1}{2} \angle AOC = \angle ABC = \alpha$ .



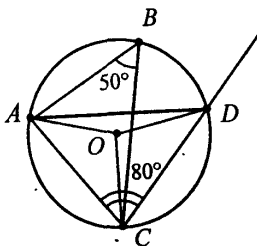


2-й случай: в  $\triangle AOC$   $\angle AOC = 360^\circ - 2\alpha$ , так как дополнительный к нему угол  $\angle AOC = 2\alpha$ , как центральный угол, соответствующий описанному  $\angle B = \alpha$ .

$$\angle ADC = \frac{1}{2} \angle AOC = \frac{1}{2} (360^\circ - 2\alpha) = 180^\circ - \alpha.$$

Ответ: 1)  $\alpha$ ; 2)  $180^\circ - \alpha$ .

**№ 55.** Хорды окружности AD и BC пересекаются. Угол ABC равен  $50^\circ$ , угол ACD равен  $80^\circ$ . Найдите угол CAD.



$\angle ADC = \angle ABC = 50^\circ$  — как вписанные, опирающиеся на одну хорду. Тогда  $\angle CAD = 180^\circ - \angle ADC - \angle ACD = 180^\circ - 50^\circ - 80^\circ = 50^\circ$ .

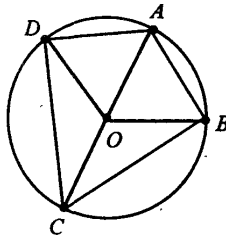
Ответ:  $50^\circ$ .

**№ 56\*.** Докажите, что у четырехугольника, вписанного в окружность, сумма противоположных углов равна  $180^\circ$ .

Пусть четырехугольник ABCD вписан в окружность. По теореме 11.5 имеем:

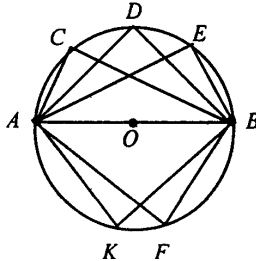
$$\begin{aligned} \angle A + \angle C &= \frac{1}{2} \angle DOB + \frac{1}{2} \angle BOD = \\ &= \frac{1}{2} (\angle DOB + \angle BOD) = \frac{1}{2} 360^\circ = 180^\circ, \end{aligned}$$

так как  $\angle DOB$  и  $\angle BOD$  дополнительные.



Аналогично  $\angle D + \angle B = 180^\circ$ . Что и требовалось доказать.

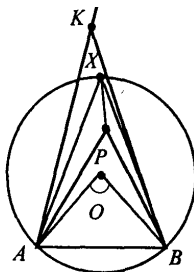
**№ 57.** Докажите, что геометрическое место вершин прямых углов, стороны которых проходят через две данные точки, есть окружность.



Пусть существует такая точка  $D$ , что  $\angle ADB = 90^\circ$ . Опишем окружность вокруг прямоугольного  $\triangle ADB$ . Тогда ее центром является точка  $O$  — середина  $AB$ . А радиус равен  $\frac{1}{2} AB = AO$ , то есть не зависит от точки  $D$ . Так что любая точка — вершина прямого угла (из условия задачи) принадлежит окружности с центром  $O$  — серединой  $AB$ , и радиусом  $AO = \frac{1}{2} AB$ . Что и требовалось доказать.

**№ 58.** Докажите, что геометрическое место вершин углов с заданной градусной мерой, стороны которых проходят через две данные точки, а вершины лежат по одну сторону от прямой, соединяющей эти точки, есть дуга окружности с концами в этих точках.

Пусть  $AB$  — прямая. Угол  $AХВ$  — вписан в окружность. Если вершина  $X$  принадлежит дуге окружности  $(O; r)$ , то все углы, вершины которых лежат на окружности по одну сторону от прямой  $AB$ , равны  $\frac{1}{2} \angle AOB$ , поэтому они равны между собой.



Докажем теперь, что данным свойством обладают только точки этой части окружности. Рассмотрим два варианта:

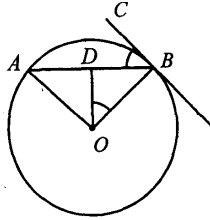
- а) вершина  $P$  лежит внутри окружности, тогда  $\angle APB > \angle AXB$ ;
- б) вершина  $K$  лежит вне окружности, тогда  $\angle AXB > \angle AKB$ .

Так что вершины должны лежать на окружности, то есть на дуге окружности.

Что и требовалось доказать.

**№ 59.** Докажите, что острый угол между хордой окружности и касательной к окружности в конце хорды равен половине угла между радиусами, проведенными к концам хорды.

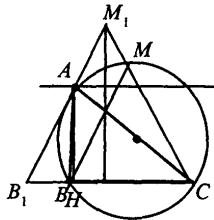
Пусть  $OA$  и  $OB$  — радиусы окружности  $(O; r)$ ;  $AB$  — хорда;  $CB$  — касательная. Тогда  $\angle OBC = 90^\circ$  (по свойству касательной), а  $\angle OBD = \angle OAD$  (как углы равнобедренного треугольника). Тогда  $\angle OBD = \frac{180^\circ - \angle AOB}{2} = 90^\circ - \frac{1}{2} \angle AOB$ .



$$\begin{aligned} \text{Далее } \angle CBA &= \angle OBC - \angle OBD = 90^\circ - \left(90^\circ - \frac{1}{2} \angle AOB\right) = \\ &= 90^\circ - 90^\circ + \frac{1}{2} \angle AOB = \frac{1}{2} \angle AOB. \end{aligned}$$

Что и требовалось доказать.

**№ 60.** Постройте треугольник по стороне, противолежащей ей углу и высоте, проведенной из вершины этого угла.



Пусть  $a$  — сторона  $\triangle ABC$ ;  $\angle A = \alpha$ ;  $h_a$  — высота, опущенная из  $\angle A$ .

Построение:

1) Построим равнобедренный треугольник  $B_1M_1C$  с  $\angle M_1 = \angle A = \alpha$ .

2) На луче  $CB_1$  отложим отрезок  $CB = a$  от точки  $C$ .

3) Проведем  $BM \parallel B_1M_1$  через точку  $B$ .

4) Около  $\triangle MCB$  опишем окружность.

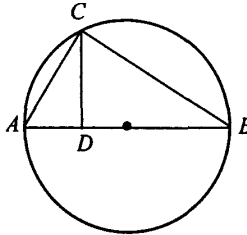
5) Проведем прямую  $b \parallel BC$ , находящуюся на расстоянии  $h_a$ .

6) Обозначим точку пересечения  $b$  и окружности  $A$ .

$\triangle ABC$  — искомым, так как  $\angle A = \angle M = \alpha$  (как вписанные углы, лежащие по одну сторону от прямой  $BC$ );  $BC = a$  (по построению);  $AH = h_a$  (по построению).

**№ 61.** Из точки  $C$  окружности проведен перпендикуляр  $CD$  к диаметру  $AB$ . Докажите, что  $CD^2 = AD \cdot BD$ .

Пусть  $AB$  — диаметр окружности;  $CD \perp AB$ .

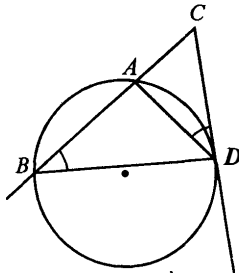


1) Проведем лучи  $CA$  и  $CB$ , получим  $\triangle ACB$ , у которого  $\angle C = 90^\circ$  (т.к. опирается на диаметр).

2) По признаку подобия прямоугольных треугольников имеем:  $\triangle ACD \sim \triangle CDB$ , так что  $\frac{AD}{CD} = \frac{CD}{BD}$ , т.е.  $CD^2 = AD \cdot BD$ .

Что и требовалось доказать.

**№ 62.** Докажите, что произведение отрезков секущей окружности равно квадрату отрезка касательной, проведенной из той же точки:  $AC \cdot BC = CD^2$ .



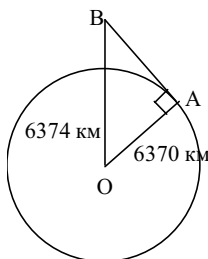
$$\angle ABD = \angle ADC.$$

Рассмотрим  $\triangle CBD$  и  $\triangle CDA$ .  $\angle CBD = \angle CDA$  (по условию),  $\angle C$  — общий, поэтому  $\triangle CBD \sim \triangle CDA$  по двум углам, значит:

$$\frac{BC}{CD} = \frac{CD}{AC}, \text{ откуда имеем: } CD^2 = AC \cdot BC. \text{ Что и требовалось до-}$$

казать.

- № 63.** Как далеко видно из самолета, летящего на высоте 4 км над Землей, если радиус Земли 6370 км?

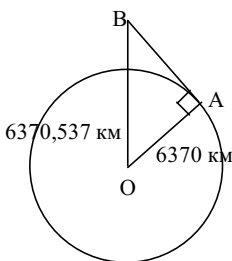


Пусть В — точка нахождения самолета. Проведем касательную ВА. Тогда в  $\triangle AOB$ ,  $\angle A = 90^\circ$ ;  $AO = 6370$  км;  $OB = 6374$  км. По теореме Пифагора:

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{6374^2 - 6370^2} = \sqrt{(6374 - 6370)(6374 + 6370)} = \\ &= \sqrt{4 \cdot 12744} \approx 225,8 \text{ км.} \end{aligned}$$

Ответ:  $\approx 225,8$  км.

- № 64.** Вычислите радиус горизонта, видимого с вершины телебашни в Останкине, высота которой 537 м.



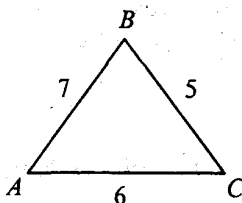
Аналогично задаче № 63 получаем:

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{6370,537^2 - 6370^2} = \sqrt{(6370,537 - 6370)(6370,537 + 6370)} = \\ &= \sqrt{0,537 \cdot 12740,537} \approx 82,7 \text{ км} \end{aligned}$$

Ответ:  $\approx 82,7$  км.

## § 12. РЕШЕНИЕ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

- № 1. Стороны треугольника 5 м, 6 м, 7 м. Найдите косинусы углов треугольника.



Пусть  $AB = 7$  м;  $BC = 5$  м;  $AC = 6$  м. Тогда по теореме косинусов

$$AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2BC \cdot AC \cdot \cos \angle C,$$

то есть:

$$\cos \angle C = \frac{BC^2 + AC^2 - AB^2}{2BC \cdot AC} = \frac{25 + 36 - 49}{2 \cdot 5 \cdot 6} = \frac{12}{60} = \frac{1}{5},$$

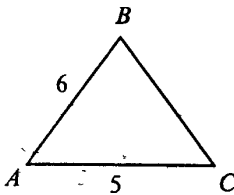
аналогично:

$$\cos \angle A = \frac{BA^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \cdot AC} = \frac{49 + 36 - 25}{2 \cdot 7 \cdot 6} = \frac{60}{84} = \frac{5}{7},$$

$$\cos \angle B = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2AB \cdot BC} = \frac{49 + 25 - 36}{2 \cdot 7 \cdot 5} = \frac{38}{70} = \frac{19}{35}.$$

Ответ:  $\cos \angle C = \frac{1}{5}$ ,  $\cos \angle A = \frac{5}{7}$ ,  $\cos \angle B = \frac{19}{35}$ .

- № 2. У треугольника две стороны равны 5 м и 6 м, а синус угла между ними равен 0,6. Найдите третью сторону.



Пусть  $AB = 6$  м,  $AC = 5$  м;  $\sin \angle A = 0,6$ . Имеем:

$$\cos^2 \angle A = 1 - \sin^2 \angle A,$$

$$\cos \angle A = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \angle A} = \pm \sqrt{1 - 0,36} = \pm \sqrt{0,64} = \pm 0,8.$$

Далее по теореме косинусов:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos \angle A$$

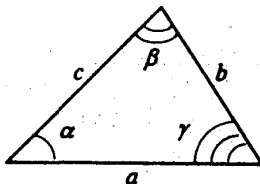
получаем, что

а)  $BC^2 = 36 + 25 - 2 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 0,8 = 61 - 48 = 13$  м<sup>2</sup> и  $BC = \sqrt{13}$  м;

б)  $BC^2 = 36 + 25 - 2 \cdot 5 \cdot 6 \cdot (-0,8) = 61 + 48 = 109$  м<sup>2</sup> и  $BC = \sqrt{109}$  м.

Ответ: а)  $\sqrt{13}$  м; б)  $\sqrt{109}$  м.

- № 3. Стороны треугольника равны  $a$ ,  $b$ ,  $c$ . Докажите, что если  $a^2 + b^2 > c^2$ , то угол, противолежащий стороне  $c$ , острый. Если  $a^2 + b^2 < c^2$ , то угол, противолежащий стороне  $c$ , тупой.



$\gamma$  — угол треугольника, противолежащий стороне  $c$ . По теореме косинусов имеем:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma,$$



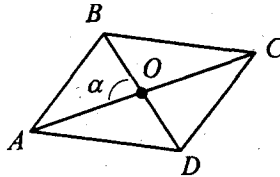
откуда получаем:

$$\cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

Если  $a^2 + b^2 > c^2$ , то  $a^2 + b^2 - c^2 > 0$ ; тогда  $\cos \gamma > 0$ , а так как  $0 < \gamma < 180^\circ$ , то  $\gamma$  — острый.

Если  $a^2 + b^2 < c^2$ , то  $\cos \gamma < 0$  и угол  $\gamma$  — тупой. Что и требовалось доказать.

**№ 4.** Даны диагонали параллелограмма  $c$  и  $d$  и угол между ними  $\alpha$ . Найдите стороны параллелограмма.



Пусть ABCD — параллелограмм,  $AC=c$ ,  $BD=d$ ,  $\angle AOB=\alpha$ .

Тогда  $OC = AO = \frac{1}{2} AC = \frac{1}{2} c$ ,  $BO = \frac{1}{2} BD = \frac{1}{2} d$  (по свойству диагоналей параллелограмма),  $\angle AOB = \alpha$ , так что по теореме косинусов имеем:

$$\begin{aligned} AB^2 &= AO^2 + BO^2 - 2AO \cdot BO \cdot \cos \angle AOB = \\ &= \frac{1}{4} c^2 + \frac{1}{4} d^2 - \frac{1}{2} cd \cdot \cos \alpha \end{aligned}$$

$$AB = \sqrt{\frac{1}{4} c^2 + \frac{1}{4} d^2 - \frac{1}{2} cd \cdot \cos \alpha} = \frac{1}{2} \sqrt{c^2 + d^2 - 2cd \cdot \cos \alpha}.$$

В  $\triangle BOC$  по теореме косинусов имеем:

$$\begin{aligned} BC^2 &= BO^2 + OC^2 - 2BO \cdot OC \cdot \cos(180^\circ - \alpha) = \\ &= \frac{1}{4} c^2 + \frac{1}{4} d^2 - \frac{1}{2} cd \cdot \cos(180^\circ - \alpha) = \frac{1}{4} c^2 + \frac{1}{4} d^2 + \frac{1}{2} cd \cdot \cos \alpha \end{aligned}$$

Т.к.  $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$ , поэтому

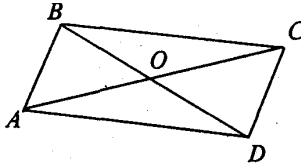
$$BC = \sqrt{\frac{1}{4}c^2 + \frac{1}{4}d^2 + \frac{1}{2}cd \cdot \cos \alpha} = \frac{1}{2}\sqrt{d^2 + c^2 + 2cd \cdot \cos \alpha}.$$

Далее  $AB = CD$  и  $AD = BC$ .

Ответ:  $\frac{1}{2}\sqrt{c^2 + d^2 - 2cd \cdot \cos \alpha}$ ;  $\frac{1}{2}\sqrt{d^2 + c^2 + 2cd \cdot \cos \alpha}$

**№ 5.** Даны стороны параллелограмма  $a$  и  $b$  и один из углов  $\alpha$ . Найдите диагонали параллелограмма.

Пусть  $ABCD$  — параллелограмм,  $AB = a$ ,  $AD = b$ ,  $\angle A = \alpha$ .



В  $\triangle BAD$ , по теореме косинусов:

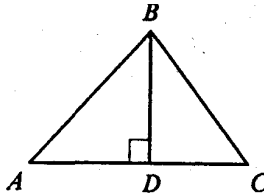
$$BD = \sqrt{AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cdot \cos \alpha} = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha}.$$

В  $\triangle ABC$ , по теореме косинусов:

$$\begin{aligned} AC &= \sqrt{AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos \beta} = \\ &= \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos(180^\circ - \alpha)} = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos \alpha}. \end{aligned}$$

Ответ:  $BD = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha}$ ;  $AC = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos \alpha}$ .

**№ 6.** Стороны треугольника 4 м, 5 м и 6 м. Найдите проекции сторон 4 м и 5 м на прямую, содержащую сторону 6 м.



$BD \perp AC$ ;  $AB = 5$  м,  $BC = 4$  м,  $AC = 6$  м;  $AD$  — проекция  $AB$  на  $AC$ ,  $DC$  — проекция  $BC$  на  $AC$ .

По теореме косинусов:

$$\cos \angle A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \cdot AC} = \frac{25 + 36 - 16}{2 \cdot 5 \cdot 6} = \frac{45}{60} = \frac{3}{4};$$

$$\cos \angle C = \frac{BC^2 + AC^2 - AB^2}{2BC \cdot AC} = \frac{16 + 36 - 25}{2 \cdot 4 \cdot 6} = \frac{27}{48} = \frac{9}{16}.$$

Далее в прямоугольном  $\triangle ABD$  имеем:

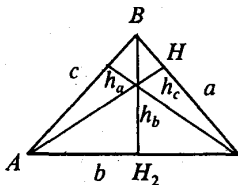
$$AD = AB \cos \angle A = 5 \cdot \frac{3}{4} = \frac{15}{4} = 3,75 \text{ м.}$$

А в  $\triangle BCD$ :

$$DC = BC \cos \angle C = 4 \cdot \frac{9}{16} = \frac{9}{4} = 2,25 \text{ м.}$$

Ответ:  $AD = 3,75$  м;  $DC = 2,25$  м.

**№ 8.** Найдите высоты треугольника в задаче 1.



Найдем  $h_a, h_b, h_c$ . Из задачи 1 знаем, что

$$\cos \angle A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2ab} = \frac{36 + 49 - 25}{2 \cdot 6 \cdot 7} = \frac{60}{84} = \frac{5}{7};$$

$$\cos \angle B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{25 + 49 - 36}{2 \cdot 5 \cdot 7} = \frac{38}{70} = \frac{19}{35};$$

$$\cos \angle C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{25 + 36 - 49}{2 \cdot 5 \cdot 6} = \frac{12}{60} = \frac{1}{5}.$$

Из основного тригонометрического тождества получаем:

$$\sin \angle A = \sqrt{1 - \cos^2 \angle A} = \sqrt{1 - \frac{25}{49}} = \sqrt{1 - \frac{25}{49}} = \sqrt{\frac{24}{49}} = \frac{2\sqrt{6}}{7};$$

$$\sin \angle B = \sqrt{1 - \cos^2 \angle B} = \sqrt{1 - \frac{361}{1225}} = \sqrt{\frac{864}{1225}} = \frac{12\sqrt{6}}{35};$$

$$\sin \angle C = \sqrt{1 - \cos^2 \angle C} = \sqrt{1 - \frac{1}{25}} = \sqrt{\frac{24}{25}} = \frac{2\sqrt{6}}{5}.$$

Далее находим:

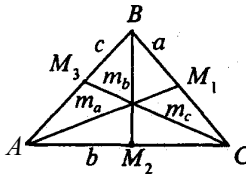
$$\text{из } \triangle ABH_1 \quad h_a = c \cdot \sin \angle B = 7 \cdot \frac{12\sqrt{6}}{35} = \frac{12\sqrt{6}}{5} \text{ м};$$

$$\text{из } \triangle BCH_2 \quad h_b = a \cdot \sin \angle C = 5 \cdot \frac{2\sqrt{6}}{5} = 2\sqrt{6} \text{ м};$$

$$\text{из } \triangle ACH_3 \quad h_c = b \cdot \sin \angle A = 6 \cdot \frac{2\sqrt{6}}{7} = \frac{12\sqrt{6}}{7} \text{ м}.$$

$$\text{Ответ: } h_a = \frac{12\sqrt{6}}{5} \text{ м, } h_b = 2\sqrt{6} \text{ м, } h_c = \frac{12\sqrt{6}}{7} \text{ м}.$$

**№ 9.** Найдите медианы треугольника в задаче № 1 § 12.



Найдем медианы  $m_a$ ,  $m_b$  и  $m_c$ .

$$\text{В } \triangle ABM_1 \quad AB=c=7 \text{ м, } BM_1 = \frac{1}{2} BC = \frac{1}{2} a = \frac{5}{2} \text{ м, } \cos \angle B = \frac{19}{35}$$

(см. задачу № 1 § 12). По теореме косинусов:

$$m_a = AM_1 = \sqrt{c^2 + \left(\frac{1}{2}a\right)^2 - 2 \cdot c \cdot \frac{1}{2} \cdot \cos \angle B} =$$

$$= \sqrt{49 + \frac{25}{4} - 2 \cdot 7 \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{19}{35}} = \sqrt{\frac{145}{4}} = \frac{\sqrt{145}}{2}$$

В  $\triangle BCM_2$   $BC = a = 5$  м,  $BM_2 = \frac{1}{2} AC = \frac{1}{2} b = 3$  м,  $\cos \angle C = \frac{1}{5}$ .

Из теоремы косинусов:

$$m_b = BM_2 = \sqrt{a^2 + \left(\frac{1}{2}b\right)^2 - 2a\left(\frac{1}{2}b\right) \cdot \cos \angle C} =$$

$$= \sqrt{25 + 9 - 2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot \frac{1}{5}} = \sqrt{34 - 6} = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}.$$

В  $\triangle AM_3C$   $AC = b = 6$  м,  $AM_3 = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} c = \frac{7}{2}$  м,  $\cos \angle A = \frac{5}{7}$ .

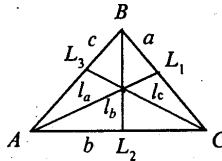
Так что

$$m_c = CM_3 = \sqrt{b^2 + \left(\frac{1}{2}c\right)^2 - 2b\left(\frac{1}{2}c\right) \cdot \cos \angle A} =$$

$$= \sqrt{36 + \frac{49}{4} - 2 \cdot 6 \cdot \frac{7}{2} \cdot \frac{5}{7}} = \sqrt{\frac{73}{4}} = \frac{\sqrt{73}}{2}$$

Ответ:  $m_a = \frac{\sqrt{145}}{2}$ ;  $m_b = 2\sqrt{7}$ ;  $m_c = \frac{\sqrt{73}}{2}$

**№ 10\*.** Найдите биссектрисы треугольника в задаче № 1.



Пусть  $AL_1 = l_a$ ,  $BL_2 = l_b$ ,  $CL_3 = l_c$  — биссектрисы. По свойству биссектрисы треугольника:

$$\frac{AB}{BL_1} = \frac{AC}{CL_1}.$$

Известно, что  $AB = 7$  м,  $AC = 6$  м. Пусть  $BL_1 = x$  м, следовательно  $L_1C = 5 - x$ , откуда:

$$\frac{7}{x} = \frac{6}{5-x}; 35 - 7x = 6x; -13x = -35; x = \frac{35}{13},$$

значит,  $BL_1 = \frac{35}{13}$ .

В  $\triangle ABL_1$   $AB = 7$  м,  $BL_1 = \frac{35}{13}$ ,  $\cos \angle B = \frac{19}{35}$  (см. задачу № 1).

По теореме косинусов получаем:

$$AL_1 = \sqrt{AB^2 + BL_1^2 - 2AB \cdot BL_1 \cdot \cos \angle B};$$

$$\begin{aligned} AL_1 &= \sqrt{49 + \frac{1225}{169} - 2 \cdot 7 \cdot \frac{35}{13} \cdot \frac{19}{35}} = \sqrt{49 + \frac{1225}{169} - \frac{3458}{169}} = \\ &= \sqrt{49 - \frac{2233}{169}} = \sqrt{\frac{6048}{169}} = \frac{12\sqrt{42}}{13}. \end{aligned}$$

Аналогично:  $\frac{AB}{AL_2} = \frac{BC}{L_2C}$ , т.е.  $\frac{7}{y} = \frac{5}{6-y}$ , где  $AL_2 = y$  м,

$$42 - 7y = 5y; -12y = -42; y = \frac{7}{2};$$

следовательно  $AL_2 = \frac{7}{2}$  м.

В  $\triangle ABL_2$ ,  $AB = 7$  м,  $AL_2 = \frac{7}{2}$  м,  $\cos \angle A = \frac{5}{7}$ , тогда

$$\begin{aligned} BL_2 &= \sqrt{AB^2 + AL_2^2 - 2AB \cdot AL_2 \cdot \cos \angle A} = \sqrt{49 + \frac{49}{4} - 2 \cdot 7 \cdot \frac{7}{2} \cdot \frac{5}{7}} = \\ &= \sqrt{\frac{105}{4}} = \frac{\sqrt{105}}{2}. \end{aligned}$$

Далее  $\frac{BC}{BL_3} = \frac{AC}{AL_3}$ , т.е.  $\frac{5}{z} = \frac{6}{7-z}$ , где  $BL_3 = z$  м.

$$35 - 5z = 6z; -11z = -35; z = \frac{35}{11};$$

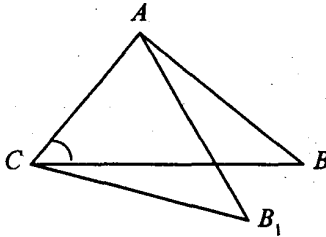
т.е.  $BL_3 = \frac{35}{11}$ .

В  $\triangle CBL_3$

$$\begin{aligned} CL_3 &= \sqrt{BC^2 + BL_3^2 - 2BC \cdot BL_3 \cos \angle B} = \\ &= \sqrt{25 + \frac{1225}{121} - \frac{2090}{121}} = \sqrt{\frac{2160}{121}} = \frac{12\sqrt{15}}{11}. \end{aligned}$$

Ответ:  $AL_1 = \frac{12\sqrt{42}}{13}$ ;  $BL_2 = \frac{\sqrt{105}}{2}$ ;  $CL_3 = \frac{12\sqrt{15}}{11}$ .

**№ 11\*.** Как изменяется сторона АВ треугольника АВС, если угол С возрастает, а длины сторон АС и ВС остаются без изменений?

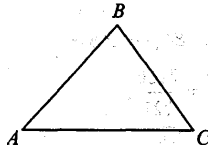


Имеем:

$$AB^2 = AC^2 + CB^2 - 2AC \cdot CB \cdot \cos \angle C.$$

Если АС и АВ не изменяются, а  $\angle C$  возрастает, то  $\cos \angle C$  — убывает, следовательно  $AB^2$  возрастает. Значит, АВ возрастает.

- № 12. У треугольника ABC  $AB = 15$  см,  $AC = 10$  см. Может ли  $\sin\beta = \frac{3}{4}$ ?



По теореме синусов:  $\frac{AB}{\sin\angle C} = \frac{AC}{\sin\angle B}$ , откуда имеем:

$$\sin\beta = \frac{AC \cdot \sin\angle C}{AB} = \frac{10}{15} \cdot \sin\angle C = \frac{2}{3} \cdot \sin\angle C,$$

то есть  $\sin\angle C = \frac{3}{2} \sin\beta$ .

Если  $\sin\beta = \frac{3}{4}$ , то  $\sin\angle C = \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{8}$ , но  $-1 < \sin\angle C < 1$ , а  $\frac{9}{8} > 1$ , так что  $\sin\beta$  не может быть равен  $\frac{3}{4}$ .

Ответ. Не может.

- № 14. Как найти радиус окружности, описанной около треугольника, зная его стороны? Найдите радиус окружности, описанной около треугольника со сторонами 5 м, 6 м, 7 м.

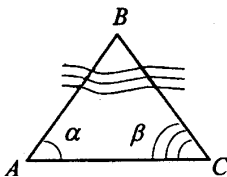
По теореме синусов:  $R = \frac{a}{2 \sin\alpha} = \frac{b}{2 \sin\beta} = \frac{c}{2 \sin\gamma}$ . Далее, пусть  $b = 6$  м. Тогда  $\sin\beta = \frac{12\pi}{35}$  (смотри задачу № 8). Так что

$$R = \frac{b}{2 \sin\angle B} = \frac{6}{2 \cdot \frac{12\sqrt{6}}{35}} = \frac{6 \cdot 35}{2 \cdot 2\sqrt{6}} = \frac{35}{4\sqrt{6}}.$$

Ответ:  $\frac{35}{4\sqrt{6}}$ .

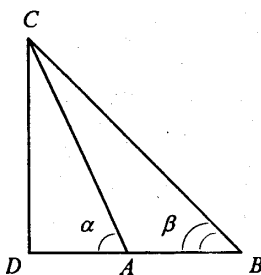


- № 15. Объясните, как найти расстояние от точки А до недоступной точки В, зная расстояние АС и углы  $\alpha$  и  $\beta$ .



По теореме синусов:  $\frac{AB}{\sin\beta} = \frac{AC}{\sin\angle B}$ , тогда:  $AB = \frac{AC \cdot \sin\beta}{\sin\angle B}$ ,  
 т.к.  $\angle B = 180^\circ - (\alpha + \beta)$ , то  $\sin B = \sin(180^\circ - (\alpha + \beta)) = \sin(\alpha + \beta)$   
 и  $AB = \frac{AC \cdot \sin\beta}{\sin(\alpha + \beta)}$ .

- № 16. Объясните, как найти высоту  $x$  здания по углам  $\alpha$  и  $\beta$  и расстоянию  $a$ .



В  $\triangle ABC$   $\angle A = 180^\circ - \alpha$ , тогда  $\angle C = 180^\circ - \beta - (180^\circ - \alpha) = \alpha - \beta$ .

Далее по теореме синусов:  $\frac{AC}{\sin\beta} = \frac{AB}{\sin\angle C}$ , так что

$$AC = \frac{AB \cdot \sin\beta}{\sin(\alpha - \beta)}.$$

$\triangle ACD$  — прямоугольный, поэтому:

$$x = CD = AC \sin\alpha = \frac{AB \sin\alpha \cdot \sin\beta}{\sin(\alpha - \beta)}.$$

- № 18.** В треугольнике  $ABC$   $\angle A = 40^\circ$ ,  $\angle B = 60^\circ$ ,  $\angle C = 80^\circ$ .  
Какая из сторон треугольника наибольшая, какая — наименьшая?

По теореме синусов  $\frac{AB}{\sin \angle C} = \frac{BC}{\sin \angle A} = \frac{AC}{\sin \angle B}$ . Из условия следует что  $\sin \angle C > \sin \angle B > \sin \angle A$ , тогда  $AB > AC > BC$ , т.е. сторона  $AB$  — наибольшая, а сторона  $BC$  — наименьшая.

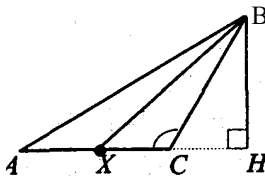
- № 19.** У треугольника  $ABC$  стороны  $AB = 5,1$  м,  $BC = 6,2$  м,  $AC = 7,3$  м. Какой из углов треугольника наибольший, какой — наименьший?

По теореме синусов  $\frac{AB}{\sin \angle C} = \frac{BC}{\sin \angle A} = \frac{AC}{\sin \angle B}$ . Так как по условию  $AC > BC > AB$ , то и  $\sin \angle B > \sin \angle A > \sin \angle C$ , значит и  $\angle B > \angle A > \angle C$ . Поэтому  $\angle B$  — наибольший, а  $\angle C$  — наименьший.

- № 20.** Что больше — основание или боковая сторона равнобедренного треугольника, если прилежащий к основанию угол больше  $60^\circ$ ?

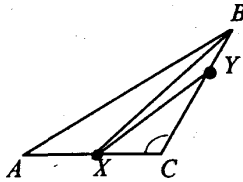
Так как прилежащий к основанию угол больше  $60^\circ$ , то угол при вершине меньше  $60^\circ$ . По теореме синусов против меньшего угла лежит меньшая сторона, так что боковая сторона больше.

- № 21.** У треугольника  $ABC$  угол  $C$  тупой. Докажите, что если точка  $X$  лежит на стороне  $AC$ , то  $BX < AB$ .



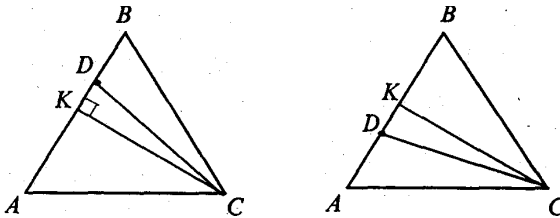
Проведем  $BH \perp AC$ . Так как  $X$  лежит на  $AC$ , то  $AH > XH$ , а значит, наклонная  $AB > BX$  (т.к. из двух наклонных больше та, проекция которой больше). Что и требовалось доказать.

- № 22. У треугольника  $ABC$  угол  $C$  тупой. Докажите, что если точка  $X$  лежит на стороне  $AC$ , а точка  $Y$  — на стороне  $BC$ , то  $XY < AB$ .



Соединим  $X$  с  $B$ , по доказанному в предыдущей задаче  $XB < AB$  и  $XY < XB$ . Так что  $XY < AB$ , что и требовалось доказать.

- № 23. На стороне  $AB$  треугольника  $ABC$  отмечена точка  $D$ . Докажите, что отрезок  $CD$  меньше по крайней мере одной из сторон:  $AC$  или  $BC$ .



Проведем  $CK \perp AB$ . Точка  $D$  лежит или между  $B$  и  $K$  или между  $A$  и  $K$ .

Если  $D$  лежит между точками  $K$  и  $B$ , то  $KB > KD$ ; а если проекция больше, то больше и наклонная, т.е.  $AB > CD$ .

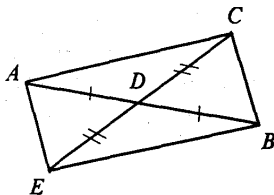
Аналогично доказывается, что  $CD < AC$ , если точка  $D$  лежит между точками  $A$  и  $K$ .

Если  $D$  совпадает с  $K$ , то  $CD < CB$ , так как наклонная больше перпендикуляра.

Что и требовалось доказать.

- № 24\*. Дан треугольник  $ABC$ ,  $CD$  — медиана, проведенная к стороне  $AB$ . Докажите, что если  $AC > BC$ , то угол  $ACD$  меньше угла  $BCD$ .

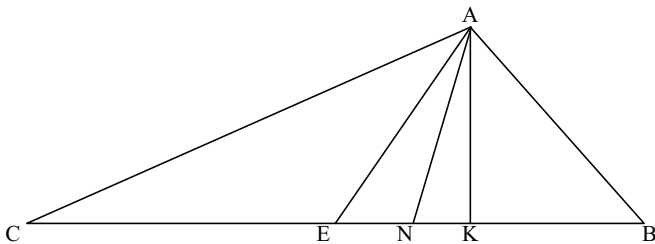
Продолжим медиану  $CD$  и отложим на ней отрезок  $DE = CD$ ; полученный четырехугольник  $ACBE$  — параллелограмм.  $BE = AC$  и  $CB = AE$ .



В  $\triangle ACE$   $\angle ACD$  лежит против стороны  $AE = CB$ . В  $\triangle CBE$   $\angle BCD$  лежит против стороны  $BE = AC$ . Так как  $AC > BC$ , то  $\angle ACD < \angle BCD$ . Что и требовалось доказать.

**№ 25\*.** Докажите, что биссектриса треугольника не меньше высоты и не больше медианы, проведенных из этой же вершины.

Пусть в  $\triangle ABC$ ,  $AK$  — высота,  $AN$  — биссектриса  $\angle A$ ,  $AE$  — медиана.



Из точки  $A$  к прямой  $BC$  проведены перпендикуляр  $AK$  (высота) и две наклонные. Следовательно точка  $N$  принадлежит либо  $KB$ , либо  $KE$ .

Точка  $N$  совпадает с  $K$ , тогда  $AN = AK < AE$ .

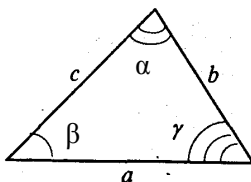
Точка  $N$  совпадает с  $E$ , тогда  $AN = AE > AK$ .

Точка  $N$  лежит между точками  $K$  и  $E$ , тогда  $AK < AN < AE$  (так как ее проекция  $NK$  меньше  $EK$  — проекции  $AE$ ).

По доказанному в задаче № 24,  $AN$  не может быть больше  $AE$ , т.е. точка  $N$  не может лежать между  $E$  и  $C$ . Что и требовалось доказать.

№ 26. Даны сторона и два угла треугольника. Найдите третий угол и остальные две стороны, если:

- 1)  $a = 5, \beta = 30^\circ, \gamma = 45^\circ$
- 2)  $a = 20, \alpha = 75^\circ, \beta = 60^\circ$ ;
- 3)  $a = 35, \beta = 40^\circ, \gamma = 120^\circ$ ;
- 4)  $b = 12, \alpha = 36^\circ, \beta = 25^\circ$ ;
- 5)  $c = 14, \alpha = 64^\circ, \beta = 48^\circ$ .



$$1) \alpha = 180^\circ - \beta - \gamma = 180^\circ - 30^\circ - 45^\circ = 105^\circ$$

Используя теорему синусов:  $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$ , получаем:

$$b = \frac{a \sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{5 \sin 30^\circ}{\sin 105^\circ} \approx 2,59,$$

$$c = \frac{a \sin \gamma}{\sin \alpha} = \frac{5 \sin 45^\circ}{\sin 105^\circ} \approx 3,66.$$

$$2) \gamma = 180^\circ - \alpha - \beta = 180^\circ - 75^\circ - 60^\circ = 45^\circ.$$

Используя теорему синусов:  $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$ , получаем:

$$b = \frac{a \cdot \sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{20 \cdot \sin 60^\circ}{\sin 75^\circ} = \frac{20 \cdot 0,87}{0,97} \approx 17,9,$$

$$c = \frac{a \cdot \sin \gamma}{\sin \alpha} = \frac{20 \cdot \sin 45^\circ}{\sin 75^\circ} = \frac{20 \cdot 0,7}{0,97} \approx 14,4.$$

$$3) \alpha = 180^\circ - \beta - \gamma = 180^\circ - 120^\circ - 40^\circ = 20^\circ.$$

Используя теорему синусов:  $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$ , получаем:

$$b = \frac{a \cdot \sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{35 \cdot \sin 40^\circ}{\sin 20^\circ} = \frac{35 \cdot 0,64}{0,34} \approx 65,8,$$

$$c = \frac{a \cdot \sin \gamma}{\sin \alpha} = \frac{35 \cdot \sin 120^\circ}{\sin 20^\circ} = \frac{35 \cdot 0,87}{0,34} \approx 89,6.$$

$$4) \gamma = 180^\circ - \alpha - \beta = 180^\circ - 36^\circ - 25^\circ = 119^\circ.$$

Используя теорему синусов:  $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$ , получаем:

$$c = \frac{b \cdot \sin \gamma}{\sin \alpha} = \frac{12 \cdot \sin 119^\circ}{\sin 25^\circ} \approx \frac{12 \cdot 0,88}{0,42} = 24,8,$$

$$a = \frac{b \cdot \sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{12 \cdot 0,88}{0,42} \approx 16,7.$$

$$5) \gamma = 180^\circ - \alpha - \beta = 180^\circ - 64^\circ - 48^\circ = 68^\circ.$$

Используя теорему синусов:  $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$ , получаем:

$$a = \frac{c \cdot \sin \alpha}{\sin \gamma} = \frac{14 \cdot \sin 64^\circ}{\sin 68^\circ} = \frac{14 \cdot 0,9}{0,93} \approx 13,6,$$

$$b = \frac{c \cdot \sin \beta}{\sin \gamma} = \frac{14 \cdot 0,74}{0,93} \approx 11,2.$$

**№ 27.** Даны две стороны и угол между ними. Найдите остальные два угла и третью сторону, если:

- 1)  $a = 12, b = 8, \gamma = 60^\circ$ ;
- 2)  $a = 7, b = 23, \gamma = 130^\circ$ ;
- 3)  $b = 9, c = 17, \alpha = 95^\circ$ ;
- 4)  $b = 14, c = 10, \alpha = 145^\circ$ ;
- 5)  $a = 32, c = 23, \beta = 152^\circ$ ;
- 6)  $a = 24, c = 18, \beta = 15^\circ$ .

1) Используя теорему косинусов, находим:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma} = \sqrt{144 + 64 - 2 \cdot 96 \cdot 0,5} = \sqrt{112} \approx 10,6.$$

$$\text{Далее } \cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{(10,6)^2 + 64 - 144}{2 \cdot 8 \cdot 10,6} \approx 0,19, \text{ так что}$$

$$\alpha = 79^\circ, \text{ а } \beta = 180^\circ - 79^\circ - 60^\circ = 41^\circ.$$

2) Используя теорему косинусов, находим:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma} = \sqrt{49 + 529 + 2 \cdot 7 \cdot 23 \cdot 0,64} = \sqrt{784,08} \approx 28.$$

$$\text{Далее } \cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{529 + 784 - 49}{2 \cdot 23 \cdot 28} \approx 0,98, \text{ так что}$$

$$\alpha = 11^\circ, \text{ а } \beta = 180^\circ - 11^\circ - 130^\circ = 39^\circ.$$

3) Используя теорему косинусов, находим:

$$a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha} = \sqrt{81 + 289 - 306 \cos 95^\circ} = \sqrt{396,7} \approx 19,9.$$

$$\text{Далее } \cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{396,01 + 289 - 81}{2 \cdot 19,9 \cdot 17} = \frac{604,01}{676,6} = 0,89,$$

$$\text{так что } \beta = 27^\circ, \text{ а } \gamma = 180^\circ - 95^\circ - 27^\circ = 58^\circ.$$

4) Используя теорему косинусов, находим:

$$a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha} = \sqrt{196 + 100 + 227,6} = \sqrt{523,6} \approx 22,9.$$

$$\text{Далее: } \cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{100 + 523,6 - 196}{2 \cdot 22,9 \cdot 10} \approx 0,93, \text{ так что}$$

$$\beta = 21^\circ, \text{ а } \gamma = 180^\circ - \alpha - \beta = 180^\circ - 145^\circ - 21^\circ = 14^\circ.$$

5) Используя теорему косинусов, находим:

$$\begin{aligned} b &= \sqrt{a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta} = \sqrt{1024 + 529 + 1472 \cdot 0,88} = \\ &= \sqrt{2848,36} \approx 53,4. \end{aligned}$$

$$\text{Далее: } \cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{2848,36 + 529 - 1024}{2 \cdot 53,4 \cdot 23} \approx 0,9580,$$

$$\text{так что } \alpha = 16^\circ, \text{ а } \gamma = 180^\circ - 152^\circ - 16^\circ = 12^\circ.$$

6) Используя теорему косинусов, находим:

$$b = \sqrt{a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta} = \sqrt{576 + 324 + 864 \cdot \cos 15^\circ} \approx \sqrt{61,9} \approx 7,9.$$

Далее;  $\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{324 + 61,9 - 576}{2 \cdot 7,9 \cdot 18} \approx -0,67$ , так что  $\alpha = 130^\circ$ , а  $\gamma = 180^\circ - 15^\circ - 130^\circ = 35^\circ$ .

**№ 28.** В треугольнике заданы две стороны и угол, противолежащий одной из сторон. Найдите остальные углы к сторону треугольника, если:

- 1)  $a = 12, b = 5, \alpha = 120^\circ$ ;
- 2)  $a = 27, b = 9, \alpha = 138^\circ$ ;
- 3)  $a = 34, b = 12, \alpha = 164^\circ$ ;
- 4)  $a = 2, b = 4, \alpha = 60^\circ$ ;
- 5)  $a = 6, b = 8, \alpha = 30^\circ$ .

1) По теореме синусов имеем:  $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$ , откуда получаем:

$$\sin \beta = \frac{b \cdot \sin \alpha}{a} = \frac{5 \cdot \sin 120^\circ}{12} = \frac{5 \cdot 0,87}{12} \approx 0,3608,$$

т.е.  $\beta = 21^\circ, \gamma = 180^\circ - 120^\circ - 21^\circ = 39^\circ$  и

$$c = \frac{a \cdot \sin \gamma}{\sin \alpha} = \frac{12 \cdot \sin 39^\circ}{\sin 120^\circ} = \frac{12 \cdot 0,63}{0,87} \approx 8,69.$$

2) По теореме синусов имеем:  $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$ , откуда получаем:

$$\sin \beta = \frac{b \cdot \sin \alpha}{a} = \frac{9 \cdot \sin 138^\circ}{27} = \frac{9 \cdot 0,67}{27} \approx 0,223,$$

т.е.  $\beta \approx 13^\circ, \gamma = 180^\circ - 138^\circ - 13^\circ = 29^\circ$  и

$$c = \frac{a \cdot \sin \gamma}{\sin \alpha} = \frac{27 \cdot \sin 29^\circ}{\sin 138^\circ} = \frac{27 \cdot 0,48}{0,67} \approx 19,6.$$



3) По теореме синусов имеем:  $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$ , откуда получаем:

$$\sin \beta = \frac{b \cdot \sin \alpha}{a} = \frac{12 \cdot \sin 164^\circ}{34} = \frac{12 \cdot 0,28}{34} \approx 0,0973,$$

т.е.  $\beta = 6^\circ$ ,  $\gamma = 180^\circ - 164^\circ - 6^\circ = 10^\circ$  и

$$c = \frac{a \cdot \sin \gamma}{\sin \alpha} = \frac{34 \cdot 0,18}{0,28} \approx 22,3.$$

4) По теореме синусов имеем:  $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$ , откуда получаем:

$$\sin \beta = \frac{b \cdot \sin \alpha}{a} = \frac{4 \cdot 0,87}{2} = 1,73,$$

но  $\sin \beta$  должен быть меньше 1, значит, задача не имеет решения.

5) По теореме синусов имеем:  $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$ , откуда получаем:

$$\sin \beta = \frac{b \cdot \sin \alpha}{a} = \frac{8 \cdot 0,5}{6} \approx 0,667,$$

т.е.  $\beta_1 = 42^\circ$  или  $\beta_2 = 138^\circ$ . Тогда  $\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta$ , т.е.  $\gamma_1 = 108^\circ$  или  $\gamma_2 = 12^\circ$ . Далее  $c = \frac{a \cdot \sin \gamma}{\sin \alpha}$ , так что  $c_1 \approx 11,4$  или  $c_2 \approx 2,49$ .

**№ 29.** Даны три стороны треугольника. Найдите его углы, если:

- 1)  $a = 2, b = 3, c = 4$ ;
- 2)  $a = 7, b = 2, c = 8$ ;
- 3)  $a = 4, b = 5, c = 7$ ;
- 4)  $a = 15, b = 24, c = 18$ ;

$$5) a = 23, b = 17, c = 39;$$

$$6) a = 55, b = 21, c = 38.$$

1) По теореме косинусов имеем:

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{9 + 16 - 4}{24} = 0,875, \alpha \approx 29^\circ,$$

$$\cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{4 + 16 - 9}{16} = 0,6875, \beta \approx 47^\circ.$$

$$\text{Тогда } \gamma = 180^\circ - 29^\circ - 47^\circ = 104^\circ.$$

2) По теореме косинусов имеем:

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{4 + 64 - 49}{2 \cdot 2 \cdot 8} = \frac{19}{32} = 0,5938, \alpha = 54^\circ,$$

$$\cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{49 + 64 - 4}{2 \cdot 7 \cdot 8} = \frac{109}{112} = 0,9732, \beta = 13^\circ.$$

$$\text{Тогда } \gamma = 180^\circ - 54^\circ - 13^\circ = 113^\circ.$$

3) По теореме косинусов имеем:

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{25 + 49 - 16}{2 \cdot 5 \cdot 7} = \frac{58}{70} \approx 0,8286, \alpha = 34^\circ,$$

$$\cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{16 + 49 - 25}{2 \cdot 4 \cdot 7} = \frac{40}{56} \approx 0,7143, \beta = 44^\circ.$$

$$\text{Тогда } \gamma = 180^\circ - 34^\circ - 44^\circ = 102^\circ.$$

4) По теореме косинусов имеем:

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{576 + 324 - 225}{2 \cdot 24 \cdot 18} \approx 0,7813, \alpha = 39^\circ,$$

$$\cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{324 + 225 - 578}{2 \cdot 15 \cdot 18} = -\frac{27}{540} = -0,05, \beta = 93^\circ.$$

$$\text{Тогда } \gamma = 180^\circ - 39^\circ - 93^\circ = 180^\circ - 132^\circ = 48^\circ.$$

5) По теореме косинусов имеем:

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{289 + 1521 - 289}{2 \cdot 17 \cdot 39} \approx 0,966, \alpha = 15^\circ,$$

$$\cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{529 + 1521 - 289}{2 \cdot 23 \cdot 39} \approx 0,9816, \beta = 11^\circ.$$

Тогда  $\gamma = 180^\circ - 15^\circ - 11^\circ = 154^\circ$ .

6) По теореме косинусов имеем:

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{441 + 1444 - 3025}{2 \cdot 21 \cdot 38} \approx -0,7142, \alpha = 136^\circ,$$

$$\cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{3025 + 1444 - 441}{2 \cdot 55 \cdot 38} \approx 0,9636, \beta = 15^\circ.$$

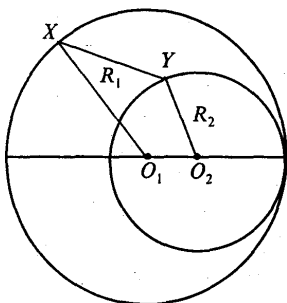
Тогда  $\gamma = 180^\circ - 136^\circ - 15^\circ = 29^\circ$ .

## § 13. МНОГОУГОЛЬНИКИ

**№ 1.** Даны две окружности с радиусами  $R_1$  и  $R_2$  и расстояние между центрами  $d > R_1 + R_2$ . Чему равны наибольшее и наименьшее расстояния между точками  $X$  и  $Y$  этих окружностей.

Задача решена в п. 113 учебника, стр. 169.

**№ 2.** Решите задачу 1 при условии, что  $d < R_1 - R_2$ .



Пусть  $X$  и  $Y$  — точки на окружностях. По теореме о длине ломаной для ломаной  $XO_1O_2Y$  имеем:

$$XY \leq XO_1 + O_1O_2 + O_2Y,$$

то есть  $XO_1 + O_1O_2 + O_2Y = R_1 + R_2 + d$  — наибольшее расстояние.

Для ломаной  $XYO_2O_1$  имеем:

$$XO_1 \leq XY + YO_2 + O_1O_2;$$

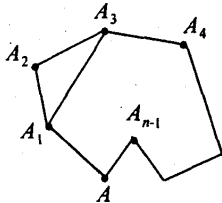
$$R_1 \leq XY + R_2 + d,$$

$$XY \geq R_1 - R_2 - d,$$

значит,  $(R_1 - R_2 - d)$  — наименьшее расстояние.

**№ 3.** Докажите, что если вершины ломаной не лежат на одной прямой, то длина ломаной больше длины отрезка, соединяющего ее концы.

Пусть  $A_1A_2A_3 \dots A_{n-1}A_n$  — ломаная, точки  $A_1, A_2, \dots, A_n$  не лежат на одной прямой.



Доказать, что  $A_1A_2 + A_2A_3 + \dots + A_{n-1}A_n > A_1A_n$ .

Точки  $A_1, A_2, A_3$  не лежат на одной прямой, по неравенству треугольника имеем:

$$A_1A_2 + A_2A_3 > A_1A_3. \quad (1)$$

Для ломаной  $A_1A_3A_4$  получим:

$$A_1A_3 + A_3A_4 > A_1A_4. \quad (2)$$

Подставив (1) в (2), получим:

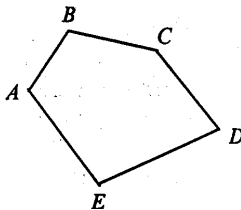
$$A_1A_2 + A_2A_3 + A_3A_4 > A_1A_4.$$

Продолжая преобразования, дальше аналогично получим:

$$A_1A_2 + A_2A_3 + \dots + A_{n-1}A_n > A_1A_n,$$

что и требовалось доказать.

**№ 4.** Докажите, что у замкнутой ломаной расстояние между любыми двумя вершинами не больше половины длины ломаной.



Пусть  $ABCDEA$  — замкнутая ломаная линия.

Расстояние между двумя вершинами, например,  $A$  и  $D$  будем считать отрезком, соединяющим концы ломаной, следовательно по теореме о длине ломаной имеем:  $AD \leq AB + BC + CD$  и  $AD \leq AE + ED$ , сложив два неравенства, получим:

$$2AD \leq AB + BC + CD + DE + EA,$$

$$AD \leq \frac{1}{2}(AB + BC + CD + DE + EA).$$

Что и требовалось доказать.

**№ 5.** Докажите, что у замкнутой ломаной длина каждого звена не больше суммы длин остальных звеньев.

Так же, как и в решении задачи № 4, получаем, что

$$AE \leq AB + BC + CD + DE.$$

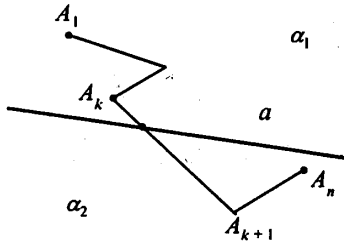
Для других звеньев аналогично.

**№ 6.** Может ли замкнутая ломаная иметь звенья длиной 1 м, 2 м, 3 м, 4 м, 11 м? Объясните ответ.

Для замкнутой ломаной длина самого большого звена должна быть меньше суммы длин всех остальных звеньев. Для данной ломаной должно выполняться  $1 + 2 + 3 + 4 > 11$ , то есть  $11 < 10$ , что неверно.

Ответ. Не может.

**№ 7.** Докажите, что если концы ломаной лежат по разные стороны от данной прямой, то она пересекает эту прямую.



Докажем, что у прямой и ломаной найдется хотя бы одна общая точка.

Прямая  $a$  разбивает плоскость на две полуплоскости  $a_1$  и  $a_2$ , в которых лежат концы  $A_1$ , и  $A_n$  ломаной  $A_1A_2, \dots, A_n$ . Докажем, что у прямой  $a$  и ломаной найдется хотя бы одна общая точка. Допустим, что  $A_1 \in a_1$ ,  $A_n \in a_2$ . Каждая из вершин  $A_2A_3, \dots, A_{n-1}$  принадлежит одной из полуплоскостей или прямой  $a$ . Если  $A_2 \in a_2$ , то отрезок  $A_1A_2$ , пересекает прямую  $a$ , если  $A_2 \in a$ , то  $A_2$  является общей точкой прямой и ломаной. Если  $A_2 \in a_1$ , то рассмотрим вершину  $A_3$  и т.д. То есть если  $A_3 \in a_2$ , то отрезок  $A_2A_3$  пересечет прямую  $a$ , если  $A_3 \in a$ , то  $A_3$  является общей точкой прямой и ломаной. Если  $A_3 \in a_1$ , перейдем к рассмотрению вершины  $A_4$  и т.д. Допустим, что среди вершин  $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$  не найдется ни одной, которая бы лежала в  $a_2$  или на прямой  $a$ , то в этом случае отрезок  $A_{n-1}A_n$  пересечет прямую  $a$ . Что и требовалось доказать.

**№ 8.** Сколько диагоналей у  $n$ -угольника?

Из каждой вершины  $n$ -угольника можно провести диагонали ко всем вершинам, кроме самой себя и двух соседних, т.е.  $n - 3$  диагонали. Поскольку каждая диагональ соединяет две вершины, то общее количество диагоналей

$$d = \frac{n(n-3)}{2}$$

**№ 10.** Углы выпуклого четырехугольника пропорциональны числам 1, 2, 3, 4. Найдите их.

По теореме о сумме углов многоугольника имеем:

$$S_4 = 180^\circ(n - 2) = 180^\circ \cdot (4 - 2) = 180^\circ \cdot 2 = 360^\circ.$$

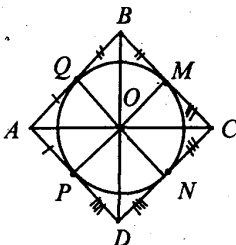
Пусть градусная мера 1-го угла  $k^\circ$ , 2-го —  $2k^\circ$ , 3-го —  $3k^\circ$  и 4-го —  $4k^\circ$ . Так как сумма всех углов  $360^\circ$ , получим уравнение:

$$k + 2k + 3k + 4k = 360^\circ; 10k = 360^\circ; k = 36^\circ.$$

Значит, 1 угол —  $36^\circ$ , 2-й —  $72^\circ$ , 3-й —  $108^\circ$ , 4-й —  $144^\circ$ .

**№ 11.** Докажите, что у четырехугольника, описанного около окружности, суммы длин противоположных сторон равны.

Пусть  $ABCD$  — четырехугольник, описанный около окружности.



По свойству касательной  $AP = AQ$ ,  $DP = DN$ ,  $CN = CM$  и  $BQ = BM$ , получаем, что

$$AB + CD = AQ + BQ + CN + DN;$$

$$BC + AD = BM + CM + AP + DP.$$

Следовательно

$$AB + CD = BC + AD.$$

Что и требовалось доказать.

**№ 12.** Сколько сторон имеет правильный многоугольник, каждый из внутренних углов которого равен: 1)  $135^\circ$ ; 2)  $150^\circ$ ?

Угол правильного  $n$ -угольника вычисляется по формуле:

$$\alpha = \frac{180^\circ(n-2)}{n};$$

$$1) 135^\circ = \frac{180^\circ n - 360^\circ}{n}, \quad 135^\circ n = 180^\circ n - 360^\circ, \quad -45^\circ n = -360^\circ,$$

$$n = 360^\circ : 45^\circ, \quad n = 8;$$

$$2) 150^\circ = \frac{180^\circ n - 360^\circ}{n}, \quad 150^\circ n = 180^\circ n - 360^\circ, \quad -30^\circ n = -360^\circ,$$

$$n = 360^\circ : (-30^\circ), \quad n = 8.$$



- № 13. Сколько сторон имеет правильный многоугольник, если каждый из внешних его углов равен: 1)  $36^\circ$ ; 2)  $24^\circ$ ?

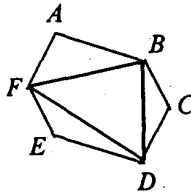
$$S_\alpha = 360^\circ, \alpha = \frac{360^\circ}{n};$$

$$1) 36^\circ = \frac{360^\circ}{n}, 36^\circ n = 360^\circ, n = 360^\circ : 36^\circ, n = 10;$$

$$2) 24^\circ = \frac{360^\circ}{n}, 24^\circ n = 360^\circ, n = 360^\circ : 24^\circ, n = 15.$$

- № 14. Докажите, что взятые через одну вершины правильного  $2n$ -угольника являются вершинами правильного  $n$ -угольника.

Пусть  $ABCDEF$  — правильный  $2n$ -угольник.



Рассмотрим  $\triangle ABF$  и  $\triangle BCD$ .

$FA = BC$ ,  $AB = CD$  (как стороны правильного многоугольника);  $\angle A = \angle C$  (как углы правильного многоугольника).

Значит,  $\triangle FAB = \triangle BCD$  (по 1-му признаку), т.е.  $FB = BD$ .

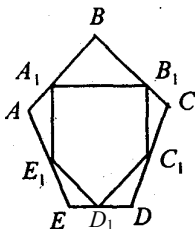
Аналогично доказывается, что все стороны  $n$ -угольника  $BDF$  равны, следовательно  $n$ -угольник — правильный.

Что и требовалось доказать.

- № 15. Докажите, что середины сторон правильного  $n$ -угольника являются вершинами другого правильного  $n$ -угольника.

Пусть  $ABCDE$  — правильный  $n$ -угольник,  $AA_1 = A_1B$ ,  $BB_1 = B_1C$  и т.д.

Рассмотрим  $\triangle A_1BB_1$  и  $\triangle B_1CC_1$ .

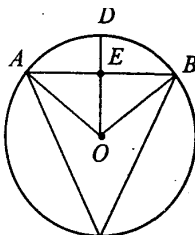


$A_1B = B_1C$ ,  $BB_1 = CC_1$  (как половины равных сторон  $n$ -угольника);  $\angle B = \angle C$  (из условия). Значит,  $\triangle A_1BB_1 = \triangle B_1CC_1$ , так что  $A_1B_1 = B_1C_1$ .

Аналогично доказывается, что все стороны полученного  $n$ -угольника равны, то есть  $n$ -угольник — правильный.

Что и требовалось доказать.

**№ 17.** Хорда, перпендикулярная радиусу и проходящая через его середину, равна стороне правильного вписанного треугольника. Докажите.



Нужно доказать, что:

$$AB = a_3 = R\sqrt{3},$$

где  $R$  — радиус окружности.

Рассмотрим  $\triangle OEB$ .

$\angle E = 90^\circ$ , т.к.  $OD \perp AB$  (по условию),  $OB = R$ ,  $OE = \frac{1}{2}R$  (по условию). По теореме Пифагора:

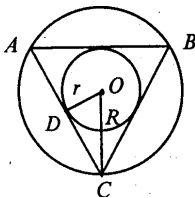
$$EB^2 = OB^2 - OE^2 = R^2 - \frac{1}{4}R^2 = \frac{3}{4}R^2, \quad EB = \sqrt{\frac{3}{4}R^2} = \frac{R\sqrt{3}}{2}.$$

Далее  $\triangle AEO = \triangle EBO$  (так как  $AO = OB$  и катет  $OE$  — общий). Так что:  $EA = EB = \frac{R\sqrt{3}}{2}$ . Тогда

$$AB = AE + EB = \frac{R\sqrt{3}}{2} + \frac{R\sqrt{3}}{2} = R\sqrt{3}.$$

Что и требовалось доказать.

**№ 18.** У правильного треугольника радиус вписанной окружности в два раза меньше радиуса описанной окружности. Докажите.



Пусть в  $\triangle ABC$   $AB = a$ ,  $OC = R$  — радиус описанной окружности,  $OD = r$  — радиус вписанной окружности.

Рассмотрим  $\triangle DOC$ .

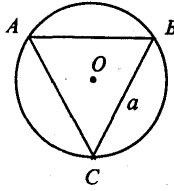
$\angle D = 90^\circ$  ( $AC$  — касательная),  $\angle OCD = \frac{1}{2} \angle C = \frac{1}{2} 60^\circ = 30^\circ$  (как биссектриса равнобедренного треугольника). Тогда  $\sin \angle OCD = \frac{OD}{OC}$ . То есть

$$\sin 30^\circ = \frac{r}{R}, \frac{1}{2} = \frac{r}{R}, R = 2r.$$

Что и требовалось доказать.

**№ 19.** Сторона правильного вписанного в окружность треугольника равна  $a$ . Найдите сторону квадрата, вписанного в эту окружность.

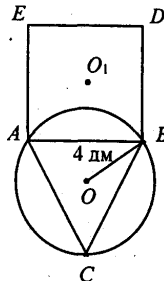
Дано:  $\triangle ABC$  — правильный, вписанный в окружность  $a_3 = a$ . Найдём  $a_4$ .



Так как  $a_3 = R\sqrt{3}$ , то  $a = R\sqrt{3}$ ;  $R = \frac{a}{\sqrt{3}}$ .

Далее  $a_4 = R\sqrt{2} = \frac{a}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2} = a\sqrt{\frac{2}{3}}$ .

- № 20.** В окружность, радиус которой 4 дм, вписан правильный треугольник, на стороне которого построен квадрат. Найдите радиус окружности, описанной около квадрата.



Пусть  $\triangle ABC$  — правильный, вписанный в окружность,  $OB = R_1 = 4$  дм,  $ABDE$  — квадрат,  $R_2$  — радиус описанной около квадрата окружности.

Тогда  $a_3 = R_1\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$  дм,  $a_4 = a_3 = 4\sqrt{3}$  дм. Далее:

$a_4 = R_2\sqrt{2}$ ,  $R_2 = \frac{a_n}{\sqrt{2}}$ , т.е.

$$R_2 = \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = 4 \cdot \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{4 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{6}}{2} = 2\sqrt{6} \text{ дм.}$$

Ответ:  $R_2 = 2\sqrt{6}$  дм.

- № 21. Конец валика диаметром 4 см опилен под квадрат. Определите наибольший размер, который может иметь сторона квадрата.

Вписанный в окружность квадрат имеет большую сторону. Найдем ее.

$$R = d:2 = 4:2 = 2 \text{ см.}$$

$$a_4 = R\sqrt{2} = 2\sqrt{2} \text{ см.}$$

Ответ:  $2\sqrt{2}$  см.

- № 22. Конец винта газовой задвижки имеет правильную трехгранную форму. Какой наибольший размер может иметь каждая грань, если цилиндрическая часть винта имеет диаметр 2 см?

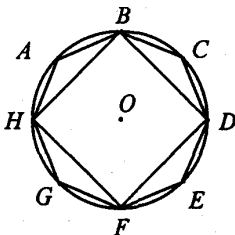
Требуется найти сторону вписанного в окружность треугольника.

$$R = d:2 = 2:2 = 1 \text{ см.}$$

$$a_3 = R\sqrt{3} = 1 \cdot \sqrt{3} = \sqrt{3} \text{ см.}$$

Ответ:  $\sqrt{3}$  см.

- № 23. Докажите, что сторона правильного 8-угольника вычисляется по формуле  $a_8 = R\sqrt{2-\sqrt{2}}$ , где  $R$  — радиус описанной окружности.



Пусть в окружность с радиусом  $R$  вписан правильный 8-угольник ABCDEFGH.

Тогда в  $\triangle HAV$ :  $HV = a_4 = R\sqrt{2}$ ,  $AH = AV = a_8$ ,  $\angle A = 135^\circ$ .  
 По теореме косинусов:  $HV^2 = HA^2 + AV^2 - 2HA \cdot AV \cdot \cos \angle A$ , т.е.

$$(R\sqrt{2})^2 = a_8^2 + a_8^2 - 2a_8^2 \cdot \cos 135^\circ,$$

т.к.  $\cos 135^\circ = -\cos 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ , то

$$2R^2 = 2a_8^2 + \sqrt{2} a_8^2 = a_8^2(2 + \sqrt{2}),$$

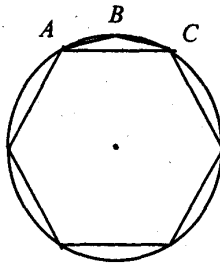
отсюда

$$a_8^2 = \frac{2R^2 \cdot (2 - \sqrt{2})}{(2 + \sqrt{2})(2 - \sqrt{2})} = \frac{2R^2 \cdot (2 - \sqrt{2})}{2} = R^2(2 - \sqrt{2}),$$

$$a_8 = \sqrt{R^2(2 - \sqrt{2})} = R\sqrt{2 - \sqrt{2}}.$$

Что и требовалось доказать.

**№ 24.** Докажите, что сторона правильного 12-угольника вычисляется по формуле  $a_{12} = R\sqrt{2 - \sqrt{3}}$ , где  $R$  — радиус описанной окружности.



Пусть в окружность с радиусом  $R$  вписан  $ABC\dots$  — правильный 12-угольник.

В  $\triangle ABC$ :  $AC = a_6 = R$ ,  $AB = BC = a_{12}$ ,  $\angle B = 150^\circ$ , из теоремы косинусов получаем:  $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos \angle B$ ,

так как  $\cos 150^\circ = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ , то

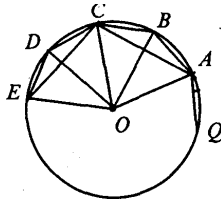
$$R^2 = a_{12}^2 + a_{12}^2 + 2a_{12}^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2a_{12}^2 + \sqrt{3}a_{12}^2 = a_{12}^2(2 + \sqrt{3})$$

$$a_{12}^2 = \frac{R^2}{2 + \sqrt{3}} = \frac{R^2 \cdot (2 - \sqrt{3})}{(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})} = \frac{R^2(2 - \sqrt{3})}{1} = R^2(2 - \sqrt{3}),$$

т.е.  $a_{12} = \sqrt{R^2(2 - \sqrt{3})} = R\sqrt{2 - \sqrt{3}}$ .

Что и требовалось доказать.

**№ 25\*.** Найдите стороны правильного пятиугольника и правильного 10-угольника, вписанных в окружность радиуса  $R$ .



Пусть ABCD... — правильный 10-угольник, ACE... — правильный 5-угольник,  $AO = R$ .

1) Рассмотрим  $\triangle ABO$ :  $AB = a_{10}$ ;  $OA = OB = R$ .

$$\angle A = \angle B = \frac{1}{2} \cdot \frac{180^\circ \cdot (10 - 2)}{10} = 72^\circ,$$

тогда  $\angle O = 180^\circ - \angle A - \angle B = 36^\circ$ .

В задаче № 29 §11 доказано, что основание равнобедренного треугольника с такими углами равно  $\frac{R(\sqrt{5} - 1)}{2}$ , т.е.

$$a_{10} = \frac{R(\sqrt{5} - 1)}{2}.$$

2) Из  $\triangle ABC$  по теореме косинусов получаем:

$$a_5^2 = AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos \angle B,$$

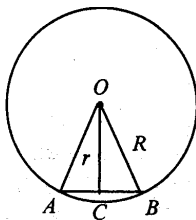
$$a_5^2 = \frac{R^2(\sqrt{5}-1)^2}{4} + \frac{R^2(\sqrt{5}-1)^2}{4} - 2 \cdot \frac{R^2(\sqrt{5}-1)^2}{4} \cos 144^\circ = \\ = \frac{R^2(\sqrt{5}-1)^2}{2} (1 + \cos 36^\circ),$$

так как  $\cos 144^\circ = -\cos 36^\circ$ .

Из  $\triangle ABO$   $\cos 36^\circ = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$  (по теореме косинусов), так что подставив, получим

$$a_5 = R \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{2}}.$$

**№ 26.** Сторона правильного многоугольника равна  $a$ , а радиус описанной окружности  $R$ . Найдите радиус вписанной окружности.



Пусть  $O$  — центр окружности,  $AB = a$  — сторона правильного многоугольника,  $OA = R$  — радиус описанной окружности,  $OC = r$  — радиус вписанной окружности.

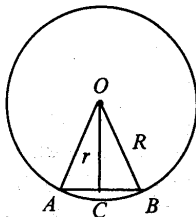
В  $\triangle OBC$ :  $\angle C = 90^\circ$ ,  $CB = \frac{a}{2}$ ,  $OB = R$ ; так что по теореме Пифагора получаем:

$$r^2 = R^2 - \frac{a^2}{4},$$

$$r = \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{4}}.$$



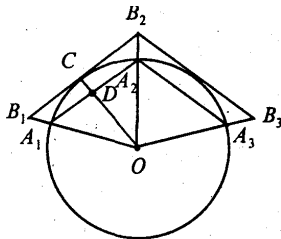
- № 27. Сторона правильного многоугольника равна  $a$ , а радиус вписанной окружности  $r$ . Найдите радиус описанной окружности.



Пользуясь решением задачи № 26, мы получили  $R^2 = r^2 + \frac{a^2}{4}$ , так что  $R = \sqrt{r^2 + \frac{a^2}{4}}$ .

- № 28. Выразите сторону  $b$  правильного описанного многоугольника через радиус  $R$  окружности и сторону  $a$  правильного вписанного многоугольника с тем же числом сторон.

Пусть  $A_1A_2\dots A_n$  — правильный  $n$ -угольник, вписанный в окружность радиуса  $R$ , а  $B_1B_2\dots B_n$  — правильный  $n$ -угольник, описанный около той же окружности,  $A_1A_2 = a$ ,  $B_1B_2 = b$ .



Рассмотрим  $\triangle OA_1D$  и  $\triangle OB_1C$ :  $\angle O$  — общий;  $\angle D = \angle C = 90^\circ$ .  
Значит,  $\triangle OA_1D \sim \triangle OB_1C$ .

Из подобия треугольников следует, что:  $\frac{OD}{OC} = \frac{A_1D}{B_1C}$ , то  
есть  $B_1C = \frac{OC \cdot A_1D}{OD}$ .

Далее  $OC = R$ ,  $A_1D = \frac{a}{2}$ .  $OD$  найдем из  $\triangle ODA_1$  по теореме Пифагора:

$$OD = \sqrt{OA_1^2 - A_1D^2} = \sqrt{R^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{4R^2 - a^2},$$

так что

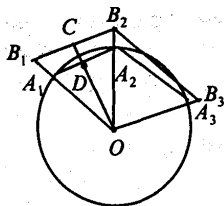
$$B_1C = \frac{R \cdot \frac{a}{2} \cdot 2}{\sqrt{4R^2 - a^2}} = \frac{Ra}{\sqrt{4R^2 - a^2}},$$

$$b = 2B_1C = \frac{2aR}{\sqrt{4R^2 - a^2}}.$$

Ответ:  $b = \frac{2aR}{\sqrt{4R^2 - a^2}}$ .

**№ 29.** Выразите сторону  $a$  правильного вписанного многоугольника через радиус  $R$  окружности и сторону  $b$  правильного описанного многоугольника с тем же числом сторон.

Пусть  $B_1B_2\dots B_n$  — правильный  $n$ -угольник, описанный около окружности радиуса  $R$ ;  $B_1B_2 = b$ .  $A_1A_2\dots A_n$  — правильный  $n$ -угольник, вписанный в ту же окружность;  $A_1A_2 = a$ .



$\triangle OB_1C \sim \triangle OA_1D$  (по двум углам), откуда:

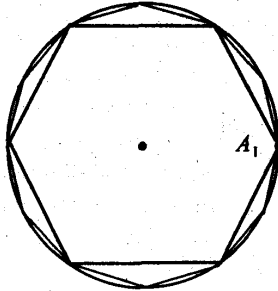
$$\frac{OD}{OC} = \frac{A_1D}{B_1C}; A_1D = \frac{OD \cdot B_1C}{OC}.$$

Так как  $OC = R$ ,  $B_1D = \frac{b}{2}$  и  $OD = \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{4R^2 - a^2}$ ,

то

$$A_1D = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{4R^2 - a^2} \cdot \frac{b}{2}}{R}, \quad a = 2A_1D = \frac{\sqrt{4b^2 \cdot R^2}}{\sqrt{4R^2 + b^2}} = \frac{2bR}{\sqrt{4R^2 + b^2}}.$$

**№ 30.** Впишите в окружность правильный 12-угольник.

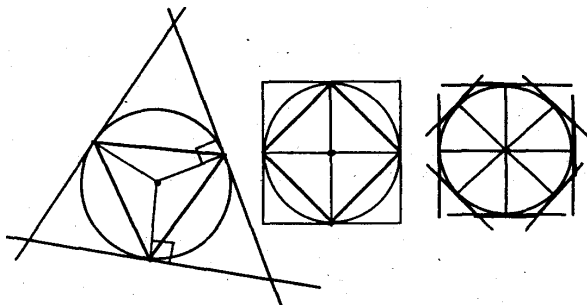


Выберем произвольную вершину  $A_1$  на окружности. Из нее радиусом, равным радиусу окружности, делаем засечки на окружности и получаем вершины  $A_2, A_3, \dots, A_6$ , которые соединим отрезками. Получим правильный шестиугольник. Далее построим серединные перпендикуляры к сторонам шестиугольника. Они разделят дуги окружности на 12 равных частей. Соединив эти точки отрезками с вершинами шестиугольника, получим 12-угольник.

**№ 31.** Опишите около окружности правильный треугольник, квадрат, правильный восьмиугольник.

Рассмотрим построение правильного треугольника.

На окружности выберем произвольную точку  $A_1$ . Из нее проведем дугу радиуса окружности и получаем вершины  $A_2$  и  $A_3$  — точки пересечения дуги и окружности. Проведем через точки  $A_1, A_2, A_3$  касательные к окружности. Точки пересечения касательных будут вершинами искомого треугольника.



Для построения четырехугольника и восьмиугольника проводим два перпендикулярных диаметра. Далее построение аналогично рассмотренному.

- № 32.** Радиусы вписанной и описанной окружностей одного правильного  $n$ -угольника равны  $r_1$  и  $R_1$ , а радиус вписанной окружности другого правильного  $n$ -угольника равен  $r_2$ . Чему равен радиус описанной окружности другого  $n$ -угольника?

Так как правильные  $n$ -угольники подобны, то получаем, что  $\frac{r_1}{r_2} = \frac{R_1}{R_2}$  откуда имеем:  $R_2 = \frac{R_1 r_2}{r_1}$ .

- № 33.** Периметры двух правильных  $n$ -угольников относятся как  $a:b$ . Как относятся радиусы их вписанных и описанных окружностей?

У правильных  $n$ -угольников отношения периметров равно отношению радиусов вписанных и описанных окружностей, так что отношения радиусов будут  $a:b$ .

- № 34.** Вычислите длину окружности, если радиус равен:  
1) 10 м; 2) 15 м.

Длина окружности вычисляется по формуле:

$$l = 2\pi R.$$

- 1)  $R = 10$  м,  $l = 2\pi R = 2 \cdot 3,14 \cdot 10 = 62,8$  м.  
2)  $R = 15$  м,  $l = 2\pi R = 2 \cdot 3,14 \cdot 15 = 94,2$  м.

**№ 35.** На сколько изменится длина окружности, если радиус изменится на 1 мм?

Допустим радиус равен  $R$  мм, следовательно  $l_1 = 2\pi R$  мм, после изменения радиус станет  $(R + 1)$  мм и  $l_2 = 2\pi(R + 1) = 2\pi R + 2\pi = l_1 + 2\pi$ . Так что длина окружности изменится на  $2\pi$  или  $\approx 6,28$  мм.

**№ 36.** Найдите отношение периметра правильного вписанного 8-угольника к диаметру и сравните его с приближенным значением  $\pi$ .

Сторона правильного 8-угольника равна  $R\sqrt{2-\sqrt{2}}$  (см. задачу № 23), тогда,  $P_8 = 8R\sqrt{2-\sqrt{2}}$ , и, значит,

$$\frac{P_8}{d} = \frac{8R\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2R} = 4\sqrt{2-\sqrt{2}} \approx 3,06 < \pi.$$

Ответ:  $\approx 3,06$ .

**№ 37.** Решите задачу № 36 для правильного 12-угольника.

$a_{12} = R\sqrt{2-\sqrt{3}}$  (см. задачу № 24). Тогда:  $P_{12} = 12R\sqrt{2-\sqrt{3}}$ , а значит

$$\frac{P_{12}}{d} = \frac{12R\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2R} = 6\sqrt{2-\sqrt{3}} \approx 3,12 < \pi.$$

Ответ:  $\approx 3,12$

**№ 38.** Найдите радиус земного шара исходя из того, что 1 м составляет одну 40-миллионную долю длины экватора.

Пусть  $l$  — длина экватора, тогда  $l = 2\pi R$  и  $R = l/2\pi$ . Далее, так как длина экватора 40000000 м, то:

$$R = \frac{40000000}{2\pi} \approx 6366,3 \text{ км.}$$

Ответ:  $\approx 6366,3$  км.

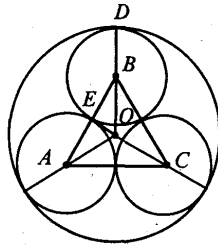
**№ 39.** На сколько удлинился бы земной экватор, если бы радиус земного шара увеличился на 1 см?

Из задачи № 35 имеем, что с изменением радиуса на 1 мм, длина окружности изменится на  $2\pi$  мм. Значит, при увеличении радиуса земли на 1 см, длина экватора увеличится на  $2\pi$  см  $\approx 6,28$  см.

Ответ:  $\approx 6,28$  см

**№ 40.** Внутри окружности радиуса  $R$  расположены  $n$  равных окружностей, которые касаются друг друга в данной окружности. Найдите радиус этих окружностей, если число их равно: 1) 3; 2) 4; 3) 6.

1) Пусть внутри окружности радиусом  $R$  с центром в точке  $O$  расположены 3 равных окружности — окр ( $A$ ;  $r$ ), окр ( $B$ ;  $r$ ) и окр ( $C$ ;  $r$ ).



$\triangle ABC$  — равносторонний, так как  $AB = BC = AC = 2r$ ,  
 $OE \perp AB$ ,  $\angle EBO = 30^\circ$ ,  $BE = r$ .

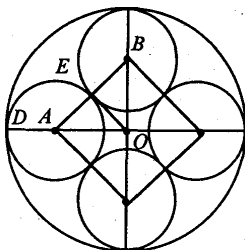
В  $\triangle OBE$  имеем:  $EB = OB \cdot \cos \angle EBO$ , так что:

$$OB = \frac{EB}{\cos \angle EBO} = \frac{r}{\cos 30^\circ} = r : \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2r}{\sqrt{3}}$$

$$BD = r, R = BD + OB = r + \frac{2r}{\sqrt{3}} = r \left( 1 + \frac{2}{\sqrt{3}} \right). \text{ Тогда}$$

$$r = \frac{R}{\left( 1 + \frac{2}{\sqrt{3}} \right)} = \frac{R\sqrt{3}}{\sqrt{3} + 2}.$$

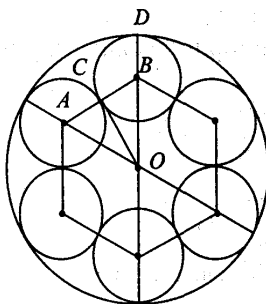
2)  $OD = R$ ,  $AD = r$ ,  $OE \perp AB$ ,  $AB = 2r$ ;  $OD = DA + AO$ , но  $AO = r\sqrt{2}$  (как половина диагонали квадрата).



Значит,  $R = r + r\sqrt{2}$ ,  $R = r(1 + \sqrt{2})$ , откуда

$$r = \frac{R}{(1 + \sqrt{2})} = \frac{R(1 - \sqrt{2})}{(1 - 2)} = R(\sqrt{2} - 1).$$

3)  $OD = R$ ,  $BD = r$ ,  $CB = r$ ;  $OC \perp AB$ ;  $OB = AB = 2r$  (как радиус описанной окружности шестиугольника).



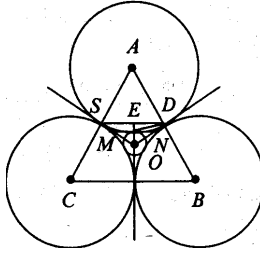
Тогда  $OD = OB + BD$ ;  $R = 3r$ , откуда имеем  $r = \frac{R}{3}$ .

**№ 41.** Решите предыдущую задачу, если окружности расположены вне данной окружности.

1) Три равные окружности касаются друг друга.  $OE = R$ .

Проведем  $SD \perp OE$  и  $MN \perp OE$ , тогда,  $SD \parallel MN$ .

Рассмотрим  $\triangle OMD$  и  $\triangle OEN$ :  $\angle M = \angle E$  (как прямые);  $\angle N = \angle D$  (соответственные). Тогда,  $\triangle OMD \sim \triangle OEN$ .



Поэтому  $\frac{OD}{ON} = \frac{MD}{EN}$ , откуда имеем:

$$MD = \frac{OD \cdot EN}{ON} \quad (1).$$

В  $\triangle OEN$   $\angle E = 90^\circ$ ,  $\angle O = 60^\circ$ , тогда  $\angle N = 30^\circ$ , значит,  $OE = \frac{1}{2} ON$ , т.е.:  $R = \frac{1}{2} ON$ ,  $ON = 2R$ , тогда:

$$EN = \sqrt{4R^2 - R^2} = R\sqrt{3}$$

В  $\triangle END$ ,  $\angle DEM$  — половина угла вписанного правильного 12-угольника, поэтому:

$$\angle DEM = \frac{1}{2} \cdot \frac{180^\circ(12-2)}{12} = \frac{1}{2} \cdot 150^\circ = 75^\circ.$$

Тогда,  $\angle DEN = 15^\circ$ ,  $\angle EDN = 15^\circ$ , поэтому  $\triangle END$  — равнобедренный и  $EN = ND = R\sqrt{3}$ , получаем, что:

$$OD = ON + ND = 2R + R\sqrt{3}.$$

Подставим в пропорцию (1):

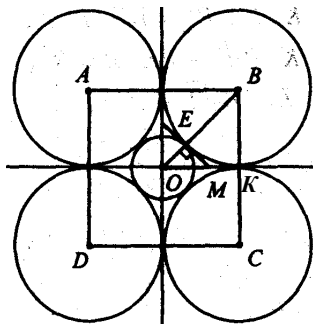
$$MD = \frac{(2R + R\sqrt{3}) \cdot R\sqrt{3}}{2R} = \frac{2R\sqrt{3} + 3R}{2} = \frac{R(2\sqrt{3} + 3)}{2}.$$

$\triangle ASD$  — равносторонний, так что:

$$AD = SD = 2MD = 2 \cdot \frac{R(2\sqrt{3} + 3)}{2} = R(2\sqrt{3} + 3).$$



2) Пусть четыре равные окружности, касаются друг друга, и окружность с центром в точке  $O$  и радиусом  $OE = R$ .



Проведем касательную  $EM$  к окр ( $O$ ;  $R$ ), она пересечет  $OK$  в точке  $M$ ;  $EM \perp OB$ . В  $\triangle OBK$  и  $\triangle OEM$ :  $\angle K = \angle E$  (как прямые);  $\angle O = \angle O$  (общий), значит,  $\triangle OBK \sim \triangle OEM$ . Поэтому

$$\frac{OB}{OM} = \frac{BK}{EM} \quad (1),$$

$$BK = \frac{OB \cdot EM}{OM} \quad (2).$$

В  $\triangle OEM$   $\angle E = 90^\circ$ ,  $\angle O = 45^\circ$ , тогда,  $\angle M = 45^\circ$  и  $OE = EM = R$ , значит:  $OM = \sqrt{R^2 + R^2} = R\sqrt{2}$

В  $\triangle OBK$   $OB = R + EB = R + BK$  (т.к.  $EB = BK$ ).

Полученные выражения подставим в (1):  $\frac{BK + R}{R\sqrt{2}} = \frac{BK}{R}$ , т.е.

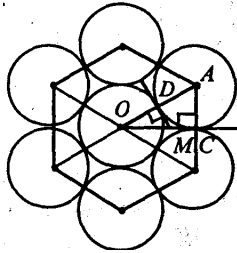
$$BK \cdot R \cdot R^2 = BK \cdot R\sqrt{2},$$

$$BK \cdot R\sqrt{2} - BK \cdot R = R^2,$$

$$BK(R\sqrt{2} - R) = R^2,$$

$$BK = \frac{R}{R(\sqrt{2} - 1)} = \frac{R(\sqrt{2} + 1)}{(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1)} = R(\sqrt{2} + 1).$$

3)  $\triangle OAC \sim \triangle ODM$  (по двум углам).



Значит  $\frac{OA}{OM} = \frac{AC}{DM}$  (1), но  $OA = R + DA$ , в  $\triangle ODM \angle D = 90^\circ$ ,  $\angle O = 30^\circ$ , тогда,  $DM = \frac{1}{2} OM$ ,  $OM = 2DM$ , по теореме Пифагора:  $R^2 = 4DM^2 - DM^2$ ;  $R^2 = 3DM^2$ ;  $DM = \frac{R}{\sqrt{3}}$ ;  $OM = \frac{2R}{\sqrt{3}}$ .

Подставим полученные значения  $DM$  и  $OM$  в (1):

$$\begin{aligned} \frac{R + DA}{\frac{2R}{\sqrt{3}}} &= \frac{DA}{\frac{R}{\sqrt{3}}} \\ \frac{R}{\sqrt{3}}(R + DA) &= \frac{2R}{\sqrt{3}} DA, \\ R(R + DA) &= 2R \cdot DA, \\ R^2 + R \cdot DA &= 2R \cdot DA, \\ 2R \cdot DA - R \cdot DA &= R^2, \\ DA(2R - R) &= R^2, \\ DA \cdot R &= R^2, \\ DA &= R. \end{aligned}$$

**№ 42.** Шкив имеет в диаметре 1,4 м и делает 80 оборотов в минуту. Найдите скорость точки на окружности шкива.

$d = 1,4$  м, так что  $R = 1,4 : 2 = 0,7$  м;  $l = 2\pi R \approx 2 \cdot 3,14 \cdot 0,7 \approx 4,396$  м, но  $v = lk$ , где  $k$  — число оборотов в минуту, так что  $v \approx 4,396 \cdot 80 \approx 351,68$  м/мин.

- № 43.** Найдите длину дуги окружности радиуса 1 см, отвечающей центральному углу: 1)  $30^\circ$ ; 2)  $45^\circ$ ; 3)  $120^\circ$ ; 4)  $270^\circ$ .

Длина дуги вычисляется по формуле  $l = \frac{\pi R}{180^\circ} \cdot \alpha^\circ$ . В нашем случае  $R = 2$  см, так что

$$l = \frac{\pi \alpha^\circ}{180^\circ} \text{ см.}$$

$$1) l = \frac{\pi \cdot 1 \cdot 30^\circ}{180^\circ} = \frac{\pi}{6} \text{ см.}$$

$$2) l = \frac{\pi \cdot 1 \cdot 45^\circ}{180^\circ} = \frac{\pi}{4} \text{ см.}$$

$$3) l = \frac{\pi \cdot 1 \cdot 120^\circ}{180^\circ} = \frac{2\pi}{3} \text{ см.}$$

$$4) l = \frac{\pi \cdot 1 \cdot 270^\circ}{180^\circ} = \frac{3\pi}{2} \text{ см.}$$

- № 44.** Сколько градусов содержит центральный угол, если соответствующая ему дуга составляет: 1)  $\frac{1}{23}$ ; 2)  $\frac{1}{4}$ ; 3)  $\frac{1}{5}$ ; 4)  $\frac{1}{6}$ ; 5)  $\frac{2}{5}$ ; 6)  $\frac{3}{4}$  окружности?

Пусть  $l$  — длина окружности, а  $l_1$  — длина дуги. Тогда  $l = 2\pi R$ ,  $l_1 = \frac{\pi R}{180^\circ} \cdot \alpha^\circ$ . Так что

$$\alpha = \frac{l_1 \cdot 180^\circ}{\pi R} = \frac{2l_1}{l} \cdot 180^\circ.$$

$$1) \alpha = \frac{1}{3} \cdot 360^\circ = 120^\circ;$$

$$2) \alpha = \frac{1}{4} \cdot 360^\circ = 90^\circ;$$

$$3) \alpha = \frac{1}{5} \cdot 360^\circ = 72^\circ;$$

$$4) \alpha = \frac{1}{6} \cdot 360^\circ = 60^\circ;$$

$$5) \alpha = \frac{2}{3} \cdot 360^\circ = 240^\circ;$$

$$6) \alpha = \frac{3}{4} \cdot 360^\circ = 270^\circ.$$

**№ 45.** Какой угол образуют радиусы Земли, проведенные в две точки на ее поверхности, расстояние между которыми равно 1 км? Радиус Земли равен 6370 км.

$R = 6370$  км — радиус Земли.  $l = 1$  км — расстояние между двумя точками на поверхности Земли,  $\alpha$  — угол между радиусами.

Имеем:  $l = \frac{\pi R}{180^\circ} \cdot \alpha$ . Тогда:

$$\alpha = \frac{l \cdot 180^\circ}{\pi R} = \frac{1 \cdot 180^\circ}{3,14 \cdot 6370} = 32''.$$

**№ 46.** По радиусу  $R = 1$  м найдите длину дуги, отвечающей центральному углу: 1)  $45^\circ$ ; 2)  $30^\circ$ ; 3)  $120^\circ$ ; 4)  $45^\circ 45'$ ; 5)  $60^\circ 30'$ ; 6)  $150^\circ 36'$ .

$l = \frac{\pi R}{180^\circ} \cdot \alpha$ , откуда имеем:

$$1) l \approx \frac{3,14 \cdot 1 \cdot 45^\circ}{180^\circ} = 0,79 \text{ м.}$$

$$2) l \approx \frac{3,14 \cdot 1 \cdot 30^\circ}{180^\circ} = 0,52 \text{ м.}$$

$$3) l \approx \frac{3,14 \cdot 1 \cdot 120^\circ}{180^\circ} = 2,09 \text{ м.}$$

$$4) l \approx \frac{3,14 \cdot 1 \cdot 45,75^\circ}{180^\circ} = 0,8 \text{ м.}$$

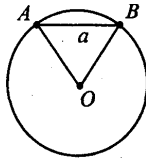
$$5) l \approx \frac{3,14 \cdot 1 \cdot 60,5^\circ}{180^\circ} = 1,06 \text{ м.}$$

$$6) l \approx \frac{3,14 \cdot 1 \cdot 150,6^\circ}{180^\circ} = 2,63 \text{ м.}$$

**№ 47.** По данной хорде  $a$  найдите длину ее дуги, если градусная мера дуги равна: 1)  $60^\circ$ ; 2)  $90^\circ$ ; 3)  $120^\circ$ .

Пусть дана окружность с центром  $O$ ; хорда  $AB = a$ , а градусная мера дуги равна  $60^\circ, 90^\circ, 120^\circ$ .

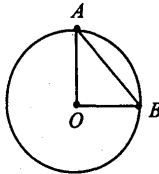
1.  $\alpha = 60^\circ$ . Рассмотрим  $\triangle OAB$ .



$AO = OB$  (как радиусы окружности), и  $\angle AOB = \alpha = 60^\circ$ . Тогда  $\angle A = \angle B = (180^\circ - 60^\circ):2 = 60^\circ$ , значит  $\triangle OAB$  — равнобедренный и:  $R = AO = a$ . Далее:

$$l = \frac{\pi R}{180^\circ} \cdot \alpha = \frac{\pi \cdot a \cdot 60^\circ}{180^\circ} = \frac{\pi a}{3}.$$

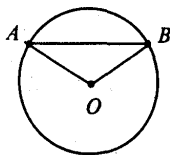
2.  $\alpha = 90^\circ$ .  $\triangle OAB$  — прямоугольный, равнобедренный.



По теореме Пифагора получим:  $a^2 = R^2 + R^2 = 2R^2$ , откуда:  
 $R^2 = \frac{a^2}{2}$ ,  $R = \frac{a}{\sqrt{2}}$ . Далее получаем:

$$l = \frac{\pi R}{180^\circ} \cdot \alpha = \frac{\pi \cdot \frac{a}{\sqrt{2}} \cdot 90^\circ}{180^\circ} = \frac{\pi a}{2\sqrt{2}}.$$

3)  $\alpha = 120^\circ$ . В  $\triangle AOB$   $\angle AOB = \alpha = 120^\circ$ , по теореме косинусов получим:  $AB^2 = AO^2 + OB^2 - 2AO \cdot OB \cdot \cos \angle AOB$ .

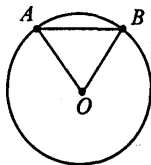


Так что  $a^2 = R^2 + R^2 - 2R^2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 3R^2$ ,  $R = \frac{a}{\sqrt{3}}$ . Далее

$$l = \frac{\pi R}{180^\circ} \cdot \alpha = \frac{\pi \cdot a \cdot 120^\circ}{180^\circ} = \frac{2\pi a}{3\sqrt{3}}.$$

**№ 48.** По данной длине дуги  $l$  найдите ее хорду, если дуга содержит: 1)  $60^\circ$ ; 2)  $90^\circ$ ; 3)  $120^\circ$ .

1)  $\alpha = 60^\circ$ .

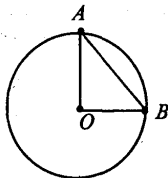


$l = \frac{\pi \cdot R \cdot 60^\circ}{180^\circ}$ , откуда имеем:  $R = \frac{3l}{\pi}$ . Так как  $\triangle ABO$  — рав-

носторонний, то

$$AB = R = \frac{3l}{\pi}.$$

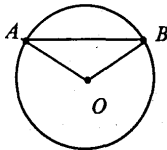
2)  $\alpha = 90^\circ$ .



$l = \frac{\pi \cdot R \cdot 90^\circ}{180^\circ}$ ,  $R = \frac{3l}{\pi}$ . Далее,  $\triangle AOB$  — прямоугольный, так что по теореме Пифагора:  $AO^2 + OB^2 = AB^2$ ,  $R^2 + R^2 = AB^2$ .

$$AB = \sqrt{2R^2} = R\sqrt{2} = \frac{2l}{\pi}\sqrt{2}.$$

3)  $\alpha = 120^\circ$ .



$l = \frac{\pi \cdot R \cdot 120^\circ}{180^\circ}$ , т.е.  $R = \frac{3l}{\pi}$ . В  $\triangle AOB$  по теореме косинусов:  $AO^2 + OB^2 - 2AO \cdot OB \cdot \cos\alpha = AB^2$ .  $R^2 + R^2 - 2R^2 \cos 120^\circ = AB^2$ ,  $3R^2 = AB^2$ .

$$AB = R\sqrt{3} = \frac{3l\sqrt{3}}{2\pi}.$$

**№ 49.** Найдите радианную меру углов: 1)  $30^\circ$ ; 2)  $45^\circ$ ; 3)  $60^\circ$ .

$$1) 30^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{\pi}{6};$$

$$2) 45^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{\pi}{4};$$

$$3) 60^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{\pi}{3}.$$

**№ 50.** Найдите радианную меру углов треугольника ABC, если  $\angle A = 60^\circ$ ;  $\angle B = 45^\circ$ .

Так как  $\angle A = 60^\circ$ , то:

$$\angle A = 60^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{\pi}{3}.$$

Так как  $\angle B = 45^\circ$ , то:

$$\angle B = 45^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{\pi}{4}.$$

$\angle C = 180^\circ - 60^\circ - 45^\circ = 75^\circ$ ; так что:

$$\angle C = 75^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{5\pi}{12}.$$

Ответ:  $\frac{\pi}{3}$ ;  $\frac{\pi}{4}$  и  $\frac{5\pi}{12}$ .

**№ 51.** Найдите градусную меру угла, если его радианная

мера равна: 1)  $\frac{\pi}{2}$ ; 2)  $\frac{\pi}{4}$ ; 3)  $\frac{\pi}{8}$ ; 4)  $\frac{5\pi}{6}$ ; 5)  $\frac{7\pi}{18}$ ; 6)  $\frac{4\pi}{3}$ .

1)  $\frac{\pi}{2} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 90^\circ$ ;

2)  $\frac{\pi}{4} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 45^\circ$ ;

3)  $\frac{\pi}{8} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 22,5^\circ$ ;

4)  $\frac{5\pi}{6} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 150^\circ$ ;

5)  $\frac{7\pi}{18} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 70^\circ$ ;

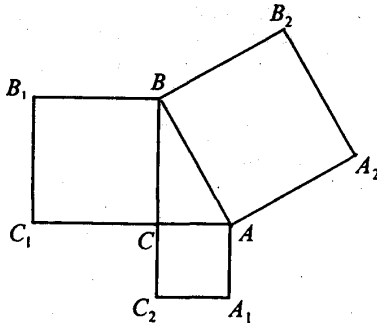
6)  $\frac{4\pi}{3} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 240^\circ$ .



## § 14. ПЛОЩАДИ ФИГУР

**№ 1.** Докажите, что сумма площадей квадратов, построенных на катетах прямоугольного треугольника, равна площади квадрата, построенного на гипотенузе.

Пусть катет  $AC = b$ ,  $BC = a$ , гипотенуза  $AB = c$ ; следовательно:  $S_{AA_1C_2C} = b^2$ ,  $S_{BB_1C_2C} = a^2$ ,  $S_{ABB_2A_2} = c^2$ .



Из теоремы Пифагора имеем:  $a^2 + b^2 = c^2$ , то есть

$$S_{AA_1C_2C} + S_{BB_1C_2C} = S_{ABB_2A_2}.$$

Что и требовалось доказать.

**№ 2.** Стороны двух участков земли квадратной формы равны 100 м и 150 м. Найдите сторону квадратного участка, равновеликого им.

$$a_1 = 100 \text{ м}, a_2 = 150 \text{ м}. S_1 + S_2 = S_3.$$

$$S_1 = a_1^2 = 100 \cdot 100 = 10000 \text{ м}^2.$$

$$S_2 = a_2^2 = 150 \cdot 150 = 22500 \text{ м}^2.$$

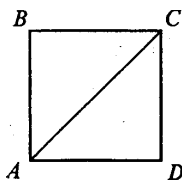
$$S_3 = S_1 + S_2 = 10000 + 22500 = 32500 \text{ м}^2.$$

Но  $S_3 = a_3^2$ , откуда имеем

$$a_3 = \sqrt{S_3} = \sqrt{32500} = 50\sqrt{13} \text{ м} \approx 180 \text{ м.}$$

Ответ:  $a_3 \approx 180$  м.

**№ 3.** Найдите площадь квадрата  $S$  по его диагонали  $a$ .



ABCD — квадрат,  $AC = a$ . В  $\triangle ABC$   $\angle B = 90^\circ$ , по теореме Пифагора:  $AB^2 + BC^2 = AC^2$ , т.к.  $AB = BC$ , то:  $2AB^2 = AC^2$ , то есть

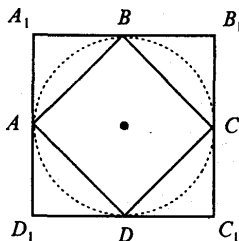
$$2AB^2 = a^2, AB^2 = \frac{a^2}{2},$$

следовательно:

$$S = AB^2 = \frac{a^2}{2}.$$

Ответ:  $S = \frac{a^2}{2}$ .

**№ 4.** Во сколько раз площадь квадрата, описанного около окружности, больше площади квадрата, вписанного в ту же окружность?



Пусть  $ABCD$  — квадрат, вписанный в окружность;  
 $A_1B_1C_1D_1$  — квадрат, описанный около окружности.

Рассмотрим  $\triangle AA_1B_1$ ,  $\angle A_1 = 90^\circ$ , по теореме Пифагора:  
 $AB^2 = AA_1^2 + A_1B_1^2$ , то есть

$$AB^2 = \left(\frac{1}{2} A_1B_1\right)^2 + \left(\frac{1}{2} A_1B_1\right)^2 = \frac{1}{2} A_1B_1^2,$$

так как:  $AB^2 = S_{ABCD}$ ,  $A_1B_1^2 = S_{A_1B_1C_1D_1}$ , то:

$$S_{A_1B_1C_1D_1} : S_{ABCD} = \frac{AB_1^2}{AB^2} = 2.$$

**№ 5.** Как изменится площадь квадрата, если каждую его сторону увеличить в 3 раза?

Сторона квадрата равна  $a$ , его площадь равна  $a^2$ . Если сторону увеличить в 3 раза, то она станет —  $3a$ , а площадь —  $9a^2$ .

Далее:  $\frac{9a^2}{a^2} = 9$ .

Ответ: Площадь увеличится в 9 раз.

**№ 6.** Во сколько раз надо уменьшить стороны квадрата, чтобы его площадь уменьшилась в 25 раз?

Пусть  $a^2$  — площадь квадрата, уменьшенного в 25 раз, тогда  $25a^2$  — площадь квадрата, следовательно, сторона квадрата  $5a$ , где  $a$  — сторона уменьшенного квадрата. Значит, сторону квадрата следует уменьшить в 5 раз.

**№ 7.** Чему равны стороны прямоугольника, если они относятся как 4:9, а его площадь  $144 \text{ м}^2$ ?

Пусть одна сторона прямоугольника будет  $4x$  м, тогда другая —  $9x$  м, площадь  $4x \cdot 9x = 36x^2 \text{ м}^2$ , что по условию задачи равно  $144 \text{ м}^2$ .

$$36x^2 = 144, x^2 = 4, x = 2.$$

Тогда  $4x = 8$  м и  $9x = 18$  м. Значит, 1-я сторона — 8 м, 2-я сторона — 18 м.

**№ 8.** Чему равны стороны прямоугольника, если его периметр 74 дм, а площадь 3 м<sup>2</sup>?

Пусть одну сторону прямоугольника  $x$  дм; а другая  $y$  дм, тогда периметр будет  $(x + y) \cdot 2$ , что равно 74 дм, а площадь  $xy$  дм<sup>2</sup> по условию равна 300 дм<sup>2</sup>.

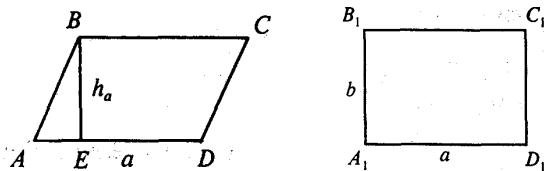
$$\begin{cases} (x + y) \cdot 2 = 74 \\ xy = 300 \end{cases} \begin{cases} x + y = 37 \\ xy = 300 \end{cases} \begin{cases} x = 37 - y \\ (37 - y)y = 300 \end{cases}$$

$$-y^2 + 37y - 300 = 0, y^2 - 37y + 300 = 0,$$

т.е.  $y_1 = 12$  дм, а  $y_2 = 25$  дм. Тогда  $x_1 = 25$  дм, а  $x_2 = 12$  дм.

Ответ. Одна сторона — 12 дм, другая — 25 дм.

**№ 9.** Параллелограмм и прямоугольник имеют одинаковые стороны. Найдите острый угол параллелограмма, если площадь его равна половине площади прямоугольника.



Пусть  $ABCD$  — параллелограмм с острым углом  $A$ .  
 $A_1B_1C_1D_1$  — прямоугольник. Тогда  $AD = A_1D_1 = a$ ,  $AB = A_1B_1 = b$ .

1)  $S_{A_1B_1C_1D_1} = ab$ ,  $S_{ABCD} = ah = \frac{1}{2} S_{A_1B_1C_1D_1} = \frac{1}{2} ab$ . Тогда  $h = \frac{b}{2}$ .

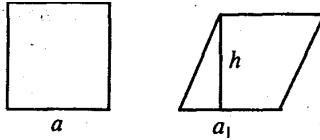
2) В  $\triangle ABE$   $\angle E = 90^\circ$ , так что  $\sin \angle A = \frac{h}{b} = \frac{b}{2b} = \frac{1}{2}$ , значит,

$\angle A = 30^\circ$ .

Ответ:  $30^\circ$ .

**№ 10.** Квадрат и ромб имеют одинаковые периметры. Какая из фигур имеет большую площадь? Объясните ответ.

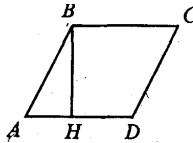
Пусть  $P_{\text{кв}} = P_{\text{ромба}}$ . Но  $P_{\text{кв}} = 4a$ , а  $P_{\text{ромба}} = 4a$ .



Тогда  $a = a_1$ .  $S_{\text{кв}} = a \cdot a$ .  $S_{\text{ромба}} = a_1 \cdot h$ , но  $h < a$ , так как катет меньше гипотенузы, а значит и  $a \cdot a_1 > a_1 \cdot h$ , так что  $S_{\text{кв}} > S_{\text{ромба}}$ .

**№ 11.** Найдите площадь ромба, если его высота 10 см, а острый угол  $30^\circ$ .

Пусть ABCD — ромб, BH = 10 см — высота,  $\angle A = 30^\circ$ .



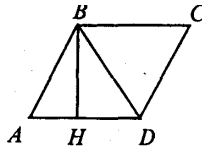
В  $\triangle ABH$   $\angle H = 90^\circ$ , так что  $BH = AB \cdot \sin \alpha$ , откуда

$$AB = \frac{BH}{\sin \alpha} = \frac{10}{\sin 30^\circ} = 20 \text{ см.}$$

Далее  $S_{\text{ромба}} = AD \cdot BH = AB \cdot BH = 20 \cdot 10 = 200 \text{ см}^2$ .  
 Ответ:  $200 \text{ см}^2$ .

**№ 12.** Найдите площадь ромба, если его высота 12 см, а меньшая диагональ 13 см.

Пусть ABCD — ромб, BD=13 см (меньшая диагональ), BH=12 см — высота.



В  $\triangle BDH$   $\angle H = 90^\circ$ ,  $BD = 13$  см,  $BH = 12$  см, по теореме Пифагора:  $HD = \sqrt{BD^2 - BH^2} = \sqrt{13^2 - 12^2} = \sqrt{25} = 5$  см.

В  $\triangle ABH$   $\angle H = 90^\circ$ ,  $BH = 12$  см,  $AH = AD - HD = (AB - 5)$  см, по теореме Пифагора имеем:  $AB^2 = AH^2 + BH^2$ , то есть

$$AB^2 = (AB - 5)^2 + 12^2 = AB^2 - 10AB + 25 + 144,$$

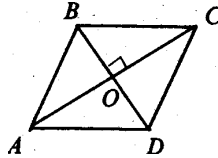
$10AB = 169$ ,  $AB = 16,9$ . Так что  $AD = AB = 16,9$  см. Далее:

$$S_{ABCD} = AD \cdot BH = 16,9 \cdot 12 = 202,8 \text{ см}^2.$$

Ответ:  $S_{ABCD} = 202,8 \text{ см}^2$ .

**№ 13.** Докажите, что площадь ромба равна половине произведения диагоналей.

Пусть  $ABCD$  — ромб,  $AC$  и  $BD$  — диагонали.



Имеем:

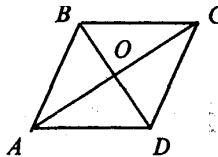
$$\begin{aligned} S_{ABCD} &= S_{\triangle ABC} + S_{\triangle ACD} = \\ &= \frac{1}{2} AC \cdot BO + \frac{1}{2} AC \cdot DO = \\ &= \frac{1}{2} AC(BO + DO) = \\ &= \frac{1}{2} AC \cdot BD = \frac{AC \cdot BD}{2}. \end{aligned}$$

Что и требовалось доказать.

**№ 14.** Найдите, стороны ромба, зная, что его диагонали относятся как 1:2, а площадь ромба равна  $12 \text{ см}^2$ .

Пусть  $ABCD$  — ромб,  $AC$  и  $BD$  — диагонали,  $\frac{BD}{AC} = \frac{1}{2}$ ,

$S_{ABCD} = 12 \text{ см}^2$ .



$$S_{\text{ABSD}} = \frac{1}{2} AC \cdot BD = 12 \text{ см}^2. \text{ Пусть } BD = x \text{ см, тогда } AC = 2x \text{ см,}$$

значит:

$$\frac{1}{2} x \cdot 2x = 12, x^2 = 12,$$

$$x = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}.$$

Значит:  $BD = 2\sqrt{3}$  см,  $AC = 4\sqrt{3}$  см.

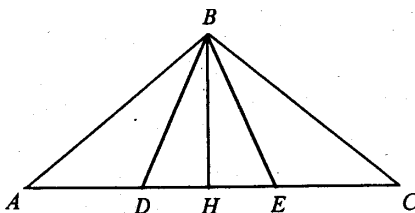
Рассмотрим  $\triangle AOB$ ,  $\angle O = 90^\circ$ , катет  $AO = \frac{1}{2} AC = 2\sqrt{3}$  см,

катет  $BO = \frac{1}{2} BD = \sqrt{3}$  см. Тогда по теореме Пифагора:

$$AB = \sqrt{AO^2 + BO^2} = \sqrt{12 + 3} = \sqrt{15} \text{ см.}$$

Ответ:  $\sqrt{15}$  см.

**№ 15.** Разделите данный треугольник на три равновеликие части прямыми, проходящими через одну вершину.



Разделим  $AC$  на  $AD = DE = EC$ . Тогда

$$S_{\text{ABD}} = \frac{1}{2} AD \cdot BH,$$

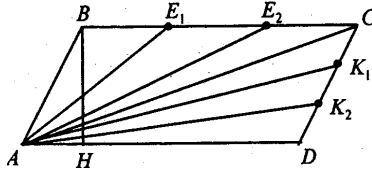
$$S_{\text{DBE}} = \frac{1}{2} DE \cdot BH,$$

$$S_{\text{EBC}} = \frac{1}{2} EC \cdot BH.$$

Так что  $S_{\text{ABD}} = S_{\text{DBE}} = S_{\text{EBC}}$ .

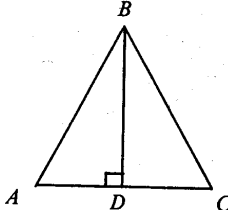
**№ 16\*.** Решите предыдущую задачу, взяв вместо треугольника параллелограмм.

Проведем диагональ  $AC$ ,  $\triangle ABC = \triangle ACD$  (по трем сторонам), тогда:  $S_{ABC} = S_{ACD}$



Разделим каждый из треугольников  $ABC$  и  $ACD$  на 3 равновеликие части, т.к. сами треугольники равны, то их части будут равновелики. Так что получится шесть равновеликих треугольников, но тогда  $S_{ABE_2} = S_{AE_2CK_1} = S_{AK_1D}$ . Так как эти фигуры содержат по 2 треугольника.

**№ 17.** Чему равна площадь равнобедренного треугольника, если его основание 120 м, а боковая сторона 100 м?  
 $\triangle ABC$  — равнобедренный,  $AB = BC = 100$  м,  $AC = 120$  м.



Проведем  $BD \perp AC$ , по свойству равнобедренного треугольника  $BD$  — медиана и высота. Тогда  $AD = \frac{1}{2} AC = 60$  м.

В  $\triangle ABD$ ,  $\angle D = 90^\circ$ ,  $AB = 100$  м,  $AD = 60$  м, по теореме Пифагора:  $BD = \sqrt{AB^2 - AD^2} = \sqrt{10000 - 3600} = \sqrt{6400} = 80$  м.  
 Далее

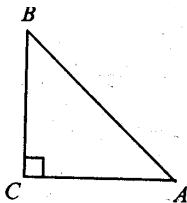
$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BD = \frac{1}{2} \cdot 120 \cdot 80 = 4800 \text{ м}^2.$$

Ответ:  $4800 \text{ м}^2$ .



№ 18. Найдите площадь равнобедренного прямоугольного треугольника с гипотенузой  $a$ .

Рассмотрим  $\triangle ABC$ ,  $\angle C = 90^\circ$ ,  $BC = AC$ ,  $AB = a$  — гипотенуза.



По теореме Пифагора имеем:  $AC^2 + BC^2 = AB^2$ ,

$$2BC^2 = a^2,$$

$$BC^2 = \frac{a^2}{2},$$

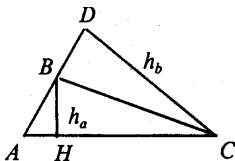
$$BC = \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

Тогда  $AC = BC = \frac{a}{\sqrt{2}}$ . Далее:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{\sqrt{2}} \cdot \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{a^2}{4}.$$

Ответ:  $\frac{a^2}{4}$ .

№ 19. У треугольника со сторонами 8 см и 4 см проведены высоты к этим сторонам. Высота, проведенная к стороне 8 см, равна 3 см. Чему равна высота, проведенная к стороне 4 см?



Пусть в  $\triangle ABC$ ,  $AC = 8$  см,  $AB = 4$  см,  $BH = h_a = 3$  см.  
Тогда, с одной стороны:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot h_a = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 3 = 12 \text{ см}^2.$$

С другой стороны,

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot h_b,$$

получаем, что

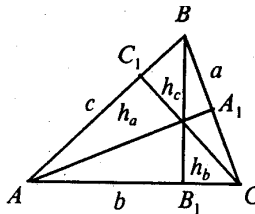
$$h_b = \frac{2S_{\triangle ABC}}{AB} = \frac{24}{4} = 6 \text{ см.}$$

Ответ: 6 см.

**№ 20.** Докажите, что стороны треугольника обратно пропорциональны его высотам, т.е.:

$$a : b : c = \frac{1}{h_a} : \frac{1}{h_b} : \frac{1}{h_c}.$$

Пусть в  $\triangle ABC$ ,  $BC = a$ ,  $AA_1 = h_a$ ,  $AC = b$ ,  $BB_1 = h_b$ ,  $AB = c$ ,  $CC_1 = h_c$ .



Тогда

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} ah_a = \frac{1}{2} bh_b = \frac{1}{2} ch_c,$$

ПОЭТОМУ:

$$a = \frac{2S}{h_a}; \quad b = \frac{2S}{h_b}; \quad c = \frac{2S}{h_c}.$$

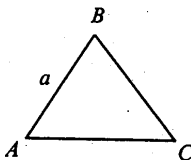
Из полученных равенств получаем

$$a : b : c = \frac{2S}{h_a} : \frac{2S}{h_b} : \frac{2S}{h_c} = \frac{1}{h_a} : \frac{1}{h_b} : \frac{1}{h_c}.$$

Что и требовалось доказать.

**№ 21.** Найдите площадь равностороннего треугольника со стороной  $a$ .

Пусть  $\triangle ABC$  — равносторонний,  $AB = a$ .



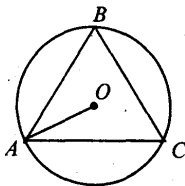
Тогда  $\angle A = \angle B = \angle C = 60^\circ$ , следовательно:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin \angle A = \frac{1}{2} a \cdot a \cdot \sin 60^\circ = \frac{1}{2} a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}a^2}{4}.$$

Ответ:  $\frac{\sqrt{3}a^2}{4}$ .

**№ 22.** Найдите площадь правильного треугольника, вписанного в круг радиуса  $R$ .

Пусть  $\triangle ABC$  — правильный, вписанный в окружность;  $AO = R$ .

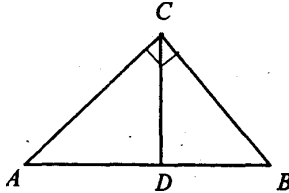


Тогда  $a_3 = R\sqrt{3}$ . То есть  $AB = BC = AC = R\sqrt{3}$ . Но тогда

$$S_{ABC} = \frac{AB^2 \sqrt{3}}{4} \text{ (по предыдущей задаче) и } S_{ABC} = \frac{3R^2 \sqrt{3}}{4}.$$

- № 23. Найдите площадь прямоугольного треугольника, если его высота делит гипотенузу на отрезки 32 см и 18 см.

Пусть в треугольнике  $ABC$ ,  $\angle C = 90^\circ$ ,  $CD$  — высота,  $AD = 32$  см,  $DB = 18$  см. Найти  $S_{\triangle ABC}$ .



$\triangle ACD \sim \triangle CBD$ , поэтому:

$$CD = \sqrt{AD \cdot DB} = \sqrt{32 \cdot 18} = \sqrt{16 \cdot 36} = 24 \text{ см.}$$

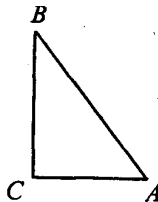
$$AB = AD + DB = 32 + 18 = 50 \text{ см.}$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot CD = 25 \cdot 24 = 600 \text{ см}^2.$$

Ответ:  $600 \text{ см}^2$ .

- № 24. Чему равны катеты прямоугольного треугольника, если его гипотенуза равна 73 см, а площадь равна  $1320 \text{ см}^2$ ?

Пусть в  $\triangle ABC$   $\angle C = 90^\circ$ ,  $AB = 73$  см,  $S = 1320 \text{ см}^2$ .



Допустим,  $AC = x$  см, а  $BC = y$  см, тогда по теореме Пифагора имеем:  $x^2 + y^2 = 73^2$ , а по формуле площади  $\frac{xy}{2} = 1320$ .

Так что:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5329 \\ \frac{xy}{2} = 1320 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5329 & (1) \\ 2xy = 5280 & (2) \end{cases}$$

Сложим и вычтем (2) из (1), получим

$$\begin{cases} x^2 + 2xy + y^2 = 10609 \\ x^2 - 2xy + y^2 = 49 \end{cases}$$

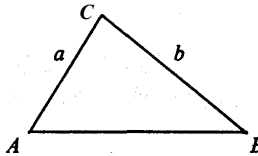
$$\begin{cases} (x + y)^2 = 10609 \\ (x - y)^2 = 49 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 103 \\ x - y = 7 \end{cases}$$

Откуда  $x = 55$ , тогда  $y = x - 7 = 48$ . То есть  $AC = 55$  см,  $BC = 48$  см.

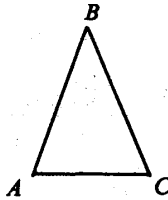
Ответ: 55 см, 48 см.

**№ 25.** У треугольника  $ABC$   $AC = a$ ,  $BC = b$ . При каком угле  $C$  площадь треугольника будет наибольшей?



Так как  $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BC \cdot \sin \angle C = \frac{1}{2} ab \sin \angle C$ , то площадь будет наибольшей при наибольшем значении  $\sin \angle C$ . А  $\sin \angle C$  — наибольший у  $\angle C = 90^\circ$ ;  $\sin 90^\circ = 1$ . Значит, при  $\angle C = 90^\circ$   $S$  будет наибольшей и равной  $\frac{1}{2} ab$ .

- № 26. Найдите площадь равнобедренного треугольника, у которого боковые стороны равны 1 м, а угол между ними равен  $70^\circ$ .



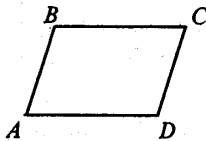
Пусть  $\triangle ABC$  — равнобедренный,  $AB = BC = 1$  м;  $\angle B = 70^\circ$ .  
Тогда

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC \cdot \sin \angle B = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \sin 70^\circ = \frac{1}{2} \cdot 0,94 = 0,47 \text{ м}^2.$$

Ответ:  $0,47 \text{ м}^2$ .

- № 27. Найдите площадь параллелограмма, если его стороны 2 м и 3 м, а один из углов равен  $70^\circ$ .

Пусть  $ABCD$  — параллелограмм,  $AD = 3$  м,  $AB = 2$  м,  $\angle A = 70^\circ$ .

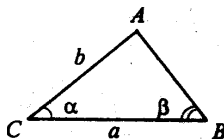


Тогда  $S_{ABCD} = AD \cdot AB \cdot \sin \angle A = 3 \cdot 2 \cdot \sin 70^\circ = 6 \cdot 0,94 = 5,64 \text{ м}^2$ .

Ответ:  $5,64 \text{ м}^2$ .

- № 28\*. Найдите площадь треугольника по стороне  $a$  и прилежащим к ней углам  $\alpha$  и  $\beta$ .

Пусть  $\triangle ABC$ ,  $BC = a$ ,  $\angle C = \alpha$ ,  $\angle B = \beta$ .



По теореме синусов имеем  $\frac{BC}{\sin \angle C} = \frac{AC}{\sin \angle B}$ , то есть

$$\frac{a}{\sin(180^\circ - (\alpha + \beta))} = \frac{b}{\sin \beta}, \quad \frac{a}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{b}{\sin \beta}.$$

откуда имеем:  $b = \frac{a \cdot \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}$ . Далее

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} ab \sin \alpha = \frac{a \cdot a \sin \alpha \cdot \sin \beta}{2 \sin(\alpha + \beta)} = \frac{a^2 \sin \alpha \cdot \sin \beta}{2 \sin(\alpha + \beta)}.$$

**№ 29.** Выведите формулу Герона для площади треугольника:  $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ , где  $a, b, c$  — длины сторон треугольника,  $p$  — полупериметр.  
Задача решена в п. 125 учебника, стр. 186.

**№ 30.** Найдите площадь треугольника по трем сторонам:

1) 13, 14, 15; 2) 5, 5, 6; 3) 17, 65, 80; 4)  $\frac{25}{6}, \frac{29}{6}, 6$ ;

5)  $13, 37\frac{12}{13}, 47\frac{1}{13}$ ; 6)  $2\frac{1}{12}, 3\frac{44}{75}, 1,83$ .

1)  $a = 13, b = 14, c = 15$ .

$$p = \frac{a+b+c}{2}, \quad p = \frac{13+14+15}{2} = 21.$$

По формуле Герона получаем:

$$\begin{aligned} S_{\triangle ABC} &= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{21 \cdot (21-13)(21-14)(21-15)} = \\ &= \sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = \sqrt{7^2 \cdot 3^2 \cdot 4^2} = 7 \cdot 3 \cdot 2 = 84 \text{ см}^2. \end{aligned}$$

2)  $a = 5, b = 5, c = 6$ .

$$p = \frac{a+b+c}{2}, \quad p = \frac{5+5+6}{2} = 8.$$

По формуле Герона получаем:

$$\begin{aligned} S_{ABC} &= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{8 \cdot (8-5)(8-5)(8-6)} = \\ &= \sqrt{8 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2} = 4 \cdot 3 = 12 \text{ см}^2. \end{aligned}$$

3)  $a = 17, b = 65, c = 80.$

$$p = \frac{17 + 65 + 80}{2} = \frac{162}{2} = 81.$$

По формуле Герона получаем:

$$S_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{81 \cdot 64 \cdot 16 \cdot 1} = 9 \cdot 8 \cdot 4 = 288 \text{ см}^2.$$

4)  $a = \frac{25}{6}, b = \frac{29}{6}, c = 6.$

$$p = \frac{\frac{25}{6} + \frac{29}{6} + 6}{2} = \frac{15}{2}.$$

По формуле Герона получаем:

$$S_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{\frac{15}{2} \cdot \frac{10}{3} \cdot \frac{8}{3} \cdot \frac{3}{2}} = \frac{5 \cdot 3 \cdot 4}{2 \cdot 3} = 10 \text{ см}^2.$$

5)  $a = 13, b = 37\frac{12}{13}, c = 47\frac{1}{13}.$

$$p = \frac{13 + 37\frac{12}{13} + 47\frac{1}{13}}{2} = \frac{98}{2} = 49.$$

По формуле Герона получаем:

$$\begin{aligned} S_{ABC} &= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{49 \cdot 36 \cdot 11 \cdot \frac{1}{13} \cdot 1 \cdot \frac{12}{13}} = \\ &= 7 \cdot 6 \cdot \frac{12}{13} \cdot 5 = \frac{2520}{13} = 193\frac{11}{13}. \end{aligned}$$



$$6) a = 2\frac{1}{12}, b = 3\frac{44}{75}, c = 1,83.$$

$$p = \frac{2\frac{1}{12} + 3\frac{44}{75} + 1,83}{2} = \frac{2\frac{25}{300} + 3\frac{176}{300} + 1\frac{249}{300}}{2} = 7\frac{150}{300} : 2 = \frac{15}{4}.$$

По формуле Герона получаем:

$$\begin{aligned} S_{\text{ABC}} &= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \\ &= \sqrt{\frac{15}{4} \cdot \frac{5}{3} \cdot \frac{49}{300} \cdot \frac{192}{100}} = \frac{5 \cdot 7 \cdot 24}{2 \cdot 3 \cdot 100} = \frac{7}{5} = 1,4. \end{aligned}$$

**№ 31.** Стороны треугольника  $a$ ,  $b$ ,  $c$ . Найдите высоту треугольника, опущенную на сторону  $c$ .

Пусть  $h_c$  — высота. Тогда

$$S_{\text{ABC}} = \frac{1}{2} c \cdot h_c.$$

С другой стороны по формуле Герона

$$S_{\text{ABC}} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

где:  $p = \frac{a+b+c}{2}$ . Так что

$$h_c = \frac{2S_{\text{ABC}}}{c} = \frac{2}{c} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

**№ 32.** Боковые стороны треугольника 30 см и 25 см. Найдите высоту треугольника, опущенную на основание, равное: 1) 25 см; 2) 11 см.

Пусть  $a$ ,  $b$ ,  $c$  — стороны треугольника.

1)  $a = 30$  см,  $b = 25$  см,  $c = 25$  см. Тогда

$$p = \frac{30 + 25 + 25}{2} = \frac{80}{2} = 40 \text{ см};$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{40 \cdot 10 \cdot 15 \cdot 15} = 20 \cdot 15 = 300 \text{ см}^2.$$

$$h_c = \frac{2S}{c} = \frac{2 \cdot 300}{25} = 24 \text{ см.}$$

2)  $a = 30$  см,  $b = 25$  см,  $c = 11$  см. Тогда

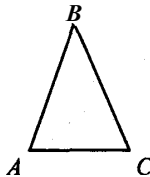
$$p = \frac{30 + 25 + 11}{2} = \frac{66}{2} = 33 \text{ см;}$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{33 \cdot 3 \cdot 8 \cdot 22} = 11 \cdot 3 \cdot 4 = 132 \text{ см}^2.$$

$$h_c = \frac{2S}{c} = \frac{132 \cdot 2}{11} = 24 \text{ см.}$$

**№ 33.** Периметр равнобедренного треугольника равен 64 см, а его боковая сторона на 11 см больше основания. Найдите высоту треугольника, опущенную на боковую сторону.

Треугольник ABC — равнобедренный, AC — основание,  $AB = AC + 11$  см;  $P = 64$  см.  $h_{AB}$  — высота, опущенная на AB.



Пусть  $AC = x$  см, тогда  $AB = BC = (11 + x)$  см, а периметр равен  $x + 2(x + 11)$ , так что

$$\begin{aligned} x + 2(x + 11) &= 64, \\ 3x &= 64 - 22, \\ x &= 14. \end{aligned}$$

Значит:  $AC = 14$  см,  $AB = BC = 14 + 11 = 25$  см. Далее:

$$p = \frac{14 + 25 + 25}{2} = \frac{64}{2} = 32 \text{ см.}$$

$$S = \sqrt{p(p-AB)(p-AC)(p-BC)} = \sqrt{32 \cdot 18 \cdot 7 \cdot 7} = 7 \cdot 3 \cdot 8 = 168 \text{ см}^2.$$

$$\text{Тогда } h_{AB} = \frac{2S}{AB} = \frac{168 \cdot 2}{25} = 13,44 \text{ см.}$$

Ответ: 13,44 см.

**№ 34.** Найдите высоты треугольника, у которого стороны равны 13 см, 14 см и 15 см.

Пусть  $a, b, c$  — стороны треугольника;  $a = 13$  см,  $b = 14$  см,  $c = 15$  см.

$$p = \frac{a+b+c}{2}, \text{ тогда}$$

$$p = \frac{13+14+15}{2} = \frac{42}{2} = 21 \text{ см,}$$

$$S_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = 7 \cdot 3 \cdot 4 = 84 \text{ см}^2.$$

Далее

$$h_a = \frac{2S}{a} = \frac{84 \cdot 2}{13} = \frac{168}{13} = 12 \frac{12}{13} \text{ см;}$$

$$h_b = \frac{2S}{b} = \frac{84 \cdot 2}{14} = 12 \text{ см;}$$

$$h_c = \frac{2S}{c} = \frac{84 \cdot 2}{15} = \frac{56}{5} = 11 \frac{1}{5} \text{ см.}$$

Ответ:  $12 \frac{12}{13}$  см, 12 см и  $11 \frac{1}{5}$  см.

**№ 35.** Найдите высоту треугольника со сторонами  $2 \frac{1}{12}$ ,  $3 \frac{44}{75}$ , 1,83, проведенную к стороне  $2 \frac{1}{12}$ .

Пусть  $a, b, c$  — стороны треугольника;  $a = 2 \frac{1}{12}$ ,  $b = 3 \frac{44}{75}$ ,  $c = 1,83$ .

Из задачи № 30 (6)  $S = 1,4 \text{ см}^2$ , тогда:

$$h_a = \frac{2S}{a} = \frac{1,4 \cdot 2}{2 \frac{1}{12}} = \frac{2,8 \cdot 12}{25} = 1,344 \text{ см.}$$

Ответ: 1,344 см.

**№ 36.** Найдите наименьшую высоту треугольника со сторонами: 1) 5, 5, 6; 2) 17,65, 80 и наибольшую высоту треугольника со сторонами: 3)  $\frac{25}{6}$ ,  $\frac{29}{6}$ , 6; 4) 13,  $37\frac{12}{13}$ ,  $47\frac{1}{13}$ .

Из задачи № 20 следует, что наименьшая — высота, опущенная к наибольшей стороне, а наибольшая — высота, опущенная к наименьшей стороне.

Наименьшая высота  $h_c$ .

1)  $a = 5$ ,  $b = 5$ ,  $c = 6$ .

Из задачи № 30 (2)  $S = 12 \text{ см}^2$ ; тогда

$$h_c = \frac{2S}{c} = \frac{12 \cdot 2}{6} = 4 \text{ см.}$$

2)  $a = 17$ ,  $b = 65$ ,  $c = 80$ .

Из задачи № 30 (3)  $S = 288 \text{ см}^2$ ; тогда

$$h_c = \frac{2S}{c} = \frac{288 \cdot 2}{80} = 7,2 \text{ см.}$$

Наибольшая высота  $h_a$ .

3)  $a = \frac{25}{6}$ ,  $b = \frac{29}{6}$ ,  $c = 6$ .

Из задачи № 30 (4)  $S = 10 \text{ см}^2$ ; тогда

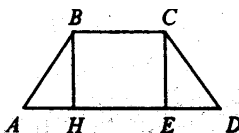
$$h_a = \frac{2S}{a} = \frac{10 \cdot 2}{\frac{25}{6}} = \frac{10 \cdot 2 \cdot 6}{25} = \frac{24}{5} = 4,8 \text{ см.}$$

$$4) a = 13, b = 37 \frac{12}{13}, c = 47 \frac{1}{13}.$$

Из задачи № 30 (5)  $S = \frac{2520}{13}$  см<sup>2</sup>; тогда

$$h_a = \frac{2S}{a} = \frac{2 \cdot \frac{2520}{13}}{13} = \frac{5040}{169} = 29 \frac{139}{169} \text{ см.}$$

**№ 37.** Найдите площадь трапеции, у которой параллельные стороны 60 см и 20 см, а непараллельные — 13 см и 37 см.



Пусть ABCD — трапеция, AD и BC — основания; AD = 60 см; BC = 20 см; AB = 13 см; CD = 37 см.

$$S_{ABCD} = \frac{AB+BC}{2} \cdot BH.$$

Пусть AH =  $x$  см, HE = BC = 20 см, тогда ED = AD – AH – HE = 60 – 20 –  $x$  = (40 –  $x$ ) см.

В  $\triangle ABH$   $\angle H = 90^\circ$ , по теореме Пифагора имеем:

$$BH^2 = AB^2 - AH^2 = 169 - x^2.$$

В  $\triangle CDE$   $\angle E = 90^\circ$ , по теореме Пифагора:

$$\begin{aligned} CE^2 &= CD^2 - DE^2 = 1369 - (40 - x)^2 = \\ &= 1369 - 1600 + 80x - x^2 = 80x - x^2 - 231. \end{aligned}$$

Но  $BH^2 = CE^2$ , так что

$$169 - x^2 = 80x - x^2 - 231, -80x = -231 - 169, -80x = -400, x = 5.$$

Значит, AH = 5 см, тогда

$$BH^2 = 169 - 25, BH = \sqrt{144}, BH = 12 \text{ см.}$$

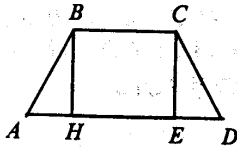
Следовательно

$$S_{ABCD} = \frac{60+20}{2} \cdot 12 = 40 \cdot 12 = 480 \text{ см}^2.$$

Ответ:  $480 \text{ см}^2$ .

**№ 38.** В равнобокой трапеции основания равны 10 см и 24 см, боковая сторона 25 см. Найдите площадь трапеции.

Пусть  $ABCD$  — трапеция,  $AB = CD = 25$  см,  $AD = 24$  см,  $BC = 10$  см.



$\triangle ABH = \triangle CED$  ( $\angle H = \angle E = 90^\circ$ ,  $AB = CD$ ,  $BH = CE$ ). Тогда

$$AH = ED = (AD - BC):2 = (24 - 10):2 = 7 \text{ см.}$$

Тогда по теореме Пифагора:

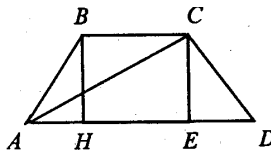
$$BH = \sqrt{AB^2 - AH^2} = \sqrt{625 - 49} = \sqrt{576} = 24 \text{ см.}$$

Следовательно

$$S_{ABCD} = \frac{AD+BC}{2} \cdot BH = \frac{24+10}{2} \cdot 24 = 17 \cdot 24 = 408 \text{ см}^2.$$

Ответ:  $408 \text{ см}^2$ .

**№ 39.** В равнобокой трапеции большее основание равно 44 м, боковая сторона 17 м и диагональ 39 м. Найдите площадь трапеции.



Пусть  $ABCD$  — трапеция,  $AB = CD = 17$  м,  $AC = 39$  м,  $AD = 44$  м.

В  $\triangle ACE$   $\angle E = 90^\circ$ ,  $AC = 39$  м,  $AE = 44 - ED$ . По теореме Пифагора:

$$\begin{aligned} CE^2 &= AC^2 - AE^2 = 39^2 - (44 - ED)^2 = \\ &= 1521 - 1936 + 88ED - ED^2 = -415 + 88ED - ED^2, \end{aligned}$$

то есть  $CE^2 + ED^2 = 88ED - 415$ .

В  $\triangle CDE$   $\angle E = 90^\circ$ ,  $CD = 17$  м. По теореме Пифагора имеем:

$$ED^2 + CE^2 = CD^2 = 17^2 = 289.$$

Получаем, что:

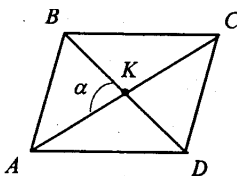
$$88ED - 415 = 289, 88ED = 704, ED = 8 \text{ м,}$$

следовательно,  $AH = ED = 8$  м;  $BC = 44 - 8 \cdot 2 = 28$  м;  $CE^2 = 289 - 64 = 225$ ,  $CE = 15$  м. Тогда

$$S_{ABCD} = \frac{AD + BC}{2} \cdot CE = \frac{44 + 28}{2} \cdot 15 = 36 \cdot 15 = 540 \text{ м}^2.$$

Ответ:  $540 \text{ м}^2$ .

**№ 41\*.** Докажите, что среди всех параллелограммов с данными диагоналями наибольшую площадь имеет ромб.



Пусть  $ABCD$  — параллелограмм,  $AC$  и  $BD$  — диагонали,  $\angle AKB = \alpha$ .

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BD \cdot \sin \alpha.$$

$S_{ABCD}$  будет наибольшей, когда  $\sin \alpha = 1$ , то есть  $\alpha = 90^\circ$ , следовательно, диагонали данного параллелограмма перес-

каются под прямым углом, а такой параллелограмм является ромбом. Что и требовалось доказать.

**№ 42.** Выведите следующие формулы для радиусов описанной ( $R$ ) и вписанной ( $r$ ) окружностей треугольника:  $R = \frac{abc}{4S}$ ,  $r = \frac{2s}{a+b+c}$ , где  $a, b, c$  — стороны треугольника, а  $S$  — его площадь.

Задача решена в п. 127 учебника, стр. 187.

**№ 43.** Найдите радиусы описанной ( $R$ ) и вписанной ( $r$ ) окружностей для треугольника со сторонами: 1) 13, 14, 15; 2) 15, 13, 4; 3) 35, 29, 8; 4) 4, 5, 7.

1)  $a = 13, b = 14, c = 15$ .

Полупериметр треугольника:

$$p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{13+14+15}{2} = \frac{42}{2} = 21.$$

По формуле Герона получаем:

$$S_{\Delta} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = 84.$$

Следовательно

$$R = \frac{abc}{4S} = \frac{13 \cdot 14 \cdot 15}{4 \cdot 84} = 8 \frac{1}{8},$$

$$r = \frac{2S}{a+b+c} = \frac{84 \cdot 2}{42} = 4.$$

2)  $a = 15, b = 13, c = 4$ .

Полупериметр треугольника:

$$p = \frac{15+13+4}{2} = \frac{32}{2} = 16.$$

По формуле Герона получаем:

$$S_{\Delta} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{16 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 12} = 24.$$



Следовательно

$$R = \frac{abc}{4S} = \frac{15 \cdot 13 \cdot 4}{4 \cdot 24} = \frac{65}{8} = 8 \frac{1}{8},$$

$$r = \frac{2S}{a+b+c} = \frac{2 \cdot 24}{32} = 1,5.$$

3)  $a = 35$ ,  $b = 29$ ,  $c = 8$ .

Полупериметр треугольника:

$$p = \frac{35+29+8}{2} = \frac{72}{2} = 36.$$

По формуле Герона получаем:

$$S_{\Delta} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{36 \cdot 1 \cdot 7 \cdot 28} = 84.$$

Следовательно

$$R = \frac{abc}{4S} = \frac{35 \cdot 29 \cdot 8}{4 \cdot 84} = 24 \frac{1}{6},$$

$$r = \frac{2S}{a+b+c} = \frac{2 \cdot 84}{72} = 2 \frac{1}{3}.$$

4)  $a = 4$ ,  $b = 5$ ,  $c = 7$ .

Полупериметр треугольника:

$$p = \frac{4+5+7}{2} = 8.$$

По формуле Герона получаем:

$$S_{\Delta} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{8 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 1} = 4\sqrt{6}.$$

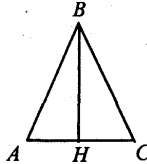
Следовательно

$$R = \frac{abc}{4S} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 7}{4 \cdot 4\sqrt{6}} = \frac{35}{4\sqrt{6}},$$

$$r = \frac{2S}{a+b+c} = \frac{2 \cdot 4\sqrt{6}}{16} = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

**№ 44.** Боковая сторона равнобедренного треугольника 6 см, высота, проведенная к основанию, 4 см. Найдите радиус описанной окружности.

Пусть  $ABC$  — равнобедренный треугольник,  $AB = BC = 6$  см,  $BH = 4$  см — высота, проведенная к основанию.



Тогда в  $\triangle ABH$   $\angle H = 90^\circ$ . По теореме Пифагора получаем:

$$AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \sqrt{36 - 16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \text{ см.}$$

Тогда  $AC = 2AH = 4\sqrt{5}$  см и

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BH = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{5} \cdot 4 = 8\sqrt{5} \text{ см}^2.$$

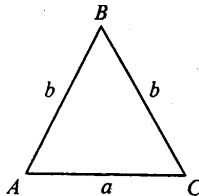
Следовательно:

$$R = \frac{abc}{4S} = \frac{6 \cdot 6 \cdot 4\sqrt{5}}{4 \cdot 8\sqrt{5}} = \frac{9}{2} = 4,5 \text{ см.}$$

Ответ: 4,5 см.

**№ 45.** Найдите радиусы окружностей описанной около равнобедренного треугольника с основанием  $a$  и боковой стороной  $b$  и вписанной в него.

Пусть  $ABC$  — равнобедренный треугольник,  $AB = BC = b$ ,  $AC = a$ . Найдите  $R$ ,  $r$ .



$$\text{Тогда } p = \frac{AB+BC+AC}{2} = \frac{2b+a}{2} = b + \frac{a}{2}.$$

$$S_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)^2} = \sqrt{\frac{2b+a}{2} \cdot \frac{2b-a}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2}} = \frac{a}{4} \sqrt{4b^2 - a^2}.$$

Следовательно

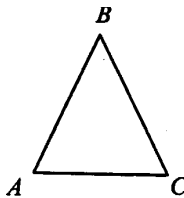
$$R = \frac{abb}{4S} = \frac{ab^2}{4 \cdot \frac{a}{4} \sqrt{4b^2 - a^2}} = \frac{b^2}{\sqrt{4b^2 - a^2}};$$

$$r = \frac{2S}{2a+b} = \frac{2 \cdot \frac{a}{4} \sqrt{4b^2 - a^2}}{2b+a} = \frac{\sqrt{4b^2 - a^2}}{2(2b+a)} =$$

$$= \frac{\sqrt{4b^2 - a^2}}{2\sqrt{(2b+a)(2b+a)}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(2b-a)(2b+a)}{(2b+a)(2b+a)}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2b-a}{2b+a}}.$$

**№ 46.** Найдите радиус  $r$  вписанной и радиус  $R$  описанной окружностей для равнобедренного треугольника с основанием 10 см и боковой стороной 13 см.

Пусть  $ABC$  — равнобедренный треугольник,  $AB = BC = 13$  см,  $AC = 10$  см.



$$\text{Тогда } p = \frac{13+13+10}{2} = 18 \text{ см.}$$

$$S_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)^2} = \sqrt{18 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 8} = 3 \cdot 5 \cdot 4 = 60 \text{ см}^2.$$

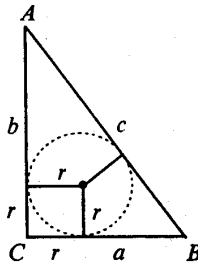
Следовательно:

$$R = \frac{abc}{4S} = \frac{13 \cdot 13 \cdot 10}{4 \cdot 60} = \frac{169}{24} \text{ см};$$

$$r = \frac{2S}{a+b+c} = \frac{2 \cdot 60}{36} = \frac{10}{3} \text{ см}.$$

**№ 47.** Докажите, что в прямоугольном треугольнике радиус вписанной окружности равен половине разности между суммой катетов и гипотенузой.

Пусть в  $\triangle ABC$ ,  $\angle C = 90^\circ$ ,  $CB = a$ ,  $AC = b$ ,  $AB = c$ . Докажем, что:  $r = \frac{a+b-c}{2}$ .



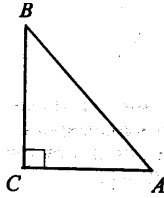
Имеем:  $r = \frac{2S}{a+b+c}$ , но  $S = \frac{ab}{2}$ , так что

$$\begin{aligned} r &= \frac{\frac{ab}{2} \cdot 2}{a+b+c} = \frac{ab}{a+b+c} = \frac{ab(a+b-c)}{(a+b+c)(a+b-c)} = \frac{ab(a+b-c)}{(a+b)^2 - c^2} = \\ &= \frac{ab(a+b-c)}{a^2 + b^2 + 2ab - c^2} = \frac{ab(a+b-c)}{2ab} = \frac{a+b-c}{2}, \end{aligned}$$

что требовалось доказать.

**№ 48.** Катеты прямоугольного треугольника равны 40 см и 42 см. Найдите радиусы описанной и вписанной окружностей.

Пусть в  $\triangle ABC$ ,  $\angle C = 90^\circ$ ,  $AC = 40$  см,  $BC = 42$  см.



Тогда  $S_{\triangle ABC} = \frac{AC \cdot BC}{2} = \frac{40 \cdot 42}{2} = 840 \text{ см}^2$ . Далее по теореме

Пифагора:

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 = 1600 + 1764 = 3364 \text{ см}^2;$$

$$AB = \sqrt{3364} = 58 \text{ см.}$$

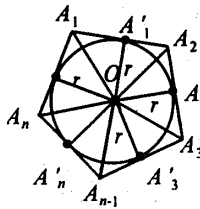
Пусть  $AB = c$ ,  $AC = b$ ,  $BC = a$ . Тогда

$$R = \frac{abc}{4S} = \frac{40 \cdot 42 \cdot 58}{840} = 29 \text{ см,}$$

$$r = \frac{2S}{a+b+c} = \frac{2 \cdot 840}{140} = 12 \text{ см.}$$

Ответ: 29 см, 12 см.

**№ 49.** Докажите, что площадь многоугольника описанного около окружности, равна половине произведения периметра многоугольника на радиус окружности.



Пусть  $A_1A_2...A_n$  — многоугольник, описанный около окружности;  $A_1A_2$ ;  $A_2A_3$ ; ...  $A_{n-1}A_n$  — стороны многоугольника;  $OA'_1 = OA'_2 = \dots = OA'_n = r$ .

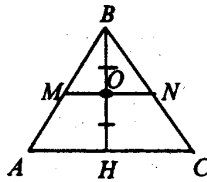
Соединим вершины многоугольника с центром окружности. Многоугольник разбит на  $n$  треугольников. Тогда:

$$\begin{aligned}
 S_{A_1 A_2 \dots A_n} &= S_{\Delta A_1 O A_2} + S_{\Delta A_2 O A_3} + \dots + S_{\Delta A_{n-1} O A_n} = \\
 &= \frac{1}{2} A_1 A_2 \cdot r + \frac{1}{2} A_2 A_3 \cdot r + \dots + \frac{1}{2} A_{n-1} A_n \cdot r = \\
 &= \frac{1}{2} r (A_1 A_2 + A_2 A_3 + \dots + A_{n-1} A_n) = \frac{1}{2} r \cdot P_{A_1 \dots A_n}
 \end{aligned}$$

Что и требовалось доказать.

**№ 50.** Через середину высоты треугольника проведена перпендикулярная к ней прямая. В каком отношении она делит площадь треугольника?

Пусть  $\Delta ABC$ ,  $BH$  — высота,  $BO = OH$ .



$\Delta ABC \sim \Delta MBN$ , поэтому  $\frac{BO}{BH} = \frac{MN}{AC}$ , так что  $AC = 2MN$ .

Тогда

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BH = MN \cdot BH,$$

$$S_{\Delta MBN} = \frac{1}{2} MN \cdot BO = \frac{1}{4} MN \cdot BH.$$

Поэтому

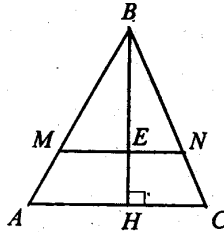
$$\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta MBN}} = \frac{MN \cdot BH \cdot 4}{MN \cdot BH \cdot 1} = 4 : 1.$$

Ответ:  $\frac{S_{\Delta MBN}}{S_{\Delta ABC}} = 1 : 4$ .

**№ 51.** Прямая, перпендикулярная высоте треугольника, делит его площадь пополам. Найдите расстояние от

этой прямой до вершины треугольника, из которой проведена высота, если она равна  $A$ .

Пусть в  $\triangle ABC$ ,  $BH$  — высота,  $MN \perp BH$ ,  $BH = h$ ;  $S_{\triangle BMN} = S_{\triangle MNC}$ .



$\triangle ABC \sim \triangle MBN$ , так как  $MN \parallel AC$ .

Так как  $S_{\triangle BMN} = S_{\triangle MNC}$ , то  $S_{\triangle BMN} = \frac{1}{2} S_{\triangle ABC}$ .

$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle MBN}} = \left( \frac{BH}{BE} \right)^2,$$

откуда получаем

$$\frac{BH}{BE} = \sqrt{\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle MBN}}} = \sqrt{2}$$

$$BE = BH : \sqrt{2} = \frac{h\sqrt{2}}{2}.$$

Ответ:  $\frac{h\sqrt{2}}{2}$ .

**№ 52.** Периметры правильных  $n$ -угольников относятся как  $a:b$ . Как относятся их площади?

$$\frac{S_1}{S_2} = \left( \frac{P_1}{P_2} \right)^2 = \left( \frac{a}{b} \right)^2 = \frac{a^2}{b^2}.$$

Ответ:  $a^2:b^2$ .

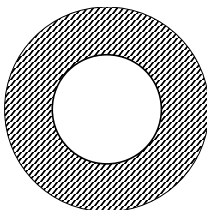
№ 53. Найдите площадь круга, если длина окружности  $l$ .

$l = 2\pi R$ , откуда имеем  $R = \frac{l}{2\pi}$ . Тогда

$$S = \pi R^2 = \pi \left( \frac{l}{2\pi} \right)^2 = \pi \cdot \frac{l^2}{4\pi^2} = \frac{l^2}{4\pi}$$

Ответ:  $\frac{l^2}{4\pi}$ .

№ 54. Найдите площадь кругового кольца, заключенного между двумя окружностями с одним и тем же центром и радиусами: 1) 4 см и 6 см; 2) 5,5 м и 6,5 м; 3)  $a$  и  $b$ ,  $a > b$ .



$$S_{\text{кольца}} = S_{\text{кр}1} - S_{\text{кр}2} = \pi R_1^2 - \pi R_2^2 = \pi(R_1^2 - R_2^2).$$

Так что

1)  $S_{\text{кольца}} = \pi(36 - 16) = 20\pi \text{ см}^2$ .

2)  $S_{\text{кольца}} = \pi(6,5^2 - 5,5^2) = \pi(6,5 - 5,5)(6,5 + 5,5) = 12\pi \text{ см}^2$ .

3)  $S_{\text{кольца}} = \pi(a^2 - b^2) \text{ см}^2$ .

№ 55. Во сколько раз увеличится площадь круга, если его диаметр увеличить: 1) в 2 раза; 2) в 5 раз; 3) в  $n$  раз?

Если диаметр увеличить в  $n$  раз, то радиус увеличится тоже в  $n$  раз, тогда площадь увеличится в  $n^2$  раз.

1)  $n = 2$ , так что:

$$\frac{S_1}{S_2} = n^2 = 4,$$

т.е.  $S$  круга увеличится в 4 раза.

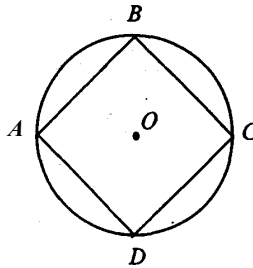


2) Аналогично, если диаметр увеличить в 5 раз, то  $S$  круга увеличится в 25 раз.

3) Если диаметр увеличить в  $m$  раз, то  $S$  круга увеличится в  $m^2$  раз.

**№ 56.** Найдите отношение площади круга к площади вписанного в него: 1) квадрата; 2) правильного треугольника; 3) правильного шестиугольника.

1) Пусть  $ABCD$  — квадрат, вписанный в круг.



Тогда  $a_4 = R\sqrt{2}$  и  $S_{\text{кв}} = (R\sqrt{2})^2 = 2R^2$ ,  $S_{\text{кр}} = \pi R^2$ , следовательно:

$$\frac{S_{\text{кр}}}{S_{\text{кв}}} = \frac{\pi R^2}{2R^2} = \frac{\pi}{2}.$$

2) Пусть  $ABC$  — треугольник, вписанный в круг. Тогда  $a_3 = R\sqrt{3}$  и  $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} a_3 \cdot a_3 \cdot \sin 60^\circ = \frac{R\sqrt{3} \cdot R\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{2 \cdot 2} = \frac{3\sqrt{3}R^2}{4}$ ,  $S_{\text{кр}} = \pi R^2$ , следовательно:

$$\frac{S_{\text{кр}}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{\pi R^2}{1} : \frac{3\sqrt{3}R^2}{4} = \frac{\pi R^2 \cdot 4}{3\sqrt{3}R} = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}.$$

3) Пусть  $ABCDEF$  — шестиугольник, вписанный в круг. Тогда  $a_6 = R$  и  $S_6 = 6 \cdot S_{\Delta ABC} = 6 \cdot \frac{R \cdot R \cdot \sqrt{3}}{2 \cdot 2} = \frac{3\sqrt{3}R^2}{2}$ ,  $S_{\text{кр}} = \pi R^2$ , следовательно:

$$\frac{S_{кр}}{S_6} = \frac{\pi R^2 \cdot 2}{1 \cdot 3\sqrt{3}R^2} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

Ответ: 1)  $\frac{\pi}{2}$ ; 2)  $\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$ ; 3)  $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$ .

**№ 57.** Найдите отношение площади круга, вписанного в правильный треугольник, к площади круга, описанного около него.

$$S_{\text{вп. круга}} = \pi r^2, S_{\text{оп. круга}} = \pi R^2.$$

Так как  $a_3 = R\sqrt{3}$ , то есть  $R = \frac{a_3}{\sqrt{3}}$  и  $r = \frac{a_3}{2\sqrt{3}}$ , то  $r = \frac{R}{2}$ .

Так что  $S_{\text{вп. круга}} = \pi \cdot \left(\frac{R}{2}\right)^2 = \frac{\pi R^2}{4}$ . Поэтому

$$\frac{S_{\text{оп. круга}}}{S_{\text{вп. круга}}} = \frac{\pi R^2}{4} : \pi R^2 = \frac{1}{4}.$$

Ответ:  $\frac{1}{4}$ .

**№ 58.** Найдите отношение площади круга, описанного около квадрата, к площади круга, вписанного в него.

$$S_{\text{оп. круга}} = \pi R^2, S_{\text{вп. круга}} = \pi r^2.$$

Далее имеем:  $a_4 = R\sqrt{2}$  и  $r = \frac{a_4}{2}$ , так что  $r = \frac{R\sqrt{2}}{2}$  и

$S_{\text{вп. круга}} = \pi \cdot \left(\frac{R\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{\pi R^2 \cdot 2}{4} = \frac{\pi R^2}{2}$ . Так что

$$\frac{S_{\text{оп. круга}}}{S_{\text{вп. круга}}} = \frac{\pi R^2}{1} : \frac{\pi R^2}{2} = \frac{\pi R^2 \cdot 2}{1 \cdot \pi R^2} = 2.$$

Ответ: 2.

- № 59.** Найдите площадь сектора круга радиуса  $R$ , если соответствующий этому сектору центральный угол равен: 1)  $40^\circ$ ; 2)  $90^\circ$ ; 3)  $150^\circ$ ; 4)  $240^\circ$ ; 5)  $300^\circ$ ; 6)  $330^\circ$ .

$$S_{\text{сектора}} = \frac{\pi R^2}{360^\circ} \alpha, \text{ так что получаем:}$$

$$1) S_{\text{сектора}} = \frac{\pi R^2}{360^\circ} 40^\circ = \frac{\pi R^2}{9};$$

$$2) S_{\text{сектора}} = \frac{\pi R^2}{360^\circ} 90^\circ = \frac{\pi R^2}{4};$$

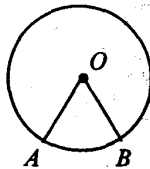
$$3) S_{\text{сектора}} = \frac{\pi R^2}{360^\circ} 150^\circ = \frac{5\pi R^2}{12};$$

$$4) S_{\text{сектора}} = \frac{\pi R^2}{360^\circ} 240^\circ = \frac{2\pi R^2}{3};$$

$$5) S_{\text{сектора}} = \frac{\pi R^2}{360^\circ} 300^\circ = \frac{5\pi R^2}{6};$$

$$6) S_{\text{сектора}} = \frac{\pi R^2}{360^\circ} 330^\circ = \frac{11\pi R^2}{12}.$$

- № 60.** Дана окружность радиуса  $R$ . Найдите площадь сектора, соответствующего дуге с длиной, равной: 1)  $R$ , 2)  $l$ .



$$1) R = \frac{\pi R}{180^\circ} \cdot \alpha, \text{ откуда } \alpha = \frac{180^\circ \cdot R}{\pi \cdot R} = \frac{180^\circ}{\pi}.$$

$$S_{\text{сектора}} = \frac{\pi R^2}{360^\circ} \cdot \alpha = \frac{\pi R^2 \cdot 180^\circ}{360^\circ \cdot \pi} = \frac{R^2}{2}.$$

$$2) \alpha = \frac{180^\circ \cdot l}{\pi \cdot R}, \text{ так что}$$

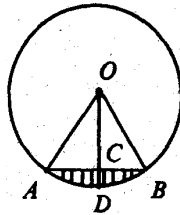
$$S_{\text{сектора}} = \frac{\pi R^2 \cdot 180^\circ l}{360^\circ \cdot \pi R} = \frac{Rl}{2}.$$

$$\text{Ответ: 1) } \frac{R^2}{2}; 2) \frac{Rl}{2}.$$

№ 61\*. Найдите площадь кругового сегмента с основанием

$$a\sqrt{3} \text{ и высотой } \frac{a}{2}.$$

Пусть  $ADB$  — круговой сегмент,  $AB$  — основание,  $AB = a\sqrt{3}$ ,  $CD = \frac{a}{2}$  — высота сегмента.



В  $\triangle AOC$   $\angle C = 90^\circ$ ,  $AO = R$ ;  $OC = OD - CD = R - \frac{a}{2}$  и  $AC = \frac{1}{2} AB = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ . По теореме Пифагора:

$$AO^2 = OC^2 + AC^2,$$

$$R^2 = \left(R - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2,$$

$$R^2 = R^2 - Ra + \frac{a^2}{4} + \frac{3a^2}{4},$$

то есть  $Ra = a^2$ , так что  $R = \frac{a^2}{a} = a$ .

В  $\triangle AOB$   $AO = BO = a$ ,  $AB = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ . Тогда по теореме косинусов:

$$\cos \angle AOB = \frac{a^2 + a^2 - 3a^2}{2a^2} = -\frac{1}{2},$$

то есть  $\angle AOB = 120^\circ$  и

$$S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot a \cdot \sin \angle AOB = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}.$$

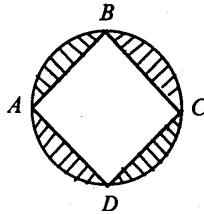
Далее

$$S_{\text{сегмента}} = S_{\text{сектора}} - S_{\triangle AOB} = \frac{\pi R^2}{360^\circ} \cdot \alpha - S_{\triangle AOB} = \frac{\pi a^2 \cdot 120^\circ}{360^\circ} - \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = a^2 \left( \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right).$$

Ответ:  $a^2 \left( \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right)$ .

**№ 62.** Найдите площадь той части круга, которая расположена вне вписанного в него: 1) квадрата; 2) правильного треугольника; 3) правильного шестиугольника. Радиус круга  $R$ .

1) Пусть  $ABCD$  — квадрат, вписанный в круг.

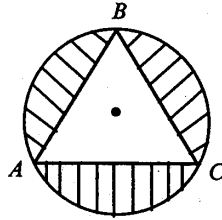


$$S_{\text{кр}} = \pi R^2.$$

$$a_4 = R\sqrt{2}, \text{ тогда } S_{\text{кв}} = a_4^2 = (R\sqrt{2})^2 = 2R^2.$$

$$S = S_{\text{кр}} - S_{\text{кв}} = \pi R^2 - 2R^2 = R^2(\pi - 2).$$

2) Пусть  $ABC$  — треугольник, вписанный в круг.



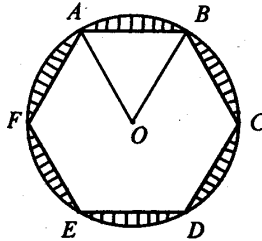
$$S_{\text{кр}} = \pi R^2.$$

$$a_3 = R\sqrt{3}, \text{ поэтому } S_{\Delta} = \frac{1}{2} a_3 \cdot a_3 \sin 60^\circ = \frac{(R\sqrt{3})^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}R^2}{4}.$$

Следовательно

$$S = S_{\text{кр}} - S_{\Delta ABC} = \pi R^2 - \frac{3\sqrt{3}R^2}{4} = R^2 \left( \pi - \frac{3\sqrt{3}}{4} \right).$$

3) Пусть  $ABCDEF$  — шестиугольник, вписанный в круг.



$$S_{\text{кр}} = \pi R^2.$$

$$S_6 = 6 \cdot S_{\Delta AOB} = 6 \cdot \frac{1}{2} R \cdot R \cdot \sin 60^\circ = 3R^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}R^2}{2}. \text{ Так что}$$

$$S = \pi R^2 - \frac{3\sqrt{3}R^2}{2} = R^2 \left( \pi - \frac{3\sqrt{3}}{2} \right).$$

Ответ: 1)  $R^2(\pi - 2)$ ; 2)  $R^2 \left( \pi - \frac{3\sqrt{3}}{4} \right)$ ; 3)  $R^2 \left( \pi - \frac{3\sqrt{3}}{2} \right)$ .