

В.Е. Бачурин

**Решение контрольных
и самостоятельных
работ по алгебре
за 9 класс**

**к пособию «Дидактические материалы по алгебре
для 9 класса / Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк,
Л.М. Короткова. — 8-е изд. — М.: Просвещение, 2003».**

САМОСТОЯТЕЛЬНЫЕ РАБОТЫ

Вариант 1.

С-1.

1. 1) $f(x)=12x-5$; $f(2)=12 \cdot 2-5=19$;
 $f(0)=12 \cdot 0-5=-5$; $f(-1)=12 \cdot (-1)-5=-17$;
2) $f(x)=x^2-8x$; $f(10)=10^2-8 \cdot 10=20$;
 $f(-2)=(-2)^2-8 \cdot (-2)=20$; $f(0)=0^2-80=0$;
- 3) $g(x)=\frac{x-5}{x+3}$; $g(-2)=\frac{-2-5}{-2+3}=-7$; $g(2)=\frac{2-5}{2+3}=-0,6$; $g(0)=\frac{0-5}{0+3}=-\frac{5}{3}$.
2. 1) $g(x)=8-3x$; а) $8-3x=5$, $3x=3$, $x=1$; б) $8-3x=11$, $3x=-3$, $x=-1$;
в) $8-3x=0$; $x=\frac{8}{3}$.
- 2) $f(x)=-\frac{1}{3}x+2$; а) $-\frac{1}{3}x+2=1$, $-\frac{1}{3}x=-1$, $x=3$;
б) $-\frac{1}{3}x+2=4$, $-\frac{1}{3}x=2$, $x=-6$; в) $-\frac{1}{3}x+2=0$, $x=6$.
3. 1) а) $f(x)=19-2x$; $D(f)=R$; б) $g(x)=\frac{40}{x}$; $D(f)=(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$;
в) $\varphi(x)=x^2-4$; $D(\varphi)=R$; г) $y=\sqrt{x}$; $D(y)=[0; +\infty)$;
- 2) а) $g(x)=8-x^2$; $D(g)=R$; б) $f(x)=-\frac{5}{x}$; $D(f)=(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$;
в) $\varphi(x)=x-2$; $D(\varphi)=R$; г) $y=\frac{8}{x+2}$; $x+2 \neq 0$; $x \neq -2$; $D(y)=(-\infty; -2) \cup (-2; +\infty)$.
4. а) $y=37x+1$; $E(y)=R$; б) $y=-23$; $E(y)=-23$; в) $y=\frac{19}{8}$;
 $E(y)=(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; г) $y=\sqrt{x}$; $E(y)=[0; +\infty)$; д) $y=|x|$; $E(y)=[0; +\infty]$.
5. а) $f(x)=\frac{5x^2}{x^2+1}$; $f(2)+f(-2)=2f(2)=2 \cdot \frac{5 \cdot 4}{4+1}=8$;
б) $g(x)=\frac{2x^3-5x}{10}$; $g(3)+g(-3)=g(3)-g(3)=0$.
6. $f(x)=kx+b$; $\begin{cases} 7=2k+b \\ 12=3k+b \end{cases}$; $\begin{cases} 7-2k=12-3k \\ b=7-2 \cdot 5=-3 \end{cases}$
7. а) $f(x)=\frac{2}{x-2}+\frac{101}{x-3}$; б) $f(x)=\sqrt{x-8}$.

C-2

1.

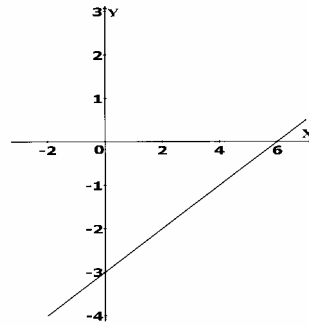
1) a) $f(-3)=-2$; б) $f(-2)=2$; в) $f(0)=1$; г) $f(3)=0$; 2) a) $f(x)=2$; $x_1=-2$; $x_2=-0,5$; $x_3=3,5$; б) $f(x)=0$; $x_1=-2,5$; $x_2=0,5$; $x_3=3$; в) $f(x)=-2$; $x=-3$;
 3) $f_{\max}=3$, $f_{\min}=-2$; 4) $E(f)=[-2; 3]$.

2.

1)

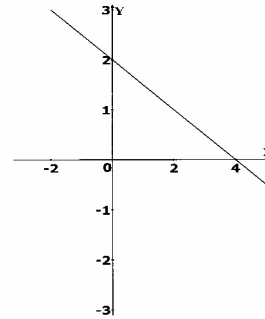
a) $y=0,5x-3$;

x	0	6
y	-3	0



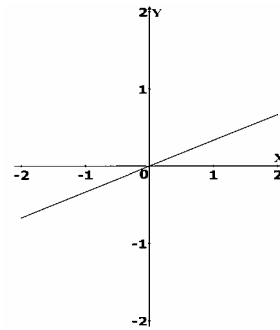
б) $y=-0,5x+2$;

x	0	4
y	2	0



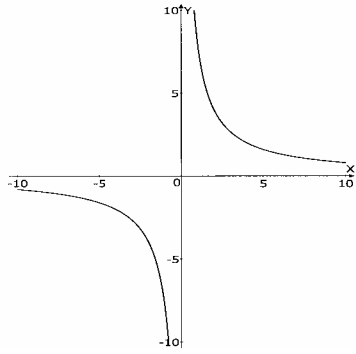
в) $y=\frac{x}{3}$;

x	0	3
y	0	1

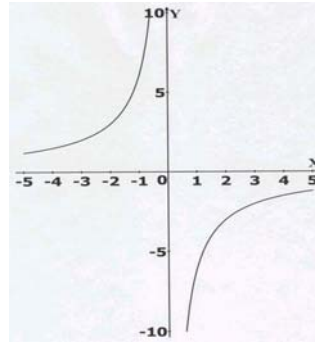


2)

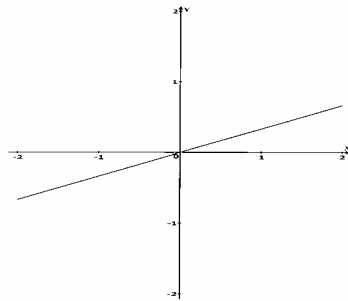
a) $y = \frac{8}{x}$;



б) $y = -\frac{6}{x}$;

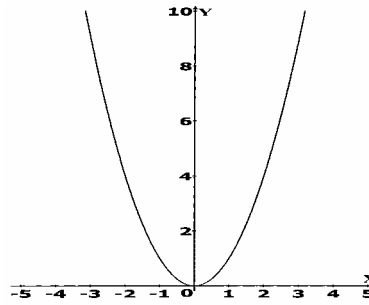


в) $y = \frac{x}{3}$;

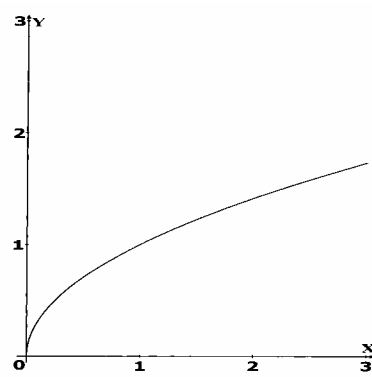


3)

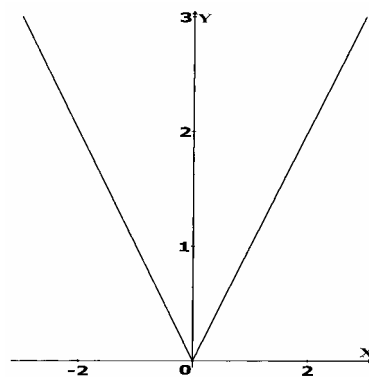
a) $y = x^2$;



б) $y = \sqrt{x}$; $x \geq 0$;



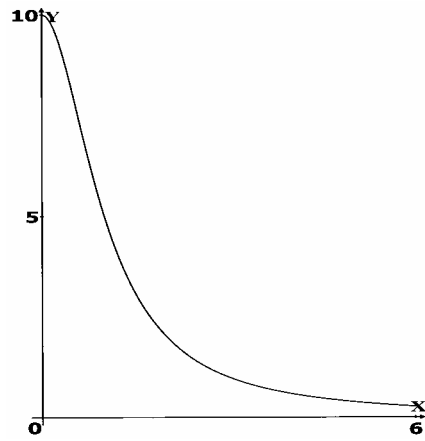
в) $y = |x|$.



3.

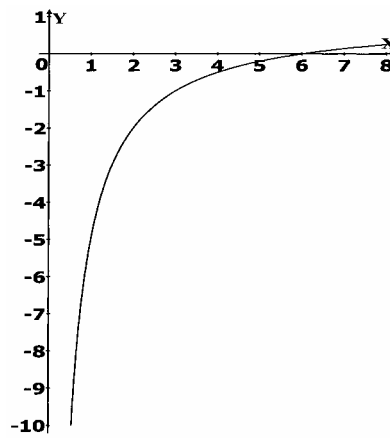
a) $y = \frac{10}{x^2+1}$, $0 \leq x \leq 6$;

x	0	1	2	3	4	5	6
y	10	5	2	1	$\frac{10}{17}$	$\frac{10}{26}$	$\frac{10}{37}$

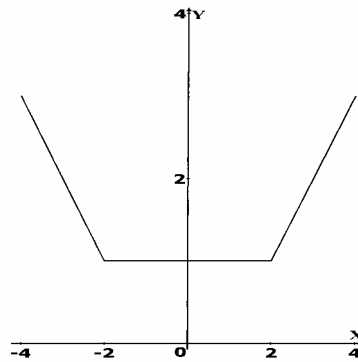


b) $y = \frac{x-6}{x} = 1 - \frac{6}{x}$, $1 \leq x \leq 6$.

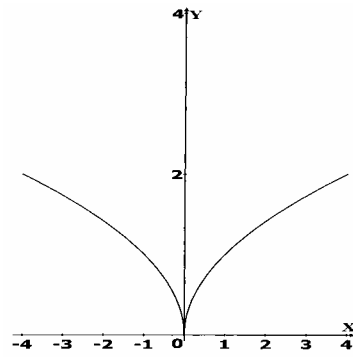
x	1	2	3	4	5	6
y	-5	-2	-1	-0,5	-0,2	0



$$4. a) y = \begin{cases} -x-1, & x < -2 \\ 1, & -2 \leq x \leq 2 \\ x-1, & x > 2 \end{cases}$$



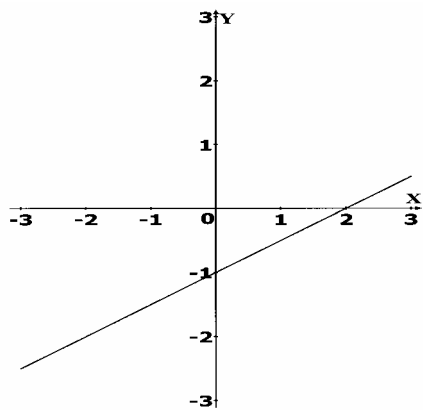
$$б) y = \sqrt{|x|} = \begin{cases} \sqrt{x} & x \geq 0 \\ \sqrt{-x} & x < 0 \end{cases}$$



$$5. f(x) = \begin{cases} -x, & -3 \leq x \leq 1 \\ 1, & -1 < x \leq 1 \\ -x+2, & 1 < x \leq 4 \end{cases}$$

$$6. f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 - 4x + 8}{2x^2 - 8} = \frac{x^2(x-2) - 4(x-2)}{2(x^2-4)} = \frac{(x^2-4)(x-2)}{2(x^2-4)} = \frac{x}{2} - 1;$$

$x^2 - 4 \neq 0$, т.к. знаменатель $x \neq \pm 2$.



7. 1) 1 ч со скоростью, равной 4 км/ч; 2) 5-1=4 (ч);

3) 7-5=2 (ч) скорость равна $\frac{4}{2}=2$ (км/ч); 4) 4 км; 4 км; 2 км;

5) шоссе находится на расстоянии 2 км от дома, значит, от озера до шоссе он шел 1 ч.

8. 1) мотоциклист на 2 ч; 2) 5 ч; 1,5 ч; 3) $\frac{75}{5}=15$ (км/ч); $\frac{75}{1,5}=50$ (км/ч)
 4) мотоциклист на 1,5 ч; 5) через 1 ч; 6) $75-52,5=22,5$ (км).

С-3

1. 1) а) $x_1=-2,5, x_2=1$; б) $f(x)>0$ при $x \in [-3; -2,5) \cup (1; 3]$; $f(x) < 0$ при $x \in (-2,5; 1)$; 2) $f(x)$ возрастает при $x \in [-0,25; 2]$; $f(x)$ убывает при $x \in [-3; -0,25]$ и $[2; 3]$; 3) $x_{\max}=2, x_{\min}=-0,25$; 4) $E(f)=[-0,25; 2]$.

2. 1) а) $y=28x+35; D(y)=R, E(y)=R, y > 0$ при $x > -\frac{35}{28}, y < 0$ при $x < -\frac{35}{28},$

$y=0$ при $x=-\frac{35}{28}, f(x)$ возрастает на R ; б) $y=-0,38x-19; D(y)=R, E(y)=R;$

$y > 0$ при $x < -\frac{19}{0,38}=-50, y < 0$ при $x > -50; y=0$ при $x=-50, f(x)$ убывает

на R ; в) $y=38; D(y)=R, E(y)=38, y > 0$ на $R;$

2) а) $y=\frac{25}{x}; D(y)=E(y)=(-\infty; 0) \cup (0; +\infty); y > 0$ при $x > 0, y < 0$ при $x < 0,$

$f(x)$ убывает на $D(y)$; б) $y=-\frac{56}{x}; D(y)=E(y)=(-\infty; 0) \cup (0; +\infty);$

$y > 0$ при $x < 0, y < 0$ при $x > 0, f(x)$ возрастает на $D(y).$

3. 1) а) $y=\frac{1}{3}x-15, \frac{1}{3}x=15, x=45$; б) $y=-0,2x+46, -0,2x=-46, x=230;$

в) $y=-24$ нет нулей функции;

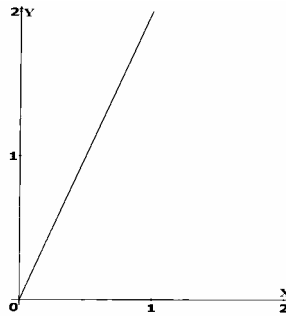
2) а) $y=7x(x+4), x_1=0, x_2=-4$; б) $y=9(x^2+5)$ нет нулей функции;

в) $y=x(x+1)(x-2); x_1=0, x_2=-1, x_3=2;$

3) а) $y=\sqrt{x+2}; x=-2$; б) $y=\sqrt{x^2-1}; x_1=1, x_2=-1;$

в) $y=\sqrt{x^2+1}$ нет нулей функции.

4. $f(x)=x+|x| \quad f(x)=\begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 2x, & x > 0 \end{cases};$



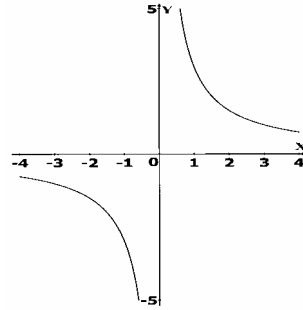
Свойства: $D(f)=R, E(f)=[0; +\infty).$

Нули функции: $x \leq 0; f(x) > 0$ при $x > 0; f(x)$ возрастает при $x \geq 0; f_{\min}=f(0)=0.$

5. $D(g)=R$, $E(g)=[-4; 4]$; $g(x) > 0$ при $x > 0$, $g(x) < 0$ при $x < 0$, $g(x)=0$ при $x=0$; $g(x)$ возрастает при $x \in [-2; 2]$; $g(x)$ убывает при $x \in (-\infty; -2]$ и $[2; +\infty)$.

С-4

1.



$y = \frac{3}{x}$; $D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; а) $y(-4) = -\frac{3}{4}$, $y(-2) = -\frac{3}{2}$, $y(2) = \frac{3}{2}$,

$y(4) = \frac{3}{4}$; б) $-3 = \frac{3}{x}$, $x = -1$; $-2 = \frac{3}{x}$, $x = -\frac{3}{2}$; $2 = \frac{3}{x}$, $x = \frac{3}{2}$; $3 = \frac{3}{x}$, $x = 1$;

в) $y > 0$ при $x > 0$, $y < 0$ при $x < 0$.

2. $y = \frac{126}{x}$; а) $21 = \frac{126}{6}$ — верно, значит, точка A принадлежит графику;

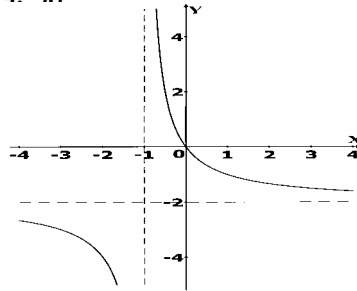
б) $-42 = \frac{126}{-3}$ — верно, значит, точка B принадлежит графику;

в) $-126 = \frac{126}{0}$ — неверно, значит, точка C не принадлежит графику;

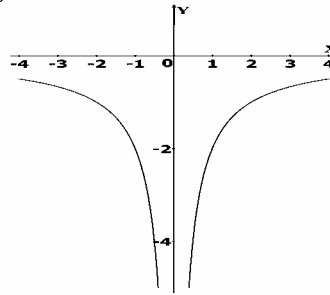
г) $14 = \frac{126}{-9}$ — неверно, значит, точка D не принадлежит графику.

3. $-\frac{4}{x} = -x + 1$.

4. а)



б)



5. $y = \frac{k}{x}$, $-0,5 = \frac{k}{-16}$, $k = 8$ $y = \frac{8}{x}$.

C-5

1.

1) а) $x^2-5x+6=0$; $D=25-4\cdot 6=1$; $x_1=\frac{5+1}{2}=3$; $x_2=2$; **б)** $-y^2-3y+4=0$; $y^2+3y-4=0$;

$D=9+4\cdot 4=25$; $y_1=\frac{-3+5}{2}=1$, $y_2=-4$; **в)** $7a^2-21a+14=0$; $a^2-3a+2=0$;

$D=9-4\cdot 2=1$; $a_1=\frac{3+1}{2}=2$, $a_2=1$; **г)** $3b^2-12=0$; $b^2-4=0$; $b_{1,2}=\pm 2$;

2) а) $2y^2-y-6=0$; $D=1+4\cdot 2\cdot 6=49$; $y_1=\frac{1+7}{4}=2$, $y_2=-\frac{3}{2}$;

б) $6a^2+5a+1=0$; $D=25-4\cdot 6=1$; $a_1=\frac{-5+1}{12}=-\frac{1}{3}$, $a_2=-\frac{1}{2}$;

в) $0,3x^2+0,1x=0$; $3x^2+x=0$; $x(3x+1)=0$; $x_1=0$, $x_2=-\frac{1}{3}$;

г) $c^2-3=0$; $c_{1,2}=\pm\sqrt{3}$;

3) а) $0,5x^2-x-0,5=0$; $x^2-2x-1=0$; $D=4+4=8$; $x_{1,2}=\frac{2\pm 2\sqrt{2}}{2}=1\pm\sqrt{2}$;

б) $-50a^2+5a+1=0$; $50a^2-5a-1=0$; $D=25+4\cdot 50=225$;

$a_1=\frac{5+15}{100}=0,2$, $a_2=-0,1$; **в)** $36b^2+12b-1=0$; $D=144+4\cdot 36=2\cdot 144$;

$b_{1,2}=\frac{-12\pm 12\sqrt{2}}{2\cdot 36}=\frac{-1\pm\sqrt{2}}{6}$.

2. 1) а) $x^2-6x+11=x^2-2\cdot 3x+9+2=(x-3)^2+2$;

б) $2y^2-4y-1=2(y^2-2y-\frac{1}{2})=2(y^2-2y+1-\frac{3}{2})=2((y-1)^2-\frac{3}{2})=$

$=2(y-1)^2-3$; **в)** $a^2-2a=a^2-2a+1-1=(a-1)^2-1$;

2) а) $-y^2+4y+1=-(y^2-4y-1)=-(y^2-4y+4-5)=-(y-2)^2+5$;

б) $\frac{1}{3}x^2-2x+5=\frac{1}{3}(x^2-6x+15)=\frac{1}{3}(x^2-6x+9+6)=\frac{1}{3}(x-3)^2+2$.

3. а) $y^2-4y+7=y^2-4y+4+3=(y-2)^2+3 > 0$;

б) $-y^2+6y-12=-(y^2-6y+12)=-(y^2-6y+9+3)=-(y-3)^2-3 < 0$.

4. а) $a^2-10a+27$; $a_0=\frac{10}{2}=5$; **б)** $-a^2-6a-15$; $a_0=\frac{6}{-2}=-3$.

5. $(3+a)$ см и $(5-a)$ см — новые стороны;

$(3+a)(5-a)$ см² — площадь полученного прямоугольника;

$(3+a)(5-a)=-a^2+2a+15$; $a_0=\frac{-2}{-2}=1$.

Ответ: 1.

C-6

1. 1) a) $x^2-7x+12=0$; $D=49-4\cdot 12=1$; $x_1=\frac{7+1}{2}=4$; $x_2=3$; $x^2-7x+12=(x-4)(x-3)$;

б) $5x^2-5x-10=0$; $x^2-x-2=0$; $D=1+4\cdot 2=9$;

$x_1=\frac{1+3}{2}=2$; $x_2=-1$; $5x^2-5x-10=5(x-2)(x+1)$;

в) $4x^2-144=(2x-12)(2x+12)$; г) $10x^2+29x-30=0$; $D=841+40\cdot 30$;

2) а) $x^2-2x-63=x^2-2x+1-64=(x-1)^2-8^2=(x-1-8)(x-1+8)=(x-9)(x+7)$;

б) $6x^2+5x-4=0$; $D=25+4\cdot 6\cdot 4=121$; $x_1=\frac{-5+11}{12}$; $x_2=-\frac{3}{2}$;

$6x^2+5x-4=6(x-\frac{1}{2})(x+\frac{3}{2})$; в) $17x^2-425=17(x^2-25)=17(x-5)(x+5)$;

г) $5x^2-30x+35=0$; $x^2-6x+7=0$; $D=36-4\cdot 7=2\cdot 4$;

$x_{1,2}=\frac{6\pm 2\sqrt{2}}{2}=3\pm\sqrt{2}$; $5x^2-30x+35=5(x-3-\sqrt{2})(x-3+\sqrt{2})$.

2. 1) а) $x^2-3x+4=0$; $D=9-4\cdot 4 < 0$; б) $-2x^2+4x-7=0$; $2x^2-4x+7=0$;

$D=16-4\cdot 2\cdot 7 < 0$; 2) а) $x^2-10x+27=0$; $D=100-4\cdot 27 < 0$; б) $-7x^2+6x-2=0$;

$7x^2-6x+2=0$; $D=36-47\cdot 2 < 0$; в) $x^2+1=0$; $D=-4 < 0$.

3. 1) а) $\frac{a^2-4}{7a+14}=\frac{(a-2)(a+2)}{7(a+2)}=\frac{a-2}{7}$; б) $\frac{b^2-b-6}{9b+18}=\frac{(b-3)(b+2)}{9(b+2)}=\frac{b-3}{9}$;

$b^2-b-6=0$; $D=1+4\cdot 6=25$; $b_1=\frac{1+5}{2}=3$; $b_2=-2$;

в) $\frac{7+6c-c^2}{21-3c}=\frac{c^2-6c-7}{3c-21}=\frac{c^2-6c+9-16}{3(c-7)}=\frac{(c-3)^2-4^2}{3(c-7)}$

$=\frac{(c-3-4)(c-3+4)}{3(c-7)}=\frac{(c-7)(c+1)}{3(c-7)}=\frac{c+1}{3}$;

2) а) $\frac{y^2-49}{y^2+5y-14}=\frac{(y-7)(y+7)}{(y-2)(y+7)}=\frac{y-7}{y-2}$;

$y^2+5y-14=0$; $D=25+4\cdot 14=81$; $y_1=\frac{-5+9}{2}=2$; $y_2=-7$;

б) $\frac{x^3+x^2-72x}{9x-72}=\frac{x(x^2+x-72)}{9(x-8)}=\frac{x(x-8)(x+9)}{9(x-8)}=\frac{x(x+9)}{9}$;

$x^2+x-72=0$; $D=1+4\cdot 72=289$; $x_1=\frac{-1+17}{2}=8$; $x_2=-9$;

в) $\frac{5a-a^2}{5+34a-7a^2}=\frac{a^2-5a}{7a^2-34a-5}=\frac{a(a-5)}{7(a-5)\left(a+\frac{1}{7}\right)}=\frac{a}{7a+1}$;

$7a^2-34a-5=0$; $D=1156+4\cdot 7\cdot 5=1296$; $a_1=\frac{34+36}{14}=5$; $a_2=-\frac{1}{7}$.

$$4. \quad 1) \quad \frac{y^2 - 11y - 26}{9y + 18} = \frac{(y-13)(y+2)}{9(y+2)} = \frac{y-13}{9} = f(y);$$

$$y^2 - 11y - 26 = 0; D = 121 + 4 \cdot 26 = 225; y_1 = \frac{11+15}{2} = 13, \quad y_2 = -2;$$

$$f(-5) = \frac{-5-13}{9} = -2; \quad f(31) = \frac{31-13}{9} = 2; \quad f(112) = \frac{112-13}{9} = 9;$$

$$2) \quad \frac{x^2 - 18x + 80}{5x - 50} = \frac{x^2 - 18x + 81 - 1}{5(x-10)} = \frac{(x-9)^2 - 1}{5(x-10)} =$$

$$= \frac{(x-9-1)(x-9+1)}{5(x-10)} = \frac{(x-10)(x-8)}{5(x-10)} = \frac{x-8}{5} = f(x);$$

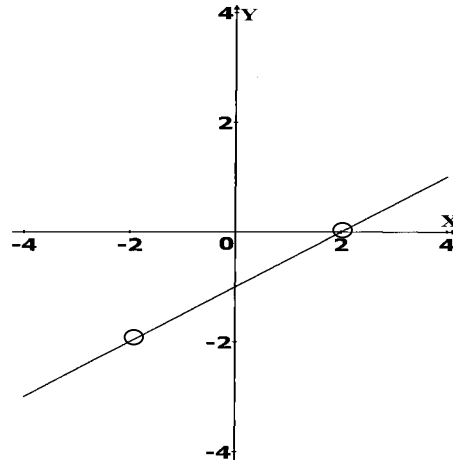
$$f(-12) = \frac{-12-8}{5} = -4; \quad f(8,5) = \frac{8,5-8}{5} = 0,1; \quad f(48) = \frac{48-8}{5} = 8.$$

$$5. \quad \frac{8a-3}{a+5} - \frac{40-27a}{a^2+2a-15} = \frac{8a-3}{a+5} + \frac{27a-40}{(a-3)(a+5)} =$$

$$= \frac{(8a-3)(a-3) + 27a - 40}{(a-3)(a+5)} = \frac{8a^2 - 27a + 9 + 27a - 40}{(a-3)(a+5)} = \frac{8a^2 - 31}{(a-3)(a+5)}.$$

$$6. \quad y = \frac{x^3 - 2x^2 - 4x + 8}{2x^2 - 8} = \frac{x^2(x-2) - 4(x-2)}{2(x^2 - 4)} =$$

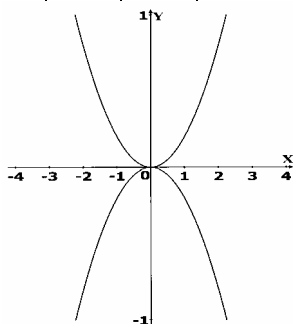
$$= \frac{(x-2)(x^2 - 4)}{2(x^2 - 4)} = \frac{x-2}{2}, \quad x \neq \pm 2.$$



C-7

1. $f(x) = \frac{1}{5}x^2$;

x	0	±1	±2	±3	±4	±5
f(x)	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{9}{5}$	$\frac{16}{5}$	5



$f(-2,5) = f(2,5) = \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$; $f(-3,5) = f(3,5) = \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{49}{20}$; $g(x) = -\frac{1}{5}x^2$;

$g(-2,5) = g(2,5) = -f(2,5) = -\frac{5}{4}$; $g(-3,5) = g(3,5) = -f(3,5) = -\frac{49}{20}$.

2. $y = 2x^2$; **a)** $y = 200$, $200 = 2x^2$, $x^2 = 100$, $x_{1,2} = \pm 10$; (10, 200), (-10, 200);

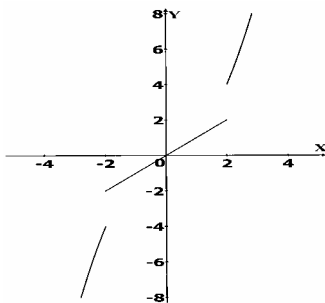
б) $y = 800$, $800 = 2x^2$, $x^2 = 400$, $x_{1,2} = \pm 20$; (20, 800), (-20, 800); **в)** $y = 50x$, $50x = 2x^2$, $x_1 = 0$, $x_2 = 25$; (0, 0), (25, 1250); **г)** $y = -3200x$, $-3200x = 2x^2$, $x_1 = 0$, $x_2 = -1600$; (0, 0); (-1600, 5120000).

3. $y = -25x^2$; **a)** $A(-2; -100)$; $-100 = -25(-2)^2$ — верно, значит, принадлежит;

б) $B(2, 100)$; $100 = -25 \cdot 2^2$ — неверно, значит, не принадлежит;

в) $C\left(\frac{1}{5}; -1\right)$; $-1 = -25 \cdot \frac{1}{5^2}$ — верно, значит, принадлежит.

4.

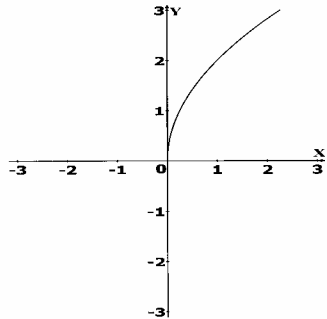


5. a) $y = \frac{1}{3}x^2$, $x \in [-3; 6]$; $y_{\min} = y(0) = 0$; $y_{\max} = y(6) = \frac{1}{3} \cdot 6^2 = 12$; б) $y = -\frac{1}{4}x^2$,

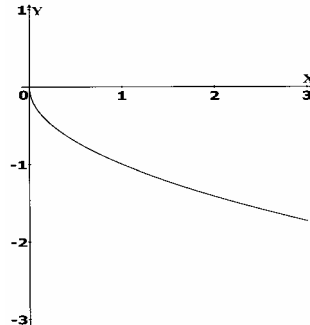
$x \in [-2; 8]$; $y_{\min} = y(8) = -\frac{1}{4} \cdot 8^2 = -16$, $y_{\max} = y(0) = 0$.

6. $h = \frac{9t^2}{2}$; $120 = \frac{10 \cdot t^2}{2}$; $12 = \frac{t^2}{2}$; $t^2 = 24$ $t = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$ (с)

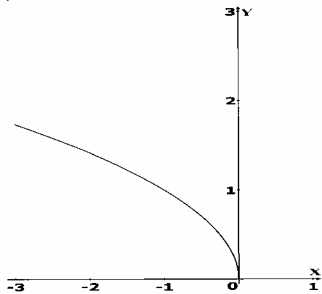
7. а)



б)

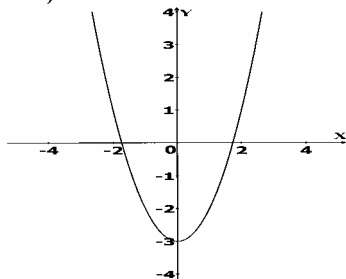


в)

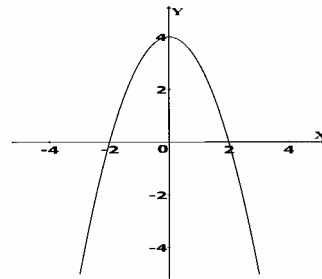


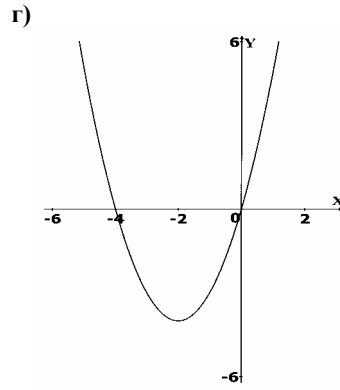
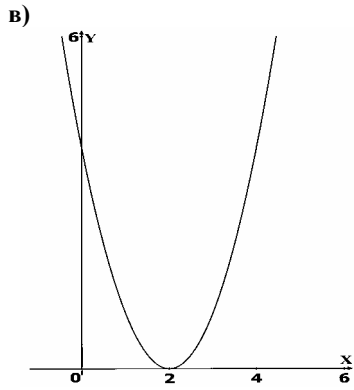
C-8

1. а)



б)





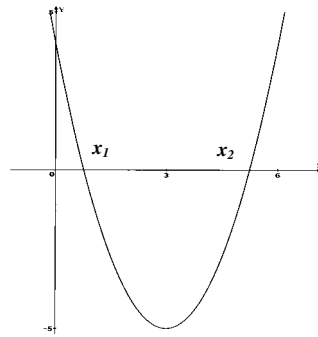
2.

а) $f(x)=x^2-6x+4$; $m=\frac{6}{2}=3$, $n=f(3)=9-18+4=-5$; $(3; -5)$;

б) $f(x)=-x^2-4x+1$; $m=\frac{4}{-2}=-2$, $n=f(-2)=-4+8+1=5$; $(-2; 5)$;

в) $f(x)=3x^2-12x+2$; $m=\frac{12}{2 \cdot 3}=2$, $n=f(2)=3 \cdot 4-24+2=-10$; $(2; -10)$.

3. $f(x)=x^2-6x+4$;

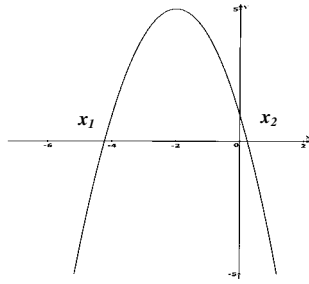


а) $x_1 \approx 0,7$ $x_2 \approx 5,2$;

$f(x) > 0$ при $x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$; $f(x) < 0$ при $x \in (x_1; x_2)$;

б) $f(x)$ возрастает при $x \in [3; +\infty)$, убывает при $x \in (-\infty; 3]$; $f_{\min} = -5$.

4. $f(x)=-x^2-4x+1$;



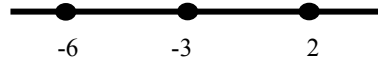
а) $x_1 \approx -4,2$; $x_2 \approx 0,2$; $f(x) > 0$ при $x \in (x_1; x_2)$; $f(x) < 0$ при $x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$; б) $f(x)$ возрастает при $x \in [-\infty; -2)$, убывает при $x \in (-2; +\infty]$; $f_{\max} = 5$.

5. $y = x^2 + 6x + 5$, $x \in [-6; 2]$;

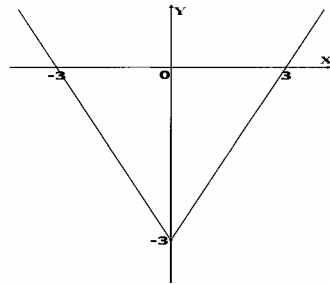
$$m = -\frac{6}{2} = -3, \quad n = f(-3) = 9 - 18 + 5 = -4; \quad (-3; -4);$$

$$y(2) = 4 + 12 + 5 = 21;$$

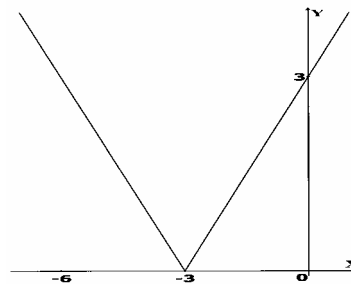
$$E(y) = [-4; 21].$$



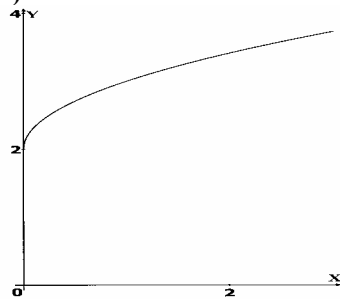
6. а)



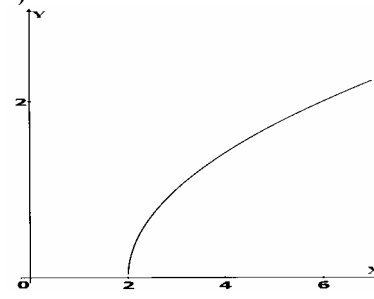
б)



в)

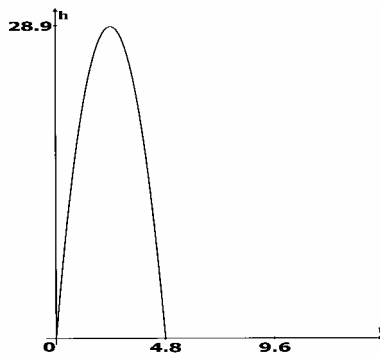


г)



7. $y=x^2+bx+c$; $M(5, 7)$; $5=m=-\frac{b}{2}$, $b=-10$; $7=n=f(5)=25-50+c=c-25$; $c=32$.

8. $h=24t-5t^2$;



1) $h_0=28,8$; 2) мяч поднимался вверх при $t \in [0; 2,4]$, опускался вниз при $t \in [2,4; 4,8]$; 3) через 4,8 с.

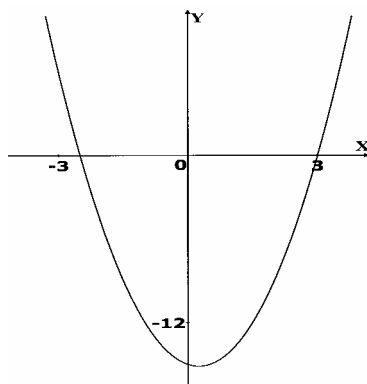
C-9

1.

1) $y=2x^2-x-15$; а) вверх;

б) $2x^2-x-15=0$; $D=1+4 \cdot 2 \cdot 15=121$; $x_2=\frac{1+11}{4}=3$; $x_1=-2,5$;

в)

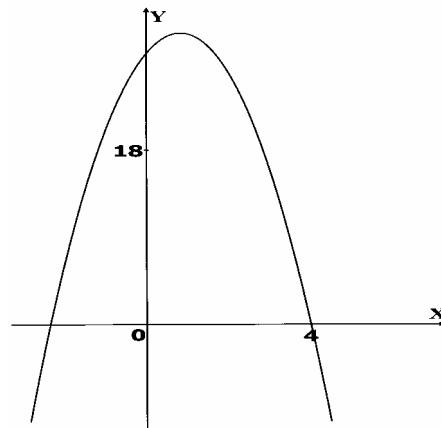


г) $y > 0$ при $x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$; $y < 0$ при $x \in (x_1; x_2)$;

2) $y=-3x^2+5x+28$; а) вниз;

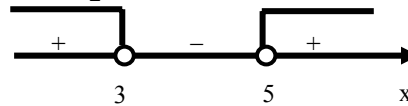
б) $3x^2-5x-28=0$; $D=25+12 \cdot 28=19^2$; $x_2=\frac{5+19}{6}=4$; $x_1=-\frac{7}{3}$;

в)



г) $y > 0$ при $x \in (x_1; x_2)$; $y < 0$ при $x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$.

2. а) $x^2 - 8x + 15 > 0$; $D = 64 - 60 = 4$; $x_1 = \frac{8+2}{2} = 5$; $x_2 = 3$.



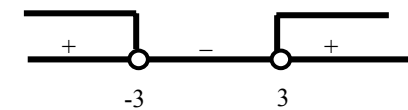
Ответ: $(-\infty; 3) \cup (5; +\infty)$.

б) $3x^2 + 11x - 4 < 0$; $D = 121 + 12 \cdot 4 = 169$; $x_1 = \frac{-11+3}{6} = \frac{1}{3}$; $x_2 = -4$.



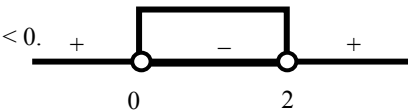
Ответ: $(-4; \frac{1}{3})$.

в) $x^2 - 9 > 0$ $(x-3)(x+3) > 0$



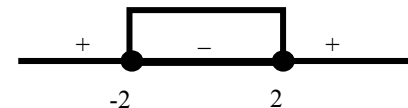
Ответ: $(-\infty; -3) \cup (3; +\infty)$.

г) $2x - x^2 > 0$; $x^2 - 2x < 0$; $x(x-2) < 0$.



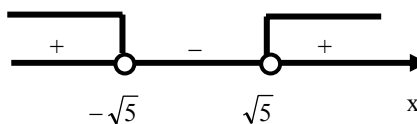
Ответ: $(0; 2)$.

3. а) $x^2 \leq 4$; $(x-2)(x+2) \leq 0$.



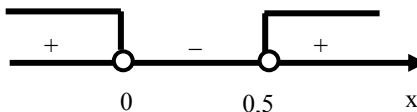
Ответ: $[-2; 2]$.

б) $x^2 > 5$, $x^2 - 5 > 0$; $(x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5}) > 0$.



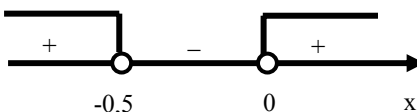
Ответ: $(-\infty; -\sqrt{5}) \cup (\sqrt{5}; +\infty)$.

в) $2x^2 \geq x$; $x^2 - \frac{x}{2} \geq 0$; $x(x - \frac{1}{2}) \geq 0$.



Ответ: $(-\infty; 0) \cup (0,5; +\infty)$

г) $-3x < 6x^2$; $-\frac{x}{2} < x^2$; $x^2 + \frac{x}{2} > 0$; $x(x + \frac{1}{2}) > 0$.



Ответ: $(-\infty; -0,5) \cup (0; +\infty)$.

4.

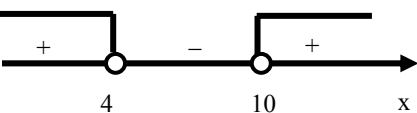
а) $5a^2 - 2a + 1 > 0$; $D = 4 - 4 \cdot 5 < 0$; т.к. $b = 5 > 0$, то любое a — решение, ч.т.д.

б) $6a < a^2 + 10 > 0$; $a^2 - 6a + 10 > 0$; $D = 36 - 4 \cdot 10 < 0$;

т.к. $b = 1 > 0$, то любое a — решение, ч.т.д.

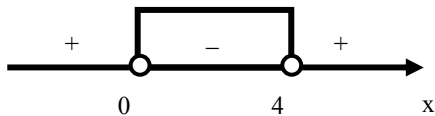
5. а) $y = \sqrt{x^2 - 14x + 40}$; $x^2 - 14x + 40 \geq 0$; $D = 196 - 160 = 36$;

$x_1 = \frac{14 + 6}{2} = 10$; $x_2 = 4$.



Ответ: $(-\infty; 4] \cup [10; +\infty)$.

б) $y = \frac{9}{\sqrt{8x - 2x^2}}$; $8x - 2x^2 > 0$; $2x^2 - 8x < 0$; $x^2 - 4x < 0$; $x(x - 4) < 0$.



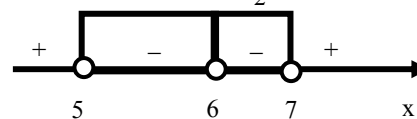
Ответ: $(0; 4)$.

6. $x^2 - 6x + c < 0$; а) $D = 36 - 4c$; чтобы (1; 5) был решением, нужно $x_1 = 1$, $x_2 = 5$, т.е. $1 - 6 + c = 0$; $c = 5$.

б) Ответ: ни при каких c .

7. $\frac{x^2 - 12x + 35}{(x - 6)^2} < 0$; $x^2 - 12x + 35 = 0$; $D = 144 - 140 = 4$; $x_1 = \frac{12 + 2}{2} = 7$;

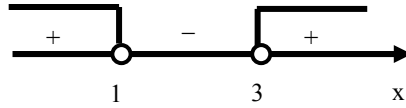
$x_2 = 5$; $\frac{(x - 7)(x - 5)}{(x - 6)^2} < 0$.



Ответ: $(5; 6) \cup (6; 7)$.

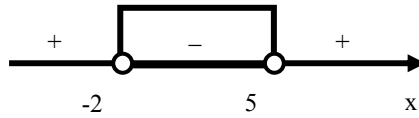
C-10

1.
1) а) $(x-1)(x-3) > 0$.



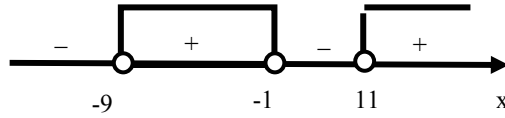
Ответ: $(-\infty; 1) \cup (3; +\infty)$.

б) $(x+2)(x-5)$.



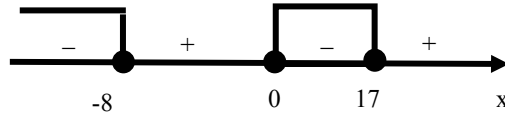
Ответ: $(-2; 5)$.

в) $(x+9)(x+1)(x-11) > 0$.



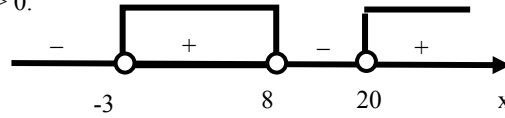
Ответ: $(-9; -1) \cup (11; +\infty)$.

г) $x(x+8)(x-17) \leq 0$.



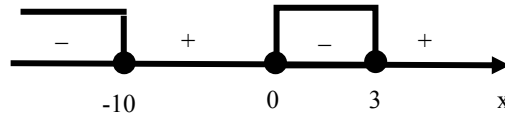
Ответ: $(-\infty; -8] \cup [0; 17]$.

2) а) $(x+3)(x-8)(x-20) > 0$.



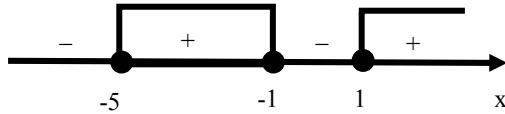
Ответ: $(-3; 8) \cup (20; +\infty)$.

б) $x(x+10)(x-3) \leq 0$.



Ответ: $(-\infty; -10] \cup [0; 3]$.

в) $(x^2-1)(x+5) \geq 0$; $(x-1)(x+1)(x+5) \geq 0$.



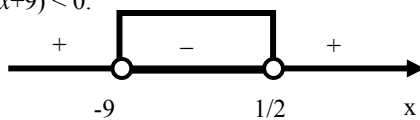
Ответ: $[-5; -1] \cup [1; +\infty)$.

г) $(x^2+1)(x+6)(x-5) \leq 0$; $(x+6)(x-5) \leq 0$.



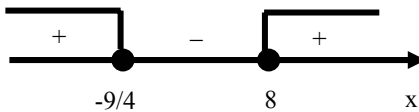
Ответ: $[-6; 5]$.

2. 1) а) $(2x-1)(x+9) < 0$; $(x-\frac{1}{2})(x+9) < 0$.



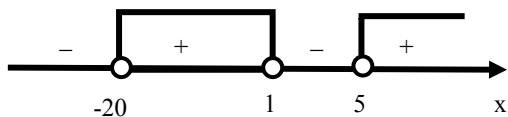
Ответ: $(-9; \frac{1}{2})$.

б) $(8-x)(4x+9) \leq 0$; $(x-8)(x+\frac{9}{4}) \geq 0$.



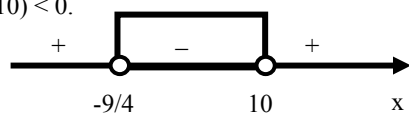
Ответ: $(-\infty; -\frac{9}{4}] \cup [8; +\infty)$.

в) $-(x-1)(5-x)(x+20) > 0$ $(x-1)(x-5)(x+20) > 0$.



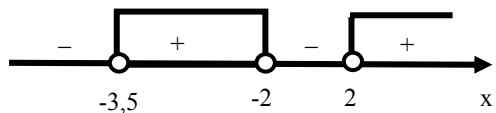
Ответ: $(-20; 1) \cup (5; +\infty)$.

2) а) $(4x+9)(10-x) > 0$; $(x+\frac{9}{4})(x-10) < 0$.



Ответ: $(-\frac{9}{4}; 10)$.

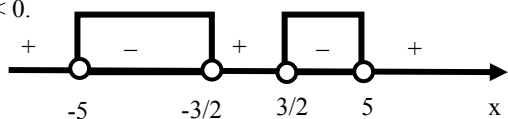
б) $(4-x^2)(10x+35) < 0$; $(x-2)(x+2)(x+3,5) > 0$.



Ответ: $(-3,5; -2) \cup (2; +\infty)$.

в) $(4x^2-9)(25-x^2)(3x^2+2) > 0$; $(x^2-\frac{9}{4})(x^2-25) < 0$;

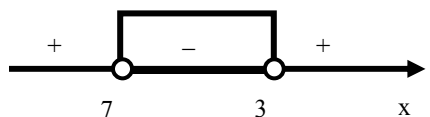
$(x-\frac{3}{2})(x+\frac{3}{2})(x-5)(x+5) < 0$.



Ответ: $(-5; -\frac{3}{2}) \cup (\frac{3}{2}; 5)$.

3.

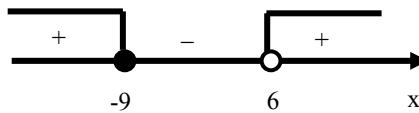
1) а) $\frac{x-3}{x+7} < 0$.



Ответ: $(-7; 3)$.

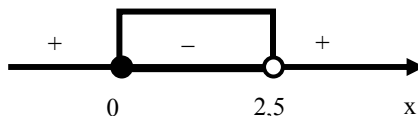
20

б) $\frac{x+9}{x-6} \geq 0$.



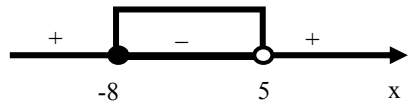
Ответ: $(-\infty; -9] \cup [6; +\infty)$.

в) $\frac{7x}{4x-10} \leq 0$; $\frac{x}{x-2,5} \leq 0$.



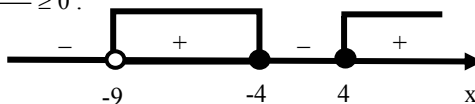
Ответ: $[0; 2,5]$.

2) а) $\frac{2x-10}{x+8} < 0$; $\frac{x-5}{x+8} < 0$.



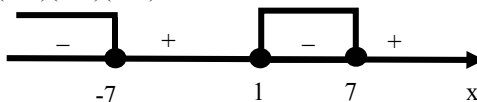
Ответ: $(-8; 5)$.

б) $\frac{x^2-16}{x+9} \geq 0$; $\frac{(x-4)(x+4)}{x+9} \geq 0$.



Ответ: $(-9; -4] \cup [4; +\infty)$.

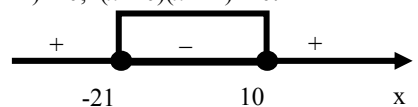
в) $\frac{(x-1)(x^2-49)}{x^2+8} \leq 0$; $(x-1)(x-7)(x+7) \leq 0$.



Ответ: $(-\infty; -7] \cup [1; 7]$.

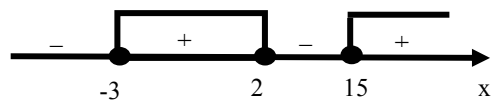
4.

а) $y = \sqrt{(10-x)(x+21)}$; $(10-x)(x+21) \geq 0$; $(x-10)(x+21) \leq 0$.



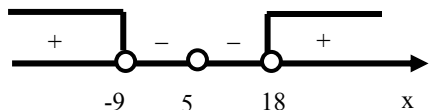
Ответ: $[-21; 10]$.

б) $y = \sqrt{(x-2)(x-15)(x+3)}$; $(x-2)(x-15)(x+3) \geq 0$.



Ответ: $[-3; 2] \cup [15; +\infty)$.

5. а) $(x+9)(x-5)^2(x-18) > 0$.

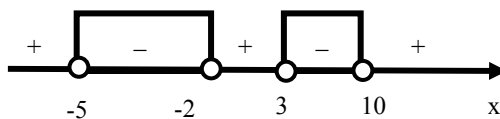


Ответ: $(-\infty; -9) \cup (18; +\infty)$.

б) $\frac{x^2-13x+30}{x^2+7x+10} < 0$; $x^2-13x+30=0$; $D=169-4 \cdot 30=49$; $x_1=\frac{13+7}{2}=10$;

$x_2=3$; $x^2+7x+10=0$; $D=49-4 \cdot 10=9$; $x_1=\frac{-7+3}{2}=-2$; $x_2=-5$;

$\frac{(x-10)(x-3)}{(x+2)(x+5)} < 0$.

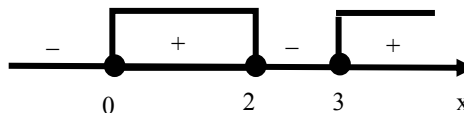


Ответ: $(-5; -2) \cup (3; 10)$.

в) $x^3-5x^2+6x \geq 0$; $x(x^2-5x+6) \geq 0$; $x^2-5x+6=0$;

$D=25-24=1$ $x_1=\frac{5+1}{2}=3$;

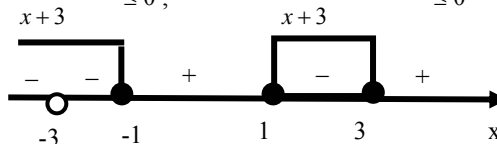
$x_2=2$; $x(x-2)(x-3) \geq 0$.



Ответ: $[0; 2] \cup [3; +\infty)$.

г) $\frac{x^4-10x^2+9}{4x+12} \leq 0$; $x^4-10x^2+9=0$; $D=100-4 \cdot 9=64$;

$x_1^2=\frac{10+8}{2}=9$; $x_2^2=1$; $\frac{(x^2-9)(x^2-1)}{x+3} \leq 0$; $\frac{(x-3)(x+3)(x-1)(x+1)}{x+3} \leq 0$



Ответ: $(-\infty; -3) \cup (-3; -1] \cup [1; 3]$.

C-11

1. а) $x^5+3x^6-x^3+1=0$; $3x^6+x^5-x^3+1=0$ шестая степень;

б) $(x+4)(x-7)(x+8)=0$ третья степень; в) $x^2(x+4)-(x-2)(x^2+1)=3$;

$x^3+4x^2-(x^3-2x^2+x-2)-3=0$; $6x^2-x-1=0$ вторая степень;

г) $(x^3-2)(3x^2+1)-3(x^5-2)=4$; $3x^5-6x^2+x^3-2-3x^3+6-4=0$;

$x^3-6x^2=0$ третья степень;

2. а) $x^3-4x=0$ $x(x^2-4)=0$ $x(x-2)(x+2)=0$; $x_1=0$, $x_{2,3}=\pm 2$;

б) $x^2(x+1)+(x+4)=4$ $x^2(x+1)+x=0$; $x_1=0$, $x(x+1)+1=0$ $x^2+x+1=0$ $D=1-4 < 0$

нет корней; в) $x^4-5x^2+4=0$; $D=25-4 \cdot 4=9$;

$x_1^2=\frac{5+3}{2}=4$; $x_2^2=1$; $x_{1,2}=\pm 2$; $x_{3,4}=\pm 1$.

3. 1) а) $(12x+1)(3x-1)-(6x+2)^2=10$; $36x^2+3x-12x-1-(36x^2+24x+4)-10=0$;

$-9x-1-24x-4-10=0$ $33x=-15$; $x=-\frac{15}{33}$; б) $(3x+7)(3x-7)-3x(3x+1)=5$;

$9x^2-49-9x^2-3x-5=0$; $3x=-54$; $x=-18$;

в) $\frac{6x-1}{4} - \frac{3x+1}{3} = \frac{1}{4}$; $18x-3-12x-4-3=0$; $6x=10$, $x=\frac{5}{3}$;

г) $\frac{x(2-x)}{2} + \frac{x(3+2x)}{4} = 1$; $2x(2-x)+x(3+2x)-4=0$;

$4x-2x^2+3x+2x^2-4=0$; $7x-4=0$; $x=\frac{4}{7}$;

2) а) $(6x-1)(x+1)=20$; $6x^2+5x-21=0$; $D=25+4 \cdot 6 \cdot 21=529$;

$x_1=\frac{-5+23}{12}=\frac{3}{2}$; $x_2=\frac{-5-23}{12}=-\frac{7}{3}$; **б)** $(x-7)(x+7)-11x-30=(x+5)^2+(x-2)^2$;

$x^2-49-11x-30=x^2+10x+25+x^2-4x+4$; $x^2+17x+108=0$; $D=289-4 \cdot 108 < 0$

нет корней; **в)** $\frac{x^2}{16} - \frac{x}{8} = \frac{x+1}{3}$; $\frac{x^2-2x}{16} = \frac{x+1}{3}$; $3x^2-6x-16x-16=0$;

$3x^2-22x-16=0$; $D=484+12 \cdot 16=676$; $x_1=\frac{22+26}{6}=8$; $x_2=\frac{2}{3}$;

2) $17-2x+\frac{x(3x+4)}{2}=54\frac{1}{2}$; $34-4x+3x^2+4x-109=0$; $3x^2=75$, $x^2=25$, $x_{1,2}=\pm 5$.

4. а) $x-13=0$; **б)** $(x-4)(x+11)=0$, $x^2+7x-44=0$; **в)** $(x-2)(x+2)(x-5)=0$;

$(x^2-4)(x-5)=0$; $x^2-4x-5x^2+20=0$; $x^3-5x^2-4x+20=0$.

5. а) $\frac{x(x-1)}{4} + \frac{(x-3)^2}{2} = \frac{(4-x)^2}{3} - \frac{1}{3}$; $3x(x-1)+6(x-3)^2=4(4-x)^2-4$;

$3x^2-3x+6(x^2-6x+9)=4(x^2-8x+16)-4$; $3x^2-3x+6x^2-36x+54-4x^2+32x-64+4=0$;

$5x^2-7x-6=0$; $D=49+4 \cdot 5 \cdot 6=169$; $x_1=\frac{7+13}{10}=2$; $x_2=-\frac{3}{5}$;

б) $x+1=\frac{(x-3)^2}{2} + \frac{x(x+2)}{4} + \frac{x-1}{2}$; $4x+4=2(x^2-6x+9)+x^2+2x+2x-2$;

$2x^2-12x+18+x^2+4x-2-4x-4=0$; $3x^2-12x+12=0$; $x^2-4x+4=0$; $(x-2)^2=0$; $x=2$.

6. а) $x^6+6x^4+7x^2+8=0$; уравнение не имеет корней, т.к. $x^6+6x^4+7x^2+8 > 0$ при всех x . **б)** $12x^5+11x^3+10x-4=140$; верно, т.к. если бы был отрицательный корень, то левая часть была бы меньше нуля (т.к. каждое слагаемое было бы меньше нуля, а правая $140 > 0$);

в) $9x(x-1)-(3x+4)(3x-4)=51-9x$; $9x^2-9x-9x^2+16=51-9x$; $16=51$ — нет корней;

г) $7x^5+14x^4-21x^2-49x=13$; уравнение не имеет целых корней, т.к. если бы был целый корень, то правая часть делилась бы на 7, а левая — нет.

C-12

1. а) $3(x-4)-5(x+2)=cx-6$; $3(6-4)-5(6+2)=6c-6$; $6-40=6c-6$; $6c=-34+6$;

$6c=-28$; $c=-\frac{28}{6}=-\frac{14}{3}$; **б)** $16x^2+2(b-4)x+(2-3b)=0$; $16 \cdot 16+2(b-4) \cdot 4+2-3b=0$;

$256+8b-32+2-3b=0$; $5b=-226$; $b=-\frac{226}{5}$.

2. $bx-1=0$; $bx=1$; $x=\frac{1}{b}$; $b=\pm 1$.

3. $5x-3a=2$, $x=\frac{2+3a}{5}$.

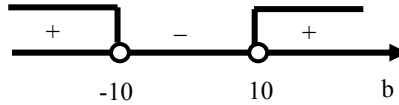
а) $\frac{2+3a}{5} > 0$, $2+3a > 0$, $a > -\frac{2}{3}$; б) $\frac{2+3a}{5} < 0$, $a < -\frac{2}{3}$;

в) $\frac{2+3a}{5} > 10$; $2+3a > 50$; $3a > 48$; $a > 16$;

г)
$$\begin{cases} \frac{2+3a}{5} > 1; \\ \frac{2+3a}{5} < 2; \end{cases} \begin{cases} 2+3a > 5; \\ 2+3a < 10; \end{cases} \begin{cases} 3a > 3; \\ 3a < 8; \end{cases} \begin{cases} a > 1 \\ a < \frac{8}{3}; \\ 1 < a < \frac{8}{3}. \end{cases}$$

4. а) $4x^2+8x+b=0$; $D=64-4 \cdot 4b > 0$; $64-16b > 0$; $16b < 64$; $b < 4$;

б) $5x^2+bx+5=0$; $D=b^2-4 \cdot 5 \cdot 5 > 0$; $b^2-100 > 0$; $(b-10)(b+10) > 0$;



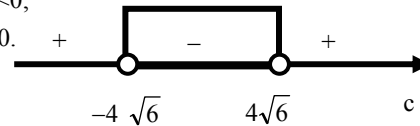
$b \in (-\infty; -10) \cup (10; +\infty)$.

5. а) $2x^2-6x+t=0$; $D=36-4 \cdot 2 \cdot t=0$; $36=8t$; $t=\frac{36}{8}=4,5$;

б) $x^2+tx+4=0$; $D=t^2-4 \cdot 4=0$; $t^2=16$; $t_{1,2}=\pm 4$.

6. а) $4x^2+cx+6=0$; $D=c^2-4 \cdot 4 \cdot 6 < 0$;

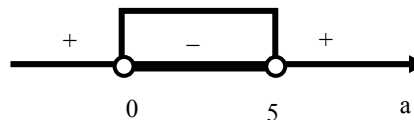
$c^2-96 < 0$; $(c-4\sqrt{6})(c+4\sqrt{6}) < 0$.



$c \in (-4\sqrt{6}; 4\sqrt{6})$.

б) $x^2+6x+c=0$; $D=36-4c < 0$; $4c > 36$, $c > 9$.

7. $a(x+1)=5$; $x+1=\frac{5}{a}$; $x=\frac{5}{a}-1$; $\frac{5}{a}-1 > 0$; $\frac{5-a}{a} > 0$; $\frac{a-5}{a} < 0$.



$a=1; 2; 3; 4$.

8. $x^2+bx=0$ при $b=0$, $x=0$ —единственный корень;

$x^2-bx-5=0$; $D=b^2+4 \cdot 5 > 0$ при любом b имеет два корня;

$x^2+bx+5=0$; $D=b^2-4 \cdot 5 > 0$ не при любом b ;

$x^2-2b=0$ при $b=0$, $x=0$ —единственный корень;

$bx^2-2=0$ при $b=0$ нет корней; $x^2-4x+b=0$; $D=16-4b > 0$ не при любом b .

Ответ: $x^2-bx-5=0$.

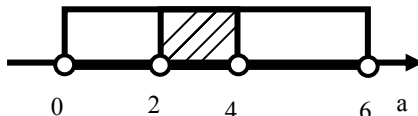
9. $x^2+n^2(x-1)-x=0$, пусть a и $-a$ корни уравнения, тогда

$$\begin{cases} a^2+n^2(a-1)-a=0 \\ a^2+n^2(-a-1)+a=0 \end{cases}; n^2(a-1)-a=n^2(-a-1)+a; an^2-n^2-a=-an^2-n^2+a;$$

$$2an^2=2a; \quad n^2=1, \quad n=\pm 1.$$

10. $x^2-2ax+a^2-1=0; D=4a^2-4(a^2-1)=4;$

$$x_1=\frac{2a+2}{2}=a+1, \quad x_2=a-1; \quad \begin{cases} 1 < a+1 < 5 \\ 1 < a-1 < 5 \end{cases} \begin{cases} 0 < a < 4 \\ 2 < a < 6 \end{cases}.$$



Ответ: $a \in (2; 4)$.

C-13

1) а) $9x^3-27x^2=0; x^3-3x^2=0; x^2(x-3)=0; x_1=0, x_2=3;$

б) $x^3-64x=0; x(x^2-64)=0; x(x-8)(x+8)=0; x_1=0, x_{2,3}=\pm 8;$

в) $x^3+0,8x=0; x(x^2+0,8)=0; x=0;$

2) а) $x^3-4x^2-9x+36=0; x^2(x-4)-9(x-4)=0; (x-4)(x^2-9)=0;$

$(x-4)(x-3)(x+3)=0; x_1=4, x_{2,3}=\pm 3;$ б) $x^6+3x^4-x^2-3=0; x^4(x^2+3)-(x^2+3)=0;$

$(x^2+3)(x^4-1)=0; x^4=1; x_{1,2}=\pm 1;$ в) $y^3-2y^2=y-2; y^3-2y^2-y+2=0; y^2(y-2)-(y-2)=0;$

$(y-2)(y-1)(y+1)=0; y_1=2, y_{2,3}=\pm 1.$

2. а) $(x^2-7)^2-4(x^2-7)-45=0; x^2-7=y, y^2-4y-45=0; D=16+4 \cdot 45=196;$

$$y_1=\frac{4+14}{2}=9; \quad y_2=-5; x^2-7=9, x_2=16, x_{1,2}=\pm 4; x^2-7=-5, x^2=2; x_{3,4}=\pm \sqrt{2};$$

б) $(x^2+2x)^2-2(x^2+2x)-3=0; x^2+2x=y, y^2-2y-3=0; D=4+4 \cdot 3=16;$

$$y_1=\frac{2+4}{2}=3, \quad y_2=-1; x^2+2x=3; x^2+2x-3=0; D=4+4 \cdot 3=16; x_1=\frac{-2+4}{2}=1,$$

$$x_2=-3; x^2+2x=-1; x^2+2x+1=0; (x+1)^2=0; x_3=-1;$$

в) $(x^2-x+1)(x^2-x-7)=65; x^2-x=y; (y+1)(y-7)-65=0; y^2-6y-72=0;$

$$D=36+4 \cdot 72=324; y_1=\frac{6+18}{2}=12, y_2=-6; x^2-x=12; x^2-x-12=0; D=1+4 \cdot 12=49;$$

$$x_1=\frac{1+7}{2}=4; x_2=-3; x^2-x=-6; x^2-x+6=0; D=1-4 \cdot 6 < 0 \text{ нет корней.}$$

Ответ: -3; 4.

3. а) $x^4-13x^2+36=0; D=169-4 \cdot 36=25; x_1^2=\frac{13+5}{2}=9 \text{ и } x^2=4; x_{1,2}=\pm 3, x_{3,4}=\pm 2;$

б) $x^4-5x^2+4=0; D=25-4 \cdot 4=9; x^2=\frac{5+3}{2}=4 \text{ и } x^2=1; x_{1,2}=\pm 2, x_{3,4}=\pm 1;$

в) $x^4+5x^2-6=0; D=25+4 \cdot 6=49; x^2=\frac{-5+7}{2}=1 \text{ и } x^2=-6 \quad x_{1,2}=\pm 1;$

г) $x^4+7x^2-44=0; D=49+4 \cdot 44=225; x^2=\frac{-7+15}{2}=4 \text{ и } x^2 < 0, x_{1,2}=\pm 2;$

д) $x^4+9x^2+8=0$; $D=81-4 \cdot 8=49$; $x_1^2=\frac{-9+7}{2} < 0$; $x_2^2 < 0$ нет корней;

е) $x^4+16x^2=0$, $x^2(x^2+16)=0$, $x^2=0$, $x=0$;

4. $y=x^4-8x^2-9$; $x^4-8x^2-9=0$; $D=64+4 \cdot 9=100$;

$x^2=\frac{8+10}{2}=9$ и $x^2=-1 < 0$; $x_{1,2}=\pm 3$; (3; 0) и (-3; 0).

5. $x^5+x^4+3x^3+3x^2+2x+2=0$; $x^4(x+1)+3x^2(x+1)+2(x+1)=0$;
 $(x+1)(x^4+3x^2+2)=0$; $x_1=-1$; $x^4+3x^2+2=0$; $D=9-4 \cdot 2=1$;

$x^2=\frac{-3+1}{2} < 0$ и $x^2=-2 < 0$. Ответ: -1.

6. $\frac{x^2-4}{x} + \frac{x}{x^2-4} = 3\frac{1}{3}$; $\frac{x^2-4}{x} = t$; $t + \frac{1}{t} = \frac{10}{3}$; $3t + \frac{3}{t} = 10$; $3t^2 - 10t + 3 = 0$;

$D=100-4 \cdot 3 \cdot 3=64$; $t_1=\frac{10+8}{6}=3$; $t_2=\frac{1}{3}$; $\frac{x^2-4}{x}=3$; $x^2-4=3x$; $x^2-3x-4=0$;

$D=9+4 \cdot 4=25$; $x_1=\frac{3+5}{2}=4$; $x_2=-1$; $\frac{x^2-4}{x}=\frac{1}{3}$; $3x^2-x-12=0$;

$D=1+4 \cdot 12 \cdot 3=145$; $x_{3,4}=\frac{1 \pm \sqrt{145}}{6}$.

7. а) x^3-7x+6 ; $x^3-x-6x+6=0$; $x(x^2-1)-6(x-1)=0$; $x(x-1)(x+1)-6(x-1)=0$;

$(x-1)(x^2+x-6)=0$; $x_1=1$; $x^2+x-6=0$ $D=1+4 \cdot 6=25$; $x_1=\frac{-1+5}{2}=2$ $x_3=-3$;

б) $x^3-43x+42$ $x^3-x-42x+42=0$; $x(x-1)(x+1)-42(x-1)=0$; $(x-1)(x^2+x-42)=0$;

$x_1=1$; $x^2+x-42=0$; $D=1+4 \cdot 42=169$; $x_1=\frac{-1+13}{2}=6$; $x_3=-7$.

8. а) $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)=360$; $(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)-360=0$; $x^2+5x+4=y$;

$y(y+2)-360=0$; $y^2+2y-360=0$; $D=4+4 \cdot 360=4 \cdot 361$; $y_1=\frac{-2+38}{2}=18$, $y_2=-20$;

$x^2+5x+4=18$; $x^2+5x-14=0$; $D=25+2 \cdot 14=81$; $x_1=\frac{-5+9}{2}=2$, $x_2=-7$; $x^2+5x+4=-20$;

$x^2+5x+24=0$; $D=25-4 \cdot 24 < 0$ нет корней. Ответ: -7; 2.

б) $(x-1)(x-3)(x-5)(x-7)=105$; $(x^2-8x+7)(x^2-8x+15)-105=0$; $x^2-8x=y$;

$(y+7)(y+15)-105=0$; $y^2+22y=0$; $y_1=0$, $y_2=-22$; $x^2-8x=0$, $x_1=0$, $x_2=8$;

$x^2-8x=-22$, $x^2-8x+22=0$; $D=64-4 \cdot 22 < 0$ нет корней. Ответ: 0; 8.

9. а) $x^4-6x^2+a=0$; $x^2=y$; $y^2-6y+a=0$; $f(y)=y^2-6y+a$;

$D=36-4a < 0$ или $\begin{cases} f(0) > 0 \\ m = \frac{6}{2} = 3 < 0 \end{cases}$ -нет решений;

$36-4a < 0$; $4a > 36$; $a > 9$.

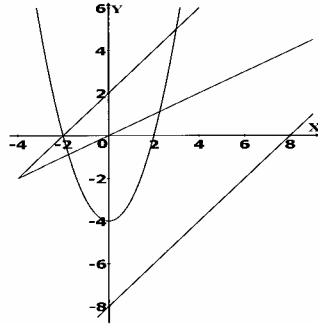
Ответ: $a > 9$.

б) $x^4+ax^2+9=0$, $x^2=y$, $y^2+ay+9=0$;
 $D=a^2-36 < 0$; $(a-6)(a+6) < 0$; $-6 < a < 6$ или

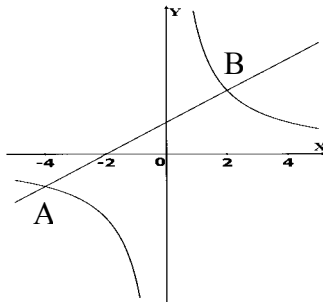
$$\begin{cases} m = -\frac{a}{2} < 0 \\ f(0) = 9 > 0 \end{cases}; -a < 0, a > 0. \quad \text{Ответ: } a > -6.$$

C-14

1. $\begin{cases} y = -0,5x^2 + 8 \\ xy = 6 \end{cases}$. Три решения: $(-4, 4; -1, 5)$, $(0, 8; 7, 8)$, $(3, 5; 1, 8)$.
 2. $y = x^2 - 4$;

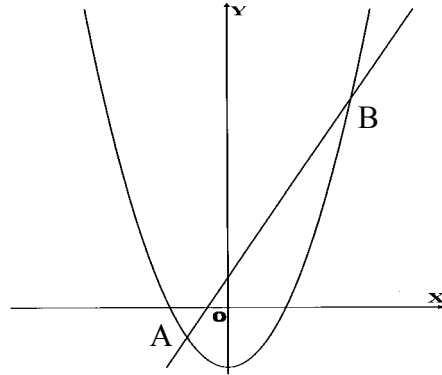


- а) $\begin{cases} y = x^2 - 4 \\ y = x + 2 \end{cases}$; две точки пересечения: $A(-2; 0)$, $B(3; 5)$;
 б) $\begin{cases} y = x^2 - 4 \\ y = 0,5x \end{cases}$; две точки пересечения: $C(-1,8; -0,8)$, $D(2,2; 1,2)$;
 в) $\begin{cases} y = x^2 - 4 \\ y = x - 8 \end{cases}$; нет точек пересечения. Ответ: нет решений.
 3. а) $\begin{cases} y = \frac{8}{x} \\ y = x + 2 \end{cases}$. Ответ: $(-4; -2)$, $(2; 4)$.

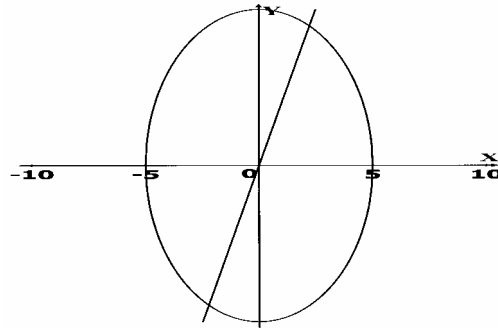


$$\text{б) } \begin{cases} y = x^2 - 2 \\ y = 2x + 1 \end{cases}$$

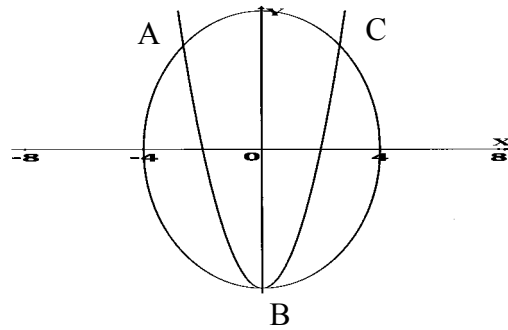
Ответ: $(-1; -1), (3; 7)$.



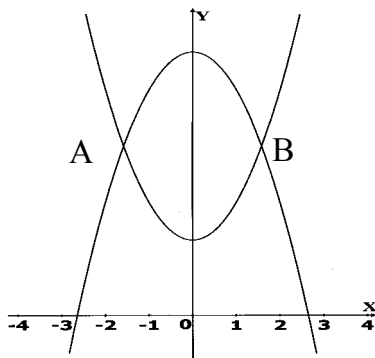
$$\text{в) } \begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ y = 2x \end{cases} \text{ . Ответ: } (-2, 2; -4, 4), (2, 2; 4, 4)$$



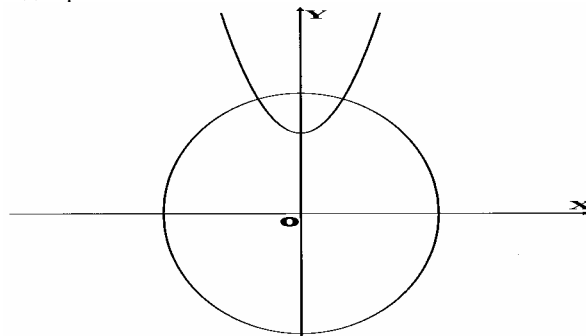
$$\text{г) } \begin{cases} x^2 + y^2 = 16 \\ y = x^2 - 4 \end{cases} \text{ . Ответ: } (-3, 2; 2, 5), (3, 2; 2, 5), (0; -4)$$



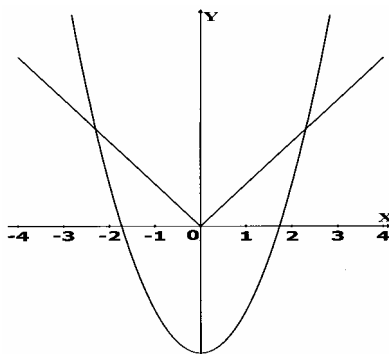
4. а) Ответ: два решения.



б) Ответ: два решения.



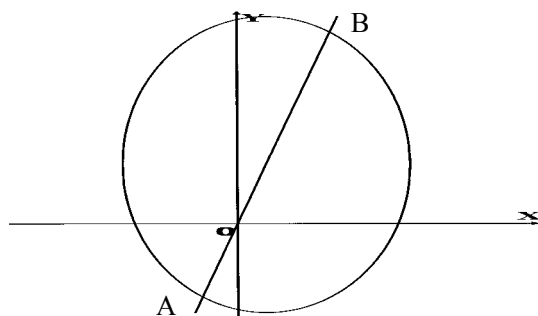
5. а)



$\begin{cases} y = x^2 - 3 \\ y = |x| \end{cases}$; две точки пересечения: $A(-2, 2; 2, 2)$, $B(2, 2; 2, 2)$.

Ответ: $(-2, 2; 2, 2)$, $(2, 2; 2, 2)$.

б)

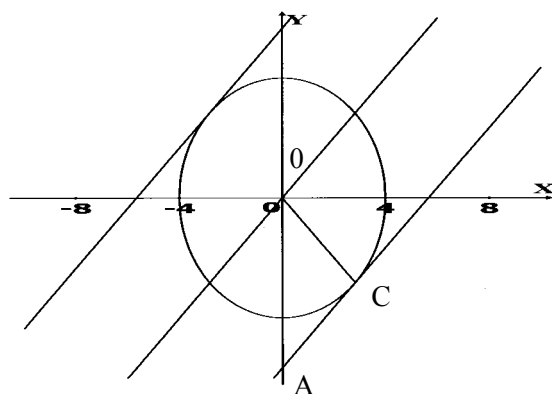


$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y-2)^2 = 25, \\ y = 2x \end{cases}$$

две точки пересечения: $A(-1, 2; -2, 4)$, $B(3, 2; 6, 4)$.

Ответ: $(-1, 2; -2, 4)$, $(3, 2; 6, 4)$.

6.
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 16, \\ x - y = k \end{cases}$$



Изобразим графики функций на рисунке.

Рассмотрим $\triangle OAC$: $\angle C = 90^\circ$, $\angle A = \angle O = 45^\circ$.

$OC = 4$ (радиус окружности); $AC = 4$; $OA = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}$.

Ясно, что при $k = \pm 4\sqrt{2}$ получаем одну точку пересечения;

при $k \in (-4\sqrt{2}; 4\sqrt{2})$ — две точки; при $|k| > 4\sqrt{2}$ решения нет.

Ответ: а) $k = \pm 4\sqrt{2}$; б) $(-4\sqrt{2}; 4\sqrt{2})$ в) $(-\infty; -4\sqrt{2}) \cup (4\sqrt{2}; +\infty)$.

C-15

$$1. \begin{cases} x^2 + y^2 = 100 \\ 3x + 2y - 2 = 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} 6^2 + (-8)^2 = 100 \\ 3 \cdot 6 + 2 \cdot (-8) - 2 = 0 \end{cases} \left| \begin{array}{l} 36 + 64 = 100 \\ 18 - 16 - 2 = 0 \end{array} \right. ; \text{ верно, значит, является.}$$

$$2. \begin{cases} x^2 - 3y + 12 = 0 \\ y = x + 4 \end{cases} \left| \begin{array}{l} x^2 - 3(x + 4) + 12 = 0 \\ x^2 - 3x = 0 \end{array} \right. ; x(x - 3) = 0;$$

$$x_1 = 0, y_1 = 4; (0; 4); \quad x_2 = 3, y_2 = 7; (3; 7).$$

$$\text{Проверка: } (0; 4); \begin{cases} 0^2 - 3 \cdot 4 + 12 = 0 \\ 4 = 0 + 4 \end{cases} \text{ — верно;}$$

$$(3; 7); \begin{cases} 3^2 - 3 \cdot 7 + 12 = 0 \\ 7 = 3 + 4 \end{cases} \text{ — верно.}$$

$$3. 1) \text{ а) } \begin{cases} x^2 + 2y = 6 \\ y = x - 1 \end{cases}; \begin{cases} x^2 + 2(x - 1) = 6 \\ x^2 + 2x - 2 = 6 \end{cases}; x^2 + 2x - 8 = 0; D = 4 + 4 \cdot 8 = 36;$$

$$x_1 = \frac{-2 + 6}{2} = 2; \quad x_2 = -4; \quad y_1 = 1, y_2 = -5. \quad \text{Ответ: } (2; 1), (-4; -5).$$

$$\text{б) } \begin{cases} x = y - 2 \\ xy - y = 10 \end{cases} \left| \begin{array}{l} y(y - 2) - y = 10 \\ y^2 - 3y - 10 = 0 \end{array} \right. ; D = 9 + 4 \cdot 10 = 49;$$

$$y_1 = \frac{3 + 7}{2} = 5, \quad y_2 = -2; \quad x_1 = 3, \quad x_2 = -4. \quad \text{Ответ: } (3; 5), (-4; -2).$$

$$\text{в) } \begin{cases} xy + x^2 = 4 \\ y = x + 2 \end{cases} \left| \begin{array}{l} x(x + 2) + x^2 = 4 \\ 2x^2 + 2x - 4 = 0 \end{array} \right. ; x^2 + x - 2 = 0; D = 1 + 4 \cdot 2 = 9;$$

$$x_1 = \frac{-1 + 3}{2} = 1, \quad x_2 = -2; \quad y_1 = 3, \quad y_2 = 0. \quad \text{Ответ: } (1; 3), (-2; 0).$$

$$2) \text{ а) } \begin{cases} x^2 - y^2 = 24 \\ x - 2y = 7 \end{cases} \left| \begin{array}{l} (7 + 2y)^2 - y^2 = 24 \\ x = 7 + 2y \end{array} \right. ; 49 + 28y + 4y^2 - y^2 - 24 = 0;$$

$$3y^2 + 28y + 25 = 0; D = 784 - 12 \cdot 25 = 484; y_1 = \frac{-28 + 22}{6} = -1; \quad y_2 = -\frac{25}{3};$$

$$x_1 = 7 - 2 = 5; \quad x_2 = 7 - \frac{50}{3} = -\frac{29}{3}. \quad \text{Ответ: } (5; -1), \left(-\frac{29}{3}; -\frac{25}{3}\right).$$

$$\text{б) } \begin{cases} x + 3y = 11 \\ 2x + y^2 = 14 \end{cases} \left| \begin{array}{l} x = 11 - 3y \\ 2(11 - 3y) + y^2 - 14 = 0 \end{array} \right.;$$

$$y^2 - 6y + 8 = 0; D = 36 - 4 \cdot 8 = 4; y_1 = \frac{6 + 4}{2} = 5, \quad y_2 = 1; x_1 = -4, x_2 = 8.$$

$$\text{Ответ: } (-4; 5), (8; 1).$$

$$\text{в) } \begin{cases} y^2 - xy = 12 \\ 3y - x = 10 \end{cases} \left| \begin{array}{l} y^2 - y(3y-10) = 12 \\ x = 3y - 10 \end{array} \right. ; \quad y^2 - 3y^2 + 10 - 12 = 0;$$

$$-2y^2 + 10y - 12 = 0; y^2 - 5y + 6 = 0; D = 25 - 4 \cdot 6 = 1; y_1 = \frac{5+1}{2} = 3, y_2 = 2; x_1 = -1; x_2 = -4.$$

Ответ: (-1; 3), (-4; 2).

$$\text{3) а) } \begin{cases} (x-2)(y-1) = 30 \\ 2x - y = 10 \end{cases} \left| \begin{array}{l} (x-2)(2x-11) = 30 \\ y = 2x - 10 \end{array} \right. ; \quad 2x^2 - 15x - 8 = 0;$$

$$D = 225 + 4 \cdot 2 \cdot 8 = 289; x_1 = \frac{15+17}{4} = 8, x_2 = -\frac{1}{2}; y_1 = 6; y_2 = -11.$$

Ответ: (8; 6), $(-\frac{1}{2}; -11)$.

$$\text{б) } \begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 14 \\ x - 3y = 10 \end{cases} \left| \begin{array}{l} (10+3y)^2 - y(10+3y) + y^2 = 14 \\ x = 10+3y \end{array} \right. ;$$

$$100 + 60y + 9y^2 - 10y - 3y^2 + y^2 - 14 = 0; 7y^2 + 50y + 86 = 0; D = 2500 - 4 \cdot 7 \cdot 86 = 92;$$

$$y_{1,2} = \frac{-50 \pm 2\sqrt{23}}{2 \cdot 7} = \frac{-25 \pm \sqrt{23}}{7}; x_{1,2} = 10 + \frac{-75 \pm 3\sqrt{23}}{7} = \frac{-5 \pm 3\sqrt{23}}{7}.$$

Ответ: $\left(\frac{-5 \pm 3\sqrt{23}}{7}, \frac{-25 \pm \sqrt{23}}{7} \right)$.

$$\text{4. } \begin{cases} 3x + 2y = 11 \\ 5x - 3y = 12 \\ x^2 + y^2 - xy - y = 6 \end{cases} \left| \begin{array}{l} x = \frac{11-2y}{3} \\ 55 - 10y - 9y = 36 \\ \frac{55-10y}{3} - 3y = 12 \end{array} \right. ; \quad 55 - 10y - 9y = 36, 19y = 19, y = 1,$$

$$x = 3; 3^2 + 1^2 - 3 \cdot 1 - 1 = 6; 10 - 3 - 1 = 6 - \text{верно.} \quad \text{Ответ: (3; 1).}$$

$$\text{5. а) } \begin{cases} x^2 - y^2 = 9 \\ xy = 20 \end{cases} \left| \begin{array}{l} x^2 - \frac{400}{x^2} = 9 \\ y = \frac{20}{x} \end{array} \right. ; \quad x^4 - 9x^2 - 400 = 0; D = 81 + 4 \cdot 400 = 1681;$$

$$x^2 = \frac{9+41}{2} = 25; x_{1,2} = \pm 5; y_{1,2} = \pm 4. \quad \text{Ответ: } (\pm 5; \pm 4).$$

$$\text{б) } \begin{cases} x^2 - 3y^2 = 22 \\ x^2 + 3y^2 = 28 \end{cases} \left| \begin{array}{l} 22 + 3y^2 = 28 - 3y^2 \\ 6y^2 = 6 \\ y_{1,2} = \pm 1 \\ x^2 = 22 + 3 = 25; x = \pm 5 \end{array} \right.$$

Ответ: (5; ±1), (-5; ±1).

$$\text{в) } \begin{cases} x^2 + 2x + 3y = 3 \\ x^2 + x + 2y = 4 \end{cases} \left| \begin{array}{l} y = \frac{3-x^2-2x}{3} \\ x^2 + x + \frac{6-2x^2-4x}{3} = 4 \end{array} \right. ; \quad 3x^2 + 3x + 6 - 2x^2 - 4x = 12;$$

$$x^2 - x - 6 = 0; D = 1 + 4 \cdot 6 = 25, x_1 = \frac{1+5}{2} = 3, x_2 = -2;$$

$$y_1 = \frac{3-9-6}{3} = -4, \quad y_2 = \frac{3-4+4}{3} = 1. \quad \text{Ответ: } (3; -4), (-2; 1).$$

$$6. \quad x^2 + (x^2 - 1 - 2)^2 = 5; \quad x^2 + (x^2 - 3)^2 = 5; \quad x^2 + x^4 - 6x^2 + 9 = 5;$$

$$x^4 - 5x^2 + 4 = 0; \quad D = 25 - 4 \cdot 4 = 9; \quad x_1^2 = \frac{5+3}{2} = 4; \quad x_2^2 = 1;$$

$$x_{1,2} = \pm 2; \quad x_{3,4} = \pm 1; \quad y_{1,2} = 3; \quad y_{3,4} = 0. \quad \text{Ответ: } (\pm 2; 3); (\pm 1; 0).$$

$$7. \quad \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{6} \\ 2y - x = 1 \end{cases} \quad \left| \begin{array}{l} \frac{1}{2y-1} + \frac{1}{y} - \frac{5}{6} = 0 \\ x = 2y - 1 \end{array} \right. ; \quad 6y + 12y - 6 - 5y(2y-1) = 0;$$

$$18y - 6 - 10y^2 + 5y = 0; \quad 10y^2 - 23y + 6 = 0 \quad D = 529 - 40 \cdot 6 = 289; \quad y_1 = \frac{23+17}{20} = 2;$$

$$y_2 = \frac{3}{10}; \quad x_1 = 3; \quad x_2 = -0,4. \quad \text{Ответ: } (3; 2), (-0,4; 0,3).$$

$$8) \quad \begin{cases} \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{16}{3} \\ x - y = 6 \end{cases} \quad \left| \begin{array}{l} \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{16}{3} \\ x = 6 + y \end{array} \right. ; \quad \frac{x}{y} = a, \quad a + \frac{1}{a} - \frac{16}{3} = 0;$$

$$3a^2 - 16a + 3 = 0; \quad D = 256 - 4 \cdot 3 \cdot 3 = 220; \quad a_{1,2} = \frac{16 \pm 2\sqrt{55}}{2 \cdot 3} = \frac{8 \pm \sqrt{55}}{3};$$

$$\frac{6+y}{y} = \frac{8 \pm \sqrt{55}}{3}; \quad 18 + 3y = 8y \pm \sqrt{55}y; \quad y_{1,2} = \frac{18}{5 \pm \sqrt{55}}; \quad x_{1,2} = \frac{48 \pm 6\sqrt{55}}{5 \pm \sqrt{55}}.$$

$$\text{Ответ: } \left(\frac{48 \pm 6\sqrt{55}}{5 \pm \sqrt{55}}, \frac{18}{5 \pm \sqrt{55}} \right).$$

С-16

1. Пусть x — первое число, y — второе число, тогда $\begin{cases} x - y = 5 \\ xy = 84 \end{cases} \left| \begin{array}{l} x = 5 + y \\ y(5 + y) = 84 \end{array} \right. ;$

$$y^2 + 5y - 84 = 0; \quad D = 25 + 4 \cdot 84 = 361; \quad y_1 = \frac{-5+19}{2} = 7; \quad y_2 = -12; \quad x_1 = 12; \quad x_2 = -7.$$

Ответ: 12 и 7 или -7 и -12.

2. Пусть x см — один катет, тогда $(x+7)$ см — другой катет.

Используя теорему Пифагора, получаем: $x^2 + (x+7)^2 = 13^2$;

$$x^2 + x^2 + 14x + 49 - 169 = 0; \quad 2x^2 + 14x - 120 = 0; \quad x^2 + 7x - 60 = 0; \quad D = 49 + 4 \cdot 60 = 289;$$

$$x_1 = \frac{-7+17}{2} = 5, \quad x_2 < 0; \quad 5 \text{ см} — первый катет, \quad 5+7=12 \text{ (см)} — второй катет.$$

Ответ: 5 и 12 см.

3. Пусть x м — длина, y м — ширина, тогда xy м² — площадь или 2080 м²;

$2(x+y)$ м — периметр или 184 м.

Получаем систему:
$$\begin{cases} xy = 2080 \\ 2(x+y) = 184 \end{cases} \quad \left| \begin{cases} y(92-y) = 2080 \\ x = 92-y \end{cases} \right. ;$$

$$y^2 - 92y + 2080 = 0; D = 8464 - 4 \cdot 2080 = 144; y_1 = \frac{92+12}{2} = 52; y_2 = 40; x_1 = 40; x_2 = 52.$$

Ответ: 40 и 52 м.

4. Пусть x см—длина, y см—ширина, тогда $2(x+y)$ см—периметр или 20 см; (x^2+y^2) см²—сумма площадей квадратов или 104 см².

Получаем систему:
$$\begin{cases} 2(x+y) = 20 \\ x^2 + y^2 = 104 \end{cases} \quad \left| \begin{cases} x = 10-y \\ (10-y)^2 + y^2 = 104 \end{cases} \right. ;$$

$$100 - 2y + 2y^2 - 104 > 0; 2y^2 - 2y - 4 = 0; y^2 - y - 2 = 0; D = 1 + 4 \cdot 2 = 9; y_1 = \frac{1+3}{2} = 2;$$

$y_2 = -1 < 0$; $x = 8$; 8 см — длина, 2 см — ширина. Ответ: 8 и 2 см.

5. Пусть x —первое число, y —второе число, тогда xy — их произведение, $(x+y)$ —их сумма.

Получаем систему:
$$\begin{cases} x + 2y = 19 \\ xy = x + y + 29 \end{cases} \quad \left| \begin{cases} x = 19 - 2y \\ y(19 - 2y) = 19 - 2y + y + 29 \end{cases} \right. ;$$

$$-2y^2 + 19y = 48 - y; 2y^2 - 20y + 48 = 0;$$

$$y^2 - 10y + 24 = 0; D = 100 - 4 \cdot 24 = 4; y_1 = \frac{10+2}{2} = 6; y_2 = 4;$$

$x_1 = 7, x_2 = 11.$

Ответ: 7 и 6 или 11 и 4.

6. Пусть x км/ч—скорость первой группы, y км/ч—скорость второй группы, тогда $(x+y)$ км/ч — скорость сближения;

$\frac{18}{x+y}$ ч—прошли вместе 18 км или 2ч. $\frac{18}{x}$ ч и $\frac{18}{y}$ ч—проходит весь путь

первая и вторая группа соответственно. Известно, что $\frac{18}{x} = \frac{18}{y} + \frac{9}{10}$.

Получаем систему:
$$\begin{cases} \frac{18}{x+y} = 2; & \frac{9}{x+y} = 1 \\ \frac{18}{x} = \frac{18}{y} + \frac{9}{10}; & \frac{2}{x} = \frac{2}{y} + \frac{1}{10} \end{cases} ; x+y=9, y=9-x;$$

$$\frac{2}{x} = \frac{2}{9-x} + \frac{1}{10}; 20(9-x) - 20x - x(9-x) = 0; 180 - 20x - 20x - 9x + x^2 = 0;$$

$$x^2 - 49x + 180 = 0; D = 2401 - 4 \cdot 180 = 1681; x_1 = \frac{49+41}{2} = 45; x_2 = 4; y_1 < 0; y_2 = 5;$$

4 и 5 км/ч — скорости I и II групп соответственно. Ответ: 4 и 5 км/ч.

7. Пусть 1 — вся работа, x ч — выполняет всю работу I машинистка, тогда $(x+3)$ ч — выполняет всю работу II;

$\frac{1}{x}$ и $\frac{1}{x+3}$ часть работы—производительность I и II.

Известно, что за $6\frac{2}{3}$ ч обе машинистки, работая совместно, сделают всю работу, т.е. $\frac{20}{3}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x+3}\right) = 1$; $\frac{2x+3}{x(x+3)} - \frac{3}{20} = 0$;
 $40x+60-3x(x+3)=0$; $40x+60-3x^2-9x=0$; $3x^2-31x-60=0$;
 $D=961+4 \cdot 3 \cdot 60=1681$; $x_1=\frac{31+41}{6}=12$, $x_2 < 0$; 12 ч и 15 ч — требуется I и II машинистке, чтобы выполнить всю работу. Ответ: 12 и 15 ч.

C-17

1. а) 10, 11, 12, 13, 14; б) 1, 4, 9, 16, 25; в) 4, 7, 10, 13, 16.
2. $a_n=5n-2$; а) $a_1=5 \cdot 1-2=3$; б) $a_6=5 \cdot 6-2=28$; в) $a_{10}=5 \cdot 10-2=48$;
г) $a_{100}=5 \cdot 100-2=498$; д) $a_k=5k-2$; е) $a_{k+1}=5(k+1)-2=5k+3$.
3. а) $x_n=n+6$; $x_2=2+6=8$; $x_5=5+6=11$; $x_{10}=10+6=16$;
б) $x_n = \frac{2n-1}{3}$; $x_2 = \frac{2 \cdot 2 - 1}{3} = 1$; $x_5 = \frac{2 \cdot 5 - 1}{3} = 3$; $x_{10} = \frac{2 \cdot 10 - 1}{3} = \frac{19}{3}$;
в) $x_n=n^2$; $x_2=2^2=4$; $x_5=5^2=25$; $x_{10}=10^2=100$; г) $x_n=n(n-1)$; $x_2=2(2-1)=2$;
 $x_5=5(5-1)=20$; $x_{10}=10(10-1)=90$; д) $x_n=n^3-n$; $x_2=2^3-2=6$; $x_5=5^3-5=120$;
 $x_{10}=10^3-10=990$; е) $x_n=(-1)^n \cdot n$; $x_2=(-1)^2 \cdot 2=2$; $x_5=(-1)^5 \cdot 5=-5$; $x_{10}=(-1)^{10} \cdot 10=10$.
4. $a_n=55-4n$, $15=55-4n$, $4n=40$, $n=10$. Ответ: 10.
5. а) $C_1=3$, $C_{n+1}=C_n+4$; $C_2=C_1+4=7$, $C_3=C_2+4=11$, $C_4=C_3+4=15$, $C_5=C_4+4=19$;
б) $C_1=4$, $C_{n+1}=2C_n$; $C_2=2C_1=8$, $C_3=2C_2=16$, $C_4=2C_3=32$, $C_5=2C_4=64$.
6. 0,4; 0,42; 0,428; 0,4285; 0,42857.
7. $a_n=n^2-2n+3$; а) $3=n^2-2n+3$; $n^2-2n=0$; $n=2$, значит, $3=a_2$;
б) $66=n^2-2n+3$; $n^2-2n-63=0$; $D=4+4 \cdot 63=4 \cdot 64$; $n=\frac{2+2 \cdot 8}{2}=9$, значит,
 $66=a_9$; в) $103=n^2-2n+3$; $n^2-2n-100=0$; $D=4+4 \cdot 100=4 \cdot 101$;
 $n=\frac{2+2\sqrt{101}}{2} \notin N$, значит, 103—не член $\{a_n\}$.
8. а) $b_1=4$, $b_{n+1}=b_n+4$, $b_n=4n$; б) $b_1=1$, $b_{n+1}=5b_n$, $b_n=5^{n-1}$.

C-18

1. $a_1=3,4$; $a_2=-0,2$; $d=a_2-a_1=-0,2-3,4=-3,6$;
 $a_3=a_2+d=-0,2-3,6=-3,8$; $a_4=a_2+2d=-0,2-2 \cdot 3,6=-7,4$;
 $a_5=a_2+3d=-0,2-3 \cdot 3,6=-11$; $a_6=a_5+d=-11-3,6=-14,6$.
2. $b_1=-0,8$, $d=4$; $b_3=b_1+2d=-0,8+2 \cdot 4=7,2$;
 $b_7=b_1+6d=-0,8+6 \cdot 4=23,2$; $b_{24}=b_1+23d=-0,8+23 \cdot 4=91,2$;
 $b_{k+1}=b_1+d(k+1-1)=b_1+kd$.
3. а) $a_1=16$, $a_8=37$; $a_8=a_1+7d$, $7d=a_8-a_1$, $d=\frac{a_8-a_1}{7}=\frac{37-16}{7}=3$;

$$\text{б) } a_1=4, \quad a_{18}=-11; \quad a_{18}=a_1+17d, \quad d=\frac{a_{18}-a_1}{17}=\frac{-11-4}{17}=-\frac{15}{17};$$

$$\text{в) } a_1=0,5, \quad a_{23}=-2,3;$$

$$a_{23}=a_1+22d, \quad d=\frac{a_{23}-a_1}{22}=\frac{-2,3-0,5}{22}=-\frac{2,8}{22}=-\frac{1,4}{11}=-\frac{14}{110}=-\frac{7}{55}.$$

$$4. \quad a_1=106, \quad d=12; \quad a_6=a_1+5d=106+5 \cdot 12=166; \quad a_{12}=a_1+11d=106+11 \cdot 12=238.$$

$$5. \quad x_1=14, \quad d=0,5 \quad \text{а) } x_n=17,5=x_1+d(n-1)=14+0,5(n-1)=13,5+0,5n;$$

$$0,5n=17,5-13,5; \quad 0,5n=4; \quad n=8, \quad \text{значит, } 17,5=x_8;$$

$$\text{б) } x_n=19=x_1+d(n-1)=13,5+0,5n; \quad 19=13,5+0,5n; \quad 0,5n=5,5; \quad n=11, \quad \text{значит,}$$

$$19=x_{11}; \quad \text{в) } x_n=34=13,5+0,5n; \quad 0,5n=20,5; \quad n=41, \quad \text{значит, } 34=x_{41}.$$

$$6. \quad a_1=18, \quad d=a_2-a_1=4-18=-14; \quad \text{а) } -38=a_1+d(n-1)=18-14(n-1)=32-14n;$$

$$14n=70, \quad n=5, \quad \text{значит, } -38=a_5; \quad \text{б) } -64=32-14n, \quad 14n=96,$$

$$n=\frac{96}{14} \notin N, \quad \text{значит, } -64 \text{ не встретится среди данных чисел.}$$

$$\text{в) } -80+32-14n, \quad 14n=112, \quad n=8, \quad \text{значит, } -80=a_8.$$

$$7.2 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4 \quad a_5 \quad 22; \quad 2=a_1, \quad 22=a_6; \quad a_6=a_1+5d, \quad d=\frac{a_6-a_1}{5}=\frac{22-2}{5}=4;$$

$$\text{поэтому: } a_2=a_1+d=2+4=6, \quad a_3=a_1+2d=2+2 \cdot 4=10,$$

$$a_4=a_1+3d=2+3 \cdot 4=14, \quad a_5=a_1+4d=2+4 \cdot 4=18.$$

$$8. \quad a_n \text{ -- арифметическая прогрессия; } \quad a_5=a_1+4d, \quad a_2=a_1+d,$$

$$a_{n-2}=a_1+d(n-2-1)=a_1+d(n-3), \quad a_{n-5}=a_1+d(n-5-1)=a_1+d(n-6),$$

$$a_2+a_{n-2}=a_1+d+a_1+d(n-3)=2a_1+d(n-2), \quad a_5+a_{n-5}=a_1+4d+a_1+d(n-6)=2a_1+(n-2),$$

$$\text{значит, } a_2+a_{n-2}=a_5+a_{n-5}, \quad \text{что и требовалось доказать.}$$

$$9. \quad a_1=7; \quad \text{Пусть } a_2=x^2, \quad a_3=(x+1)^2, \quad \text{где } x \text{ -- натуральное число.}$$

$$\text{Тогда } a_2-a_1=a_3-a_2; \quad \text{Получаем: } x^2-7=(x+1)^2-x^2; \quad x^2-7=2x+1; \quad x^2-2x-8=0;$$

$$D=4+4 \cdot 8=36; \quad x_1=\frac{2+6}{2}=4; \quad x_2 \notin N. \quad \text{Значит, } a_2=4^2=16, \quad a_3=(4+1)^2=25.$$

Ответ: 16 и 25.

$$10. \quad \text{По свойству арифметической прогрессии } b^2-a^2=c^2-b^2, \quad b^2=\frac{a^2+c^2}{2}.$$

$$\text{Нужно доказать, что } \frac{1}{a+c}=\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+b} \right) =$$

$$= \frac{a+b+b+c}{2(a+b)(b+c)} = \frac{a+2b+c}{2(a+b)(b+c)}, \quad (a+c)(a+2b+c)=2(a+b)(b+c).$$

$$\text{Т.е. надо доказать, что: } a^2+ac+2ab+2bc+ac+c^2=2(ab+b^2+ac+bc);$$

$$a^2+2ac+2ab+2bc+c^2=2ab+2b^2+2ac+2bc; \quad b^2=\frac{a^2+c^2}{2}.$$

$$\text{Т.е. мы видим, что равенство } \frac{1}{a+c}=\frac{1}{2} \left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+b} \right);$$

равносильно равенству $b^2 = \frac{a^2 + c^2}{2}$.

Значит, числа $\frac{1}{b+c}$, $\frac{1}{a+c}$ и $\frac{1}{a+b}$ также составляют арифметическую прогрессию, что и требовалось доказать.

С-19

1. $a_1 = -16, a_2 = -13, d = a_2 - a_1 = 3;$

а) $S_6 = \frac{2a_1 + d(6-1)}{2} \cdot 6 = \frac{2a_1 + 5d}{2} \cdot 6 = (-32 + 15) \cdot 3 = -51;$

б) $S_{16} = \frac{2a_1 + 15d}{2} \cdot 16 = (-32 + 45) \cdot 8 = 104;$

в) $S_{25} = \frac{2a_1 + 24d}{2} \cdot 25 = \frac{(-32 + 72)}{2} \cdot 25 = 500;$

г) $S_{k+1} = \frac{2a_1 + d(k+1-1)}{2} \cdot (k+1) = \frac{-32 + kd}{2} \cdot (k+1).$

2. а) $a_1 = 4, d = 2; S_{12} = \frac{2a_1 + 11d}{2} \cdot 12 = \frac{2 \cdot 4 + 11 \cdot 2}{2} \cdot 12 = 180;$

б) $a_1 = -5, d = 3; S_{12} = (2 \cdot (-5) + 11 \cdot 3) \cdot 6 = 23 \cdot 6 = 138; \mathbf{в)}$ $a_1 = 16,5, d = -1,5;$

$S_{12} = (2 \cdot 16,5 + 11 \cdot (-1,5)) \cdot 6 = 99; \mathbf{г)}$ $a_1 = 1 + \sqrt{3}, d = -\sqrt{3};$

$S_{12} = (2(1 + \sqrt{3}) + 11 \cdot (-\sqrt{3})) \cdot 6 = (2 - 9\sqrt{3}) \cdot 6 = 12 - 54\sqrt{3}.$

3. $a_n = 3n + 2; a_1 = 3 + 2 = 5, a_2 = 3 \cdot 2 + 2 = 8, d = a_2 - a_1 = 3;$

$S_5 = \frac{2a_1 + 4d}{2} \cdot 5 = \frac{10 + 12}{2} \cdot 5 = 55, S_{40} = \frac{2a_1 + 39d}{2} \cdot 40 = (10 + 117) \cdot 20 = 2540,$

$S_k = \frac{2a_1 + d(k-1)}{2} \cdot k = \frac{10 + 3(k-1)}{2} \cdot k = \frac{7 + 3k}{2} \cdot k.$

4. а) $a_1 = 1, d = 1, S_{80} = ?; S_{80} = \frac{2a_1 + 79d}{2} \cdot 80 = 81 \cdot 40 = 3240;$

б) $a_1 = 10, d = 1, S_{90} = ?; S_{90} = \frac{2a_1 + 89d}{2} \cdot 90 = (20 + 89) \cdot 45 = 4905;$

в) $a_1 = 2, d = 2, S_{50} = ?; S_{50} = \frac{2a_1 + 49d}{2} \cdot 50 = (4 + 98) \cdot 25 = 2550.$

5. а) $a_1 = 8, a_7 = 24; a_7 = a_1 + 6d; d = \frac{a_7 - a_1}{6} = \frac{24 - 8}{6} = \frac{8}{3};$

$S_{10} = \frac{2a_1 + 9d}{2} \cdot 10 = (16 + 24) \cdot 5 = 200;$

б) $a_4 = 16, a_{12} = 88; \left\{ \begin{array}{l} 16 = a_1 + 3d \\ 88 = a_1 + 11d \end{array} \right. \left| \begin{array}{l} 16 - 3d = 88 - 11d; 8d = 72, \\ d = 9;$

$$a_1=16-3 \cdot 9=-11; S_{10}=\frac{2a_1+9d}{2} \cdot 10=(-22+81) \cdot 5=295.$$

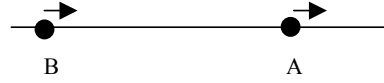
$$6. a_1=15, d=2; S_{26}=\frac{2a_1+25d}{2} \cdot 26=(30+50) \cdot 13=1040.$$

$$7. S_3=48, S_6=141; \begin{cases} 48 = \frac{2a_1+2d}{2} \cdot 3 \\ 141 = \frac{2a_1+5d}{2} \cdot 6 \end{cases} \left| \begin{array}{l} 16 = a_1 + d \\ 47 = 2a_1 + 5d \end{array} \right. \left| \begin{array}{l} d = 16 - a_1 \\ 47 = 2a_1 + 5(16 - a_1) \end{array} \right.;$$

$$47 = -3a_1 + 80; 3a_1 = 33; a_1 = 11; d = 16 - 11 = 5.$$

8.

Из условия задачи ясно, что за первый час расстояние между автомобилями сократится на 10 км, за второй час на 15 км, за третий час на 20 км.



$$\text{Поэтому } a_1=10, d=5, S_n=135, n=?; 135 = \frac{2 \cdot 10 + 5 \cdot (n-1)}{2} \cdot n;$$

$$270 = (20 + 5n - 5) \cdot n, n(5n + 15) - 270 = 0, n(n+3) - 54 = 0; n^2 + 3n - 54 = 0;$$

$$D = 9 + 4 \cdot 54 = 225; n_1 = \frac{-3 + 15}{2} = 6; n_2 < 0 \text{ — не удовлетворяет условию задачи;}$$

Итак, через 6 ч легковой автомобиль догонит грузовой.

$$9. \text{ а) } 3+7+11+\dots+x=289, d=4, a_1=3; S_n=289=\frac{2 \cdot 3 + 4(n-1)}{2} \cdot n;$$

$$289 = (3 + 2(n-1)) \cdot n; 289 = (2n+1) \cdot n; 2n^2 + n - 289 = 0; D = 1 + 4 \cdot 2 \cdot 289 = 2313;$$

$$\text{б) } 8+5+2+\dots+x=270, d=-3, a_1=8; S_n=270=\frac{16-3(n-1)}{2} \cdot n; 540=n(19-3n);$$

$$3n^2 - 19n + 540 = 0; D = 361 - 4 \cdot 3 \cdot 540 < 0. \quad \text{Ответ: нет корней.}$$

$$10. \text{ а) } S_n = 5n^2 + 3n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n = \left(a_1 + \frac{d}{2}(n-1) \right) \cdot n;$$

$$5n^2 + 3n = \frac{d}{2}n^2 + \left(a_1 - \frac{d}{2} \right)n; \begin{cases} \frac{d}{2} = 5; & d = 10 \\ a_1 - \frac{d}{2} = 3; & a_1 = 8 \end{cases};$$

Значит, $\{a_n\}$ — арифметическая прогрессия.

$$\text{б) } S_n = 3n^2; 3n^2 = \frac{d}{2}n^2 + \left(a_1 - \frac{d}{2} \right)n; \frac{d}{2} = 3, d = 6; a_1 - \frac{d}{2} = 0, a_1 = 3.$$

Значит, $\{a_n\}$ — арифметическая прогрессия.

$$\text{в) } S_n = (4n-1)n = 4n^2 - n; 4n^2 - n = \frac{d}{2}n^2 + \left(a_1 - \frac{d}{2} \right)n;$$

$$\begin{cases} \frac{d}{2} = 4, & d = 8 \\ a_1 - \frac{d}{2} = -1, & a_1 = 3 \end{cases}. \quad \text{Значит, } \{a_n\} \text{ — арифметическая прогрессия.}$$

C-20

1. $b_1=0,3$; $b_2=1,8$; $q=\frac{b_2}{b_1}=\frac{1,8}{0,3}=6$; $b_3=b_2 \cdot q=1,8 \cdot 6=10,8$;

$b_4=b_3 \cdot q=10,8 \cdot 6=64,8$; $b_5=b_4 \cdot q=64,8 \cdot 6=388,8$;

$b_6=b_5 \cdot q=388,8 \cdot 6=2332,8$.

2. $b_1=1,6$; $q=2$; $b_3=b_1q^2=1,6 \cdot 4=6,4$; $b_5=b_3q^2=6,4 \cdot 4=25,6$;
 $b_7=b_5q^2=25,6 \cdot 4=102,4$; $b_k=b_1q^{k-1}=1,6 \cdot 2^{k-1}=0,8 \cdot 2^k$.

3. а) $a_1=3$, $q=2$; $a_6=a_1q^5=3 \cdot 2^5=96$; б) $a_1=64$, $q=\frac{1}{4}$;

$a_7=a_1q^6=64 \cdot \frac{1}{4^6}=\frac{1}{64}$; в) $a_1=125$, $q=\frac{1}{5}$; $a_5=a_1q^4=5^3 \cdot \frac{1}{5^4}=\frac{1}{5}$;

г) $a_1=2\sqrt{2}$, $q=\frac{1}{\sqrt{2}}$; $a_8=a_1q^7=2\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2^{7/2}}=\frac{1}{4}$.

4. а) $b_6=\frac{1}{27}$, $q=\frac{1}{3}$; $b_6=b_1 \cdot q^5$; $\frac{1}{27}=b_1 \cdot \frac{1}{3^5}$; $b_1=\frac{3^5}{3^3}=9$;

б) $b_7=256$, $q=-2$; $b_7=b_1 \cdot q^6$, $256=b_1 \cdot 2^6$; $b_1=\frac{256}{64}=4$.

5. а) $b_3=12$, $b_5=48$; $b_5=b_3q^2$, $q^2=\frac{b_5}{b_3}$, $q=\sqrt{\frac{b_5}{b_3}}=\sqrt{\frac{48}{12}}=2$;

б) $b_4=25$, $b_6=16$; $b_6=b_4q^2$, $q=\sqrt{\frac{b_6}{b_4}}=\sqrt{\frac{16}{25}}=\frac{4}{5}$.

6. $\frac{1}{9}$, $b_2, b_3, b_4, b_5, 27$; $b_1=\frac{1}{9}$, $b_6=27$; $b_6=b_1 \cdot q^5$; $q=\sqrt[5]{\frac{b_6}{b_1}}=\sqrt[5]{27 \cdot 9}=3$;

$b_2=\frac{1}{9} \cdot 3=\frac{1}{3}$; $b_3=\frac{1}{3} \cdot 3=1$; $b_4=1 \cdot 3=3$; $b_5=3 \cdot 3=9$.

7. a_n — геометрическая прогрессия.

а) $2a_1, 2a_2, 2a_3$ — очевидно, геометрическая прогрессия с тем же самым знаменателем.

б) a_1+3, a_2+3, a_3+3 — не геометрическая прогрессия. Для доказательства можно взять, например, $a_n=2^n$.

Тогда $a_1=2, a_2=4, a_3=8$, но $a_1+3=5, a_2+3=7, a_3+3=11$;

$\frac{7}{5} \neq \frac{11}{7}$, значит, это уже не геометрическая прогрессия.

в) $\sqrt{a_1}, \sqrt{a_2}, \sqrt{a_3}$ — геометрическая прогрессия, т.к. $\frac{\sqrt{a_2}}{\sqrt{a_1}}=\frac{\sqrt{a_3}}{\sqrt{a_2}}$.

8. $\begin{cases} b_4 - b_2 = 18 \\ b_5 - b_3 = 36 \end{cases} \left| \begin{array}{l} b_1q^3 - b_1q = 18 \\ b_1q^4 - b_1q^2 = 36 \end{array} \right. ; \frac{b_1(q^4 - q^2)}{b_1(q^3 - q)} = \frac{36}{18}$;

$$\frac{q^3 - q}{q^2 - 1} = 2; \quad \frac{q(q^2 - 1)}{q^2 - 1} = 2; \quad q = \pm 1 \text{ или } q = 2;$$

$q = 1$ — не подходит к условию задачи, т.к. тогда бы $b_1 = b_2 = b_3 = b_4$ и $b_4 - b_2 = 0 \neq 18$. Разберем случай $q = -1$. $b_2 = -b_1$, $b_3 = b_1$, $b_4 = -b_1$, $b_5 = b_1$, $b_4 - b_2 = 0 \neq 18$;

Значит, $q = -1$ не подходит. Остается $q = 2$. Тогда $b_1 = \frac{18}{q^3 - q} = \frac{18}{8 - 2} = 3$.

Ответ: $b_1 = 3$; $q = 2$.

$$9. b_1, b_2, b_3, b_4; \quad \begin{cases} b_1 + b_4 = 52 \\ b_2 + b_3 = 16 \end{cases}; \quad \begin{cases} b_1 + b_1 q^3 = 52 \\ b_1 q + b_1 q^2 = 16 \end{cases}; \quad \frac{b_1(1 + q^3)}{b_1(q + q^2)} = \frac{52}{16};$$

$$\frac{(1 + q)(1 - q + q^2)}{q(1 + q)} = \frac{13}{4}; \quad q = -1 \text{ или } 4q^2 - 4q + 4 = 13q; \quad 4q^2 - 17q + 4 = 0;$$

$$D = 289 - 4 \cdot 16 = 225; \quad q_1 = \frac{17 + 15}{8} = 4; \quad q_2 = \frac{1}{4}. \text{ Если } q = -1, \text{ то } b_2 = -b_1, \quad b_3 = b_1,$$

$$b_4 = -b_1; \quad b_1 + b_4 = 0 \neq 52, \text{ значит, } q = -1 \text{ — не подходит } b_1 = \frac{52}{1 + q^3} = \frac{52}{63} = \frac{4}{5};$$

$$b_2 = \frac{4}{5} \cdot 4 = \frac{16}{5}; \quad b_3 = \frac{16}{5} \cdot 4 = \frac{64}{5}, \quad b_4 = \frac{64}{5} \cdot 4 = \frac{256}{5}, \text{ Если же } q = \frac{1}{4}, \text{ то}$$

$$b_1 = \frac{52}{1 + \frac{1}{64}} = \frac{52 \cdot 64}{65} = \frac{4}{5} \cdot 64 = \frac{256}{5}, \quad b_2 = \frac{256}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{64}{5}, \quad b_3 = \frac{64}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{16}{5},$$

$$b_4 = \frac{4}{5}. \quad \text{Ответ: } \frac{4}{5}, \frac{16}{5}, \frac{64}{5}, \frac{256}{5}.$$

10. a, b, c — геометрическая прогрессия, т.е. $b^2 = ac$. Надо доказать, что $(a + b + c)(a - b + c) = a^2 + b^2 + c^2$, т.е., что $a^2 + ab + ac - cb - b^2 - bc + ac + bc + c^2 = a^2 + b^2 + c^2$; $b^2 = ac$. Видно, что оба данных равенства эквивалентны, значит, требуемое равенство — тождество. Ч.т.д.

С-21

$$1. \text{ а) } b_1 = 32, \quad q = \frac{1}{4}; \quad S_5 = \frac{b_1(q^5 - 1)}{q - 1} = \frac{32 \left(\frac{1}{4^5} - 1 \right)}{-\frac{3}{4}} = \frac{1023 \cdot 32 \cdot 4}{4^5 \cdot 3} = \frac{1023}{8 \cdot 3} = \frac{341}{8};$$

$$\text{б) } b_1 = -4, \quad q = 2; \quad S_5 = \frac{-4(2^5 - 1)}{2 - 1} = -124; \quad \text{в) } b_1 = 27, \quad q = -\frac{1}{3};$$

$$S_5 = \frac{27 \left(-\frac{1}{3^5} - 1 \right)}{-\frac{1}{3} - 1} = \frac{244 \cdot 27 \cdot 3}{4 \cdot 243} = \frac{4941}{243} = \frac{183}{9} = \frac{61}{3};$$

г) $b_1=2\sqrt{3}$, $q=\sqrt{3}$; $S_5=\frac{2\sqrt{3}(3^{5/2}-1)}{\sqrt{3}-1}=\frac{54-2\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}$.

2. а) $b_1=3$, $q=\frac{6}{3}=2$; $S_6=\frac{b_1(q^6-1)}{q-1}=\frac{3\cdot 63}{1}=189$; **б)** $b_1=5$, $b_2=-\frac{2,5}{5}=-\frac{1}{2}$;

$S_6=\frac{5\left(\frac{1}{64}-1\right)}{-\frac{3}{2}}=\frac{5\cdot 63\cdot 2}{64\cdot 3}=\frac{5\cdot 21}{32}=\frac{105}{32}$; **в)** $b_1=4$, $q=\frac{4^2}{4}=4$;

$S_6=\frac{4(4^6-1)}{4-1}=\frac{4\cdot 4095}{3}=5460$; **г)** $b_1=\sqrt{3}$, $q=\frac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$; $S_6=\frac{\sqrt{3}(27-1)}{\sqrt{3}-1}=\frac{26\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}$.

3. а) $a_1=64$, $q=\frac{1}{4}$; $S_5=\frac{64\cdot\left(\frac{1}{4^5}-1\right)}{\frac{1}{4}-1}=\frac{64\cdot 1023\cdot 4}{4^5\cdot 3}=\frac{341}{4}$;

б) $a_1=10$, $q=\frac{1}{2}$; $S_8=\frac{10\left(\frac{1}{2^8}-1\right)}{\frac{1}{2}-1}=\frac{10\cdot 255\cdot 2}{2^8}=\frac{5\cdot 255}{2^6}=\frac{1275}{64}$;

в) $a_1=3$, $q=-2$, $S_4=\frac{3(16-1)}{-3}=-15$; **г)** $a_1=3\sqrt{2}$, $q=\sqrt{2}$, $S_6=\frac{3\sqrt{2}(8-1)}{\sqrt{2}-1}=\frac{21\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$.

4. а) $b_3=\frac{1}{25}$, $b_4=\frac{1}{125}$, $q=\frac{b_4}{b_3}=\frac{1}{5}$, $b_3=b_1q^2$, $b_1=\frac{b_3}{q^2}=1$,

$S_4=\frac{\frac{1}{5^4}-1}{\frac{1}{5}-1}=\frac{624\cdot 5}{625\cdot 4}=\frac{156}{125}$; **б)** $b_2=6$, $b_4=24$, $b_4=b_2q^2$, $q=\sqrt{\frac{b_4}{b_2}}=2$, $b_2=b_1q$,

$b_1=\frac{b_2}{q}=3$, $S_4=\frac{3(16-1)}{2-1}=45$.

5. а) $q=2$, $S_5=93$, $93=\frac{b_1(32-1)}{2-1}=31b_1$, $b_1=3$;

б) $q=\frac{2}{3}$, $S_4=65$, $65=\frac{b_1\left(\frac{16}{81}-1\right)}{\frac{2}{3}-1}=\frac{b_1\cdot 65\cdot 3}{81}$, $b_1=27$.

6. а) $x_n=2\cdot 3^n$, $\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{2\cdot 3^{n+1}}{2\cdot 3^n}=3$, $\frac{x_{n+2}}{x_{n+1}}=\frac{2\cdot 3^{n+2}}{2\cdot 3^{n+1}}=3$, т.е. $\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{x_{n+2}}{x_{n+1}}$ для любого n , значит, $\{x_n\}$ — геометрическая прогрессия;

- б) $x_n = 2^n$ $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{x_{n+2}}{x_{n+1}} = 2$, значит, $\{x_n\}$ — геометрическая прогрессия;
 в) $x_n = 3^n - 3$ $x_1 = 0$, значит, $\{x_n\}$ — не геометрическая прогрессия, т.к. у геометрической прогрессии $x_1 \neq 0$.

$$7. \begin{cases} b_6 - b_4 = 72 \\ b_3 - b_5 = 9 \end{cases} \left| \begin{array}{l} b_1 q^5 - b_1 q^3 = 72 \\ b_1 q^2 - b_1 q^4 = 9 \end{array} \right. ; \frac{b_1(q^5 - q^3)}{b_1(q^2 - q^4)} = 8 ; \frac{q^3 - q}{1 - q^2} = 8 ;$$

$$\frac{q(q^2 - 1)}{1 - q^2} = 8 ; q \neq \pm 1 \text{ или } q = -8.$$

Если $q = \pm 1$, то $b_6 = b_4$ и $b_6 - b_4 = 0 \neq 72$, значит, $q = \pm 1$ — не подходит;

$$b_1 = \frac{9}{q^2(1 - q^2)} = -\frac{9}{64 \cdot 63} = -\frac{1}{448} ; S_8 = \frac{8^8 - 1}{448 \cdot 9} = \frac{1864135}{448}.$$

$$8. \begin{cases} b_1 + b_2 + b_3 = 13 \\ b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = 91 \end{cases} \left| \begin{array}{l} b_1 + b_1 q + b_1 q^2 = 13 \\ b_1^2 + b_1^2 q^2 + b_1^2 q^4 = 91 \end{array} \right. ; \frac{b_1(1 + q + q^2)}{b_1^2(1 + q^2 + q^4)} = \frac{1}{7} ;$$

$$7(1 + q + q^2) = b_1(1 + q^2 + q^4).$$

C-22

$$1. \text{ а) } b_1 = 36, b_2 = 12, q = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}, |q| < 1, S = \frac{b_1}{1 - q} = \frac{36 \cdot 3}{2} = 54;$$

б) $b_1 = \frac{1}{8}, b_2 = \frac{1}{4}, q = 2, q > 1$, значит, это не бесконечно убывающая геометрическая прогрессия;

$$\text{в) } b_1 = 0,6; b_2 = -0,06; q = \frac{-0,06}{0,6} = -0,1; S = \frac{0,6}{1 + 0,1} = \frac{6}{11} ;$$

$$\text{г) } b_1 = \sqrt{2}, b_2 = 1, q = \frac{1}{\sqrt{2}}, |q| < 1; S = \frac{\sqrt{2}}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{2}{\sqrt{2} - 1} ;$$

$$\text{д) } b_1 = 3\sqrt{3}, b_2 = 3, q = \frac{3}{3\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}, |q| < 1; S = \frac{3\sqrt{3}}{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{9}{\sqrt{3} - 1} ;$$

$$\text{е) } b_1 = \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1}, b_2 = \frac{1}{2 - \sqrt{2}}, q = \frac{(2 - \sqrt{2})(\sqrt{2} - 1)}{\sqrt{2} + 1} = \frac{2 - \sqrt{2}}{2}, |q| < 1;$$

$$S = \frac{\sqrt{2} + 1}{(\sqrt{2} - 1) \left(1 - \frac{2 - \sqrt{2}}{2} \right)} = \frac{(\sqrt{2} + 1) \cdot 2}{(\sqrt{2} - 1)\sqrt{2}} = \frac{2 + \sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1}.$$

$$2. \text{ а) } S=8, q=\frac{1}{2}, 8=\frac{b_1}{1-\frac{1}{2}}=2b_1, b_1=4; \text{ б) } S=54, q=\frac{1}{3}, 54=\frac{b_1}{1+\frac{1}{3}}=\frac{3b_1}{4} \\ =b_1=72; \text{ в) } S=\frac{3\sqrt{3}}{2}, q=\frac{1}{3}, \frac{3\sqrt{3}}{2}=\frac{b_1}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3b_1}{2}, b_1=\sqrt{3}; \text{ г) } S=2(\sqrt{2}+1),$$

$$q=\frac{1}{\sqrt{2}}, 2(\sqrt{2}+1)=\frac{b_1}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}=\frac{b_1\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}, b_1=\sqrt{2}(2-1)=\sqrt{2}.$$

$$3. \text{ а) } 0,8=\frac{8}{10}=\frac{4}{5}; \text{ б) } 0,(17)=0,171717\dots=0,17+0,0017+0,000017+\dots= \\ =\frac{0,17}{1-0,01}=\frac{0,17}{0,99}=\frac{17}{99}; \text{ в) } 2,(4)=2,4444\dots=2+0,4+0,04+0,004+\dots=2+\frac{0,4}{1-0,1} \\ =2+\frac{0,4}{0,9}=2+\frac{4}{9}=\frac{22}{9};$$

$$\text{ г) } 3,(16)=3,161616\dots=3+0,16+0,0016+\dots=3+\frac{0,16}{1-0,01}=3+\frac{16}{99}=\frac{313}{99};$$

$$\text{ д) } 0,4(5)=0,4555\dots=0,4+0,05+0,005+\dots=\frac{2}{5}+\frac{0,05}{1-0,1}=\frac{2}{5}+\frac{0,05}{0,9}=\frac{2}{5}+\frac{5}{90}=\frac{41}{90};$$

$$\text{ е) } 0,6(12)=0,61212\dots=0,6+0,012+0,00012+\dots=\frac{3}{5}+\frac{0,012}{1-0,01} \\ =\frac{3}{5}+\frac{0,012}{0,99}=\frac{3}{5}+\frac{12}{990}=\frac{3}{5}+\frac{6}{495}=\frac{3}{5}+\frac{2}{165}=\frac{101}{165}.$$

$$4. q=\frac{\sqrt{3}}{6}, S=\frac{6(\sqrt{30}+5)}{5}, \frac{6(\sqrt{30}+5)}{5}=\frac{b_1}{1-\frac{\sqrt{3}}{6}}=\frac{6b_1}{6-\sqrt{3}},$$

$$b_1=\frac{(6-\sqrt{3})(\sqrt{30}+5)}{5}, b_3=b_1q^2=\frac{(6-\sqrt{3})(\sqrt{30}+5)}{5} \cdot \frac{3}{36}=\frac{(6-\sqrt{3})(\sqrt{30}+5)}{60}.$$

5. Если сторона I квадрата a см, то сторона II квадрата $\frac{a}{\sqrt{2}}$ см (находится

по теореме Пифагора), сторона III-го $\frac{a}{2}$ см и т.д. Т.е. периметры

образуют геометрическую прогрессию. $b_1=4a, q=\frac{1}{\sqrt{2}}, a=8$ см;

$$S=\frac{4a}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}=\frac{4a \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}=\frac{4 \cdot 8\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}=\frac{32\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}=\frac{32\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}=32(2+\sqrt{2}).$$

$$6. b_2=24, S=108, b_1=\frac{b_2}{q}, S=b_1+\frac{b_2}{1-q}=\frac{b_2}{q}+\frac{b_2}{1-q}=b_2\cdot\frac{1}{q(1-q)},$$

$$108=\frac{24}{q(1-q)}, 9q(1-q)=2, 9q^2-9q+2=0, D=81-4\cdot9\cdot2=9, q_1=\frac{9+3}{18}=\frac{2}{3},$$

$$q_2=\frac{1}{3}, b_1=\frac{24\cdot3}{2}=36 \text{ или } b_1=24\cdot3=72. \text{ Ответ: } 36 \text{ и } \frac{2}{3} \text{ или } 72 \text{ и } \frac{1}{3}$$

С-23

1. 1) а) $\sqrt{x}=9, x=81$; б) $\sqrt{x}=\frac{1}{2}, x=\frac{1}{4}$; в) $\sqrt{x}=0, x=0$.
- 2) а) $\sqrt{x-1}=2, x-1=4, x=5$; б) $\sqrt{2x+1}=0,5, 2x+1=\frac{1}{4}, 2x=-\frac{3}{4}, x=-\frac{3}{8}$;
в) $\sqrt{2-x}=0, 2-x=0, x=0$.
- 3) а) $\sqrt{x+6}=x, x\geq0, x+6=x^2, x^2-x-6=0, D=1+4\cdot6=25, x_1=\frac{1+5}{2}=3, x_2<0$.
б) $\sqrt{3-2x}=x, x\geq0, 3-2x=x^2, x^2+2x-3=0, D=4+4\cdot3=16, x_1=\frac{-2+4}{2}=1, x_2<0$.
в) $\sqrt{40-x^2}=3x, x\geq0, 40-x^2=9x^2, 10x^2=40, x^2=4, x=2$.
2. а) $\sqrt{x}=-1$ — нет корней, т.к. $E(\sqrt{x})=[0;+\infty]$; б) $\sqrt{2x}=0$ — есть корни;
в) $\sqrt{x-1}=-\sqrt{2}$ — нет корней, т.к. $E(\sqrt{x})=[0;+\infty]$;
г) $\sqrt{-5-x^2}=10$ — нет корней, т.к. $D(\sqrt{x})=[0;+\infty]$;
д) $\sqrt{x^2+4x}+\sqrt{7x}=-0,5$ — нет корней, т.к. $E(\sqrt{x})=[0;+\infty]$;
е) $\sqrt{x-4}-3=0$ — есть корни.
3. 1) а) $\sqrt{3x^2+2x-8}=\sqrt{x^2+x-2}, 3x^2+2x-8=x^2+x-2, 2x^2+x-6=0,$
 $D=1+4\cdot2\cdot6=49, x_1=\frac{-1+7}{4}=\frac{3}{2}, x_2=-2$.
- Проверка: $x_1=\frac{3}{2}, \sqrt{3\cdot\frac{9}{4}+3-8}=\sqrt{\frac{9}{4}+\frac{3}{2}-2}$ — верно,
 $x_2=-2, \sqrt{12-4-8}=\sqrt{4-2-2}$ — верно. Ответ: $-2; \frac{3}{2}$.
- б) $\sqrt{5-4x}=2-x$, найдем $D(x): \begin{cases} 5-4x\geq 0, \\ 2-x\geq 0 \end{cases} \begin{cases} x\leq 1,25 \\ x\leq 2 \end{cases}$, значит, $x\in(-\infty;1,25]$.
- $5-4x=4-4x+x^2; x^2-1=0; x^2=1; x\pm 1$.
- Проверка: $x_1=1, \sqrt{5-4\cdot 1}=2-1$ — верно,
 $x_2=-1, \sqrt{5-4(-1)}=2+1$ — верно. Ответ: ± 1 .

2) а) $\sqrt{4x^2 + 7x} = x - 2$, $4x^2 + 7x = x^2 - 4x + 4$, $3x^2 + 11x - 4 = 0$, $D = 121 + 4 \cdot 3 \cdot 4 = 169$,
 $x_1 = \frac{-11 + 13}{6} = \frac{1}{3}$, $x_2 = -4$.

Проверка: $x_1 = \frac{1}{3}$, $\sqrt{4 \cdot \frac{1}{9} + 7 \cdot \frac{1}{3}} = \frac{1}{3} - 2$ — ложно,

$x_2 = -4$, $\sqrt{4 \cdot 16 - 7 \cdot 4} = -4 - 2$ — ложно. Ответ: нет корней.

б) $\sqrt{11x^2 + 24x - 2} = 2x + 1$, $11x^2 + 24x - 2 = 4x^2 + 4x + 1$, $7x^2 + 20x - 3 = 0$,

$D = 400 + 4 \cdot 7 \cdot 3 = 484$, $x_1 = \frac{-20 + 22}{14} = \frac{1}{7}$, $x_2 = -3$.

Проверка: $x_1 = \frac{1}{7}$, $\sqrt{11 \cdot \frac{1}{49} + 24 \cdot \frac{1}{7} - 2} = \frac{2}{7} + 1$ — верно,

$x_2 = -3$, $\sqrt{11 \cdot 9 - 24 \cdot 3 - 2} = -6 + 1$ — ложно. Ответ: $\frac{1}{7}$.

4. а) $\sqrt{2-x} + 0,01 = 0$, $\sqrt{2-x} = -0,01$ — нет корней, т.к. $E(\sqrt{x}) = [0; +\infty)$;

б) $\sqrt{x} + \sqrt{2x-3} = -2$ — нет корней, т.к. $E(\sqrt{x}) = [0; +\infty)$;

в) $\sqrt{-x^2 - 5} = 25$ — нет корней, т.к. $D(\sqrt{x}) = [0; +\infty)$;

г) $\sqrt{2x - x^2 - 3} = 7$, $-x^2 + 2x - 3 \geq 0$, т.к. $D(\sqrt{x}) = [0; +\infty)$, $x^2 - 2x + 3 \leq 0$,

$D = 4 - 4 \cdot 3 < 0$, значит, у неравенства нет решений, следовательно нет корней и у уравнения.

5. 1) а) $\sqrt{x+13} - \sqrt{x+1} = 2$, $\sqrt{x+13} = 2 + \sqrt{x+1}$, $x+13 = 4+x+1+4\sqrt{x+1}$,
 $2 = \sqrt{x+1}$, $x+1=4$, $x=3$.

Проверка: $\sqrt{3+13} - \sqrt{3+1} = 2$ — верно. Ответ: 3.

б) $\sqrt{3x+4} + \sqrt{x-4} = 2\sqrt{x}$, $3x+4+x-4+2\sqrt{(3x+4)(x-4)} = 4x$,

$\sqrt{(3x+4)(x-4)} = 0$, $x_1 = -\frac{4}{3}$, $x_2 = 4$.

Проверка: $x_1 = -\frac{4}{3}$, $\sqrt{-4+4} + \sqrt{-\frac{4}{3}-4} = 2\sqrt{-\frac{4}{3}}$ — не имеет смысла,

$x_2 = 4$, $\sqrt{16} + 0 = 2\sqrt{4}$ — верно. Ответ: 4.

2) а) $\sqrt{4+x} \cdot \sqrt{5-x} = 2\sqrt{2}$, $(4+x)(5-x) = 8$, $20+x-x^2 = 8$, $x^2 - x - 12 = 0$,

$D = 49$, $x_1 = \frac{1+7}{2} = 4$, $x_2 = -3$. Проверка: $x_1 = 4$, $\sqrt{8} \cdot \sqrt{1} = 2\sqrt{2}$ — верно,

$x_2 = -3$, $\sqrt{1} \cdot \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ — верно. Ответ: -3; 4.

$$\text{б) } \sqrt{8+x} \cdot \sqrt{8-x} = x, \quad 64-x^2=x^2, \quad x^2=32, \quad x_{1,2}=\pm 4\sqrt{2}$$

Проверка: $x_1=4\sqrt{2}$, $\sqrt{8+4\sqrt{2}} \cdot \sqrt{8-4\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}$ — верно,

$$x_2=-4\sqrt{2}, \quad \sqrt{8-4\sqrt{2}} \cdot \sqrt{8+4\sqrt{2}} = -4\sqrt{2} \quad \text{— ложно.} \quad \text{Ответ: } 4\sqrt{2}$$

$$\text{3) а) } \sqrt{7-\sqrt{x+1}} = 2, \quad 7-\sqrt{x+1}=4, \quad \sqrt{x+1}=3, \quad x+1=9, \quad x=8.$$

Проверка: $\sqrt{7-3} = 2$ — верно.

Ответ: 8.

$$\text{б) } \sqrt{17+\sqrt{x}} = \sqrt{20-2\sqrt{x}}, \quad \text{пусть } \sqrt{x}=y, \quad y \geq 0, \quad \text{т.к. } E(\sqrt{x})=[0;+\infty). \quad \text{Тогда}$$

$$\sqrt{17+y} = \sqrt{20-2y}, \quad 17+y=20-2y, \quad 3y=3, \quad y=1, \quad \sqrt{x}=1, \quad x=1.$$

Проверка: $\sqrt{17+1} = \sqrt{20-2}$ — верно.

Ответ: 1.

С-24

$$\text{1. 1) а) } f(-x)=(-x)^6=x^6=f(x), \quad \text{значит, } f(x) \text{ — четная;}$$

$$\text{б) } f(-x)=(-x)^8-3(-x)^4=x^8-3x^4=f(x), \quad \text{значит, } f(x) \text{ — четная;}$$

$$\text{в) } f(-x)=|-x|=|x|=f(x), \quad \text{значит, } f(x) \text{ — четная;}$$

$$\text{2) а) } g(-x)=-4(-x)^4+(-x)^2=-4x^4+x^2=g(x), \quad \text{значит, } g(x) \text{ — четная;}$$

$$\text{б) } g(-x)=(-x+2)(-x-3)-x=x^2+x-6-x=x^2-6;$$

$$g(x)=(x+2)(x-3)+x=x^2-x-6+x=x^2-6; \quad g(-x)=g(x), \quad \text{значит, } g(x) \text{ — четная;}$$

$$\text{в) } g(-x)=\frac{1}{(-x)^4-(-x)^2-1}=\frac{1}{x^4-x^2-1}=g(x), \quad \text{значит, } g(x) \text{ — четная.}$$

$$\text{2. 1) а) } f(-x)=(-x)^7=-x^7=-f(x), \quad \text{значит, } f(x) \text{ — нечетная;}$$

$$\text{б) } f(-x)=\frac{12}{-x}=-f(x), \quad \text{значит, } f(x) \text{ — нечетная;}$$

$$\text{в) } f(-x)=(-x)^3+x=-(x^3-x)=-f(x), \quad \text{значит, } f(x) \text{ — нечетная;}$$

$$\text{2) а) } g(-x)=(-x)^9+\frac{1}{(-x)^5}=-(x^9+\frac{1}{x^5})=-f(x), \quad \text{значит, } f(x) \text{ — нечетная;}$$

$$\text{б) } g(-x)=(-x+2)^2-(-x-2)^2=(x-2)^2-(x+2)^2=-g(x), \quad \text{значит, } g(x) \text{ — нечетная;}$$

$$\text{в) } g(-x)=\frac{1}{(-x)^9-x}=-\frac{1}{x^9+x}=-g(x), \quad \text{значит, } g(x) \text{ — нечетная.}$$

$$\text{3. } f(-3)=13; \quad \text{а) } f(8)=f(-8)=13; \quad \text{б) } f(8)=-f(-8)=-13.$$

$$\text{4. 1) а) } y(-x)=\frac{8}{(-x)^4}=\frac{8}{x^4}=y(x), \quad \text{значит, } y \text{ — четная;}$$

$$\text{б) } y(-x)=-\frac{7}{(-x)^9}=\frac{7}{x^9}=-y(x), \quad \text{значит, } y \text{ — нечетная;}$$

$$\text{в) } y(-x)=\frac{1}{(-x)^3-1}=\frac{1}{-x^3-1} \neq \pm y(x), \quad \text{значит, } y \text{ — ни четная, ни нечетная;}$$

г) $y(-x) = \frac{1}{(-x)^4 + 1} = \frac{1}{x^4 + 1} = y(x)$, значит, y — четная;

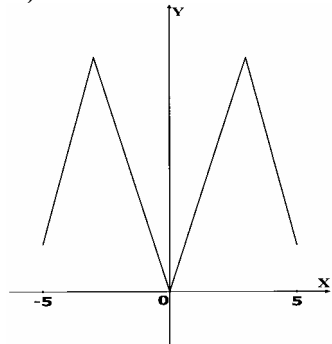
2) а) $y = \frac{x^4}{5x} = \frac{x^3}{5}$, $y(-x) = \frac{(-x)^3}{5} = \frac{-x^3}{5} = -y(x)$, значит, y — нечетная;

б) $y = \frac{7x}{x^5} = \frac{7}{x^4}$, $y(-x) = \frac{7}{(-x)^4} = \frac{7}{x^4} = y(x)$, значит, y — четная;

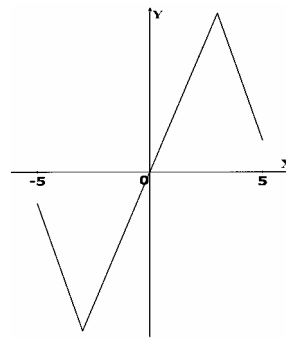
в) $y = \frac{x^3 - 2x^2}{3x - 6} = \frac{x^2(x - 2)}{3(x - 2)} = \frac{x^2}{3}$, $y(-x) = \frac{(-x)^2}{3} = \frac{x^2}{3} = y(x)$, значит, y — четная

г) $y = \frac{5x + 15}{x^2 + 3x} = \frac{5(x + 3)}{x(x + 3)} = \frac{5}{x}$, $y(-x) = \frac{5}{-x} = -\frac{5}{x} = -y(x)$, значит, y — нечетная.

5. а)

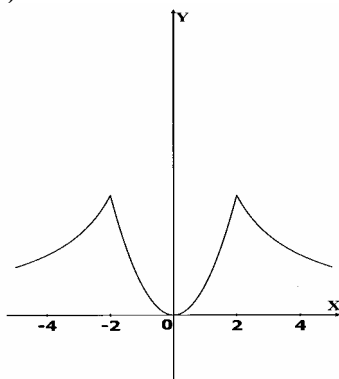


б)

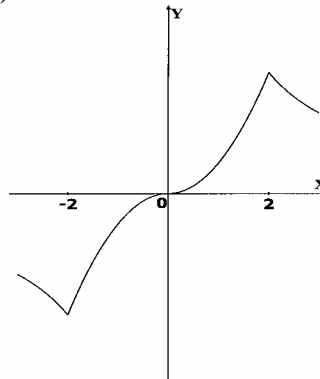


6. $g(x) = \begin{cases} 0,5x^2, & 0 \leq x \leq 2 \\ \frac{4}{x}, & x > 2 \end{cases}$

а)



б)

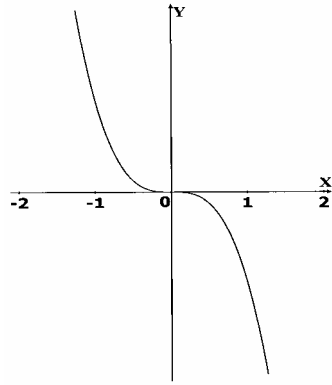


7. а) $f(-x) = |-x+5| + |-x-5| = |x-5| + |x+5| = f(x)$, значит, $f(x)$ — четная;
 б) $f(-x) = |-x+5| - |-x-5| = |x-5| - |x+5| = -f(x)$, значит, $f(x)$ — нечетная;
 в) $f(-x) = \frac{5(-x)^2}{(-x)^2 - 4} = \frac{5x^2}{x^2 - 4} = f(x)$, значит, $f(x)$ — четная;
 г) $f(-x) = \frac{6(-x)^3}{(-x)^2 - 9} = -\frac{6x^3}{x^2 - 9} = -f(x)$, значит, $f(x)$ — нечетная;
 д) $f(-x) = \frac{2(-x)^4}{(-x-2)^2} = \frac{2x^4}{(x+2)^2} \neq \pm f(x)$, значит, $f(x)$ — ни четная, ни нечетная;
 е) $f(-x) = \frac{(-x-1)(-x-2)(-x-3)}{(-x)^2 + 4x + 3} = \frac{-(x+1)(x+2)(x+3)}{(x+1)(x+3)} = -(x+2)$,
 $f(x) = \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(x-3)(x-1)} = x-2$, $f(-x) \neq \pm f(x)$, значит, $f(x)$ — ни четная, ни нечетная.

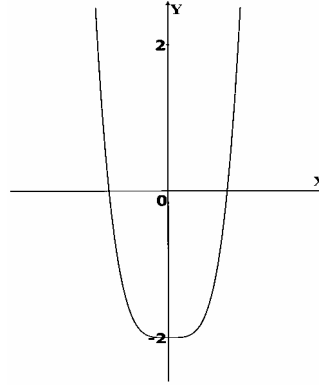
С-25

1. $f(x) = x^{100}$; **1 а)** $f(0,125) < f(0,13)$, т.к. $|0,125| < |0,13|$;
б) $f(-245) > f(-239)$, т.к. $|-245| > |-239|$; **в)** $f(-5,7) = f(5,7)$, т.к. $|-5,7| = |5,7|$;
г) $f(-12,4) > f(10,7)$, т.к. $|-12,4| > |10,7|$; **2 а)** $f\left(\frac{2}{3}\right) > f\left(\frac{3}{5}\right)$, т.к. $\left|\frac{2}{3}\right| > \left|\frac{3}{5}\right|$;
б) $f\left(-\frac{3}{7}\right) > f\left(-\frac{2}{5}\right)$, т.к. $\left|-\frac{3}{7}\right| > \left|-\frac{2}{5}\right|$; **в)** $f(-0,325) = f\left(\frac{13}{40}\right)$, т.к. $|-0,325| = \left|\frac{13}{40}\right|$;
г) $f\left(-\frac{4}{7}\right) > f(0,57)$, т.к. $\left|-\frac{4}{7}\right| > |0,57|$.
 2. $g(x) = x^{105}$; **1 а)** $g(1,023) < g(1,13)$, т.к. $1,023 < 1,13$;
б) $g(-2,7) < g(-2,2)$, т.к. $-2,7 < -2,2$; **в)** $g(-4,1) < g(4,1)$, т.к. $-4,1 < 4,1$;
г) $g(20,8) > g(-21,3)$, т.к. $20,8 > -21,3$; **2 а)** $g\left(\frac{4}{7}\right) < g\left(\frac{3}{5}\right)$, т.к. $\frac{4}{7} < \frac{3}{5}$;
б) $g\left(-\frac{8}{11}\right) < g(-0,7)$, т.к. $-\frac{8}{11} < -0,7$; **в)** $g\left(-\frac{5}{7}\right) < g\left(\frac{9}{13}\right)$, т.к. $-\frac{5}{7} < \frac{9}{13}$;
г) $g\left(-\frac{19}{25}\right) = -g(0,76)$, т.к. $-\frac{19}{25} = -0,76$.
 3. $x^n = 2500$; **а)** 2 корня; **б)** 1 корень.
 4. **а)** $x^3 = -27$, $x = -3$; **б)** $x^3 = \frac{8}{125}$, $x = \frac{2}{5}$;
в) $x^4 = -81$ нет корней, т.к. $E(x^4) = [0; +\infty)$;
г) $x^4 = 625$; $x = \pm 5$.

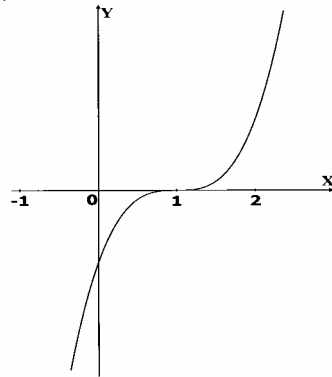
5. а)



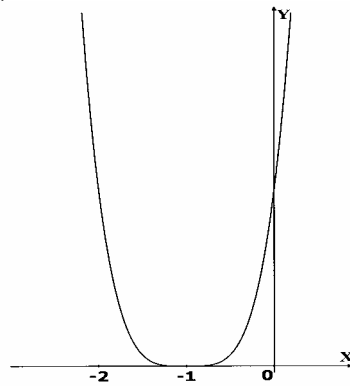
б)



в)



г)



6. а) $x^4=32x+5$ два корня; б) $x^4=0,5x-8$ нет корней; в) $x^3=32x+5$ три корня; г) $x^3=0,5x-8$ один корень.

7. а) $y=x^9$; $548,471=(-2,1)^9$ — ложно, значит, точка A не принадлежит графику; $-10,8973=(-0,973)^9$ — ложно, значит, точка B не принадлежит графику; б) $y=x^8$; $0,98746=1,2^8$ — ложно, значит, точка C не принадлежит графику; $250,4781=(-2,01)^8$ — ложно, значит, точка D не принадлежит графику.

С-26

1. 1) а) $\sqrt{0,16} = 0,4$; б) $\sqrt[3]{216} = 6$; в) $\sqrt[4]{0,0001} = 0,1$; г) $\sqrt[5]{-\frac{1}{32}} = -\frac{1}{2}$;

2) а) $6\sqrt[3]{0,125} = 6 \cdot 0,5 = 3$; б) $0,7\sqrt[4]{81} = 0,7 \cdot 3 = 2,1$;

в) $4\sqrt[3]{\frac{3}{8}} = 4 \cdot \frac{3}{2} = 6$; **г)** $6\sqrt[3]{-2\frac{10}{27}} = 6 \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) = -8$.

2. 1) а) $4\sqrt{\frac{16}{81}} + 3\sqrt{-\frac{1}{8}} = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$; **б)** $\sqrt[5]{0,00032} + \sqrt[3]{-0,008} = 0,2 - 0,2 = 0$;

в) $1,5\sqrt[6]{\frac{1}{64}} - 4\sqrt[4]{\frac{81}{625}} = 1,5 \cdot \frac{1}{2} - \frac{3}{5} = \frac{3}{4} - \frac{3}{5} = \frac{3}{20}$;

2) а) $7\sqrt{\frac{128}{2187}} - 4\sqrt[4]{\frac{81}{625}} = \frac{2}{3} - \frac{3}{5} = \frac{1}{15}$; **б)** $\sqrt[3]{0,216} - \sqrt[5]{-0,01024} = 0,6 + 0,4 = 1$;

в) $\sqrt[5]{7\frac{19}{32}} + \sqrt{12,25} = \frac{3}{5} + 3,5 = 0,6 + 3,5 = 4,1$.

3. а) $2 = \sqrt{4} < \sqrt{5} < \sqrt{9} = 3$; **б)** $2 = \sqrt[3]{8} < \sqrt[3]{23} < \sqrt[3]{27} = 3$; **в)** $0 < \sqrt[4]{0,8} < 1$;

г) $1 < \sqrt[5]{30} < \sqrt[5]{32} = 2$.

4. 1) а) $(\sqrt{13})^2 = 13$; **б)** $(\sqrt[3]{7})^3 = 7$; **в)** $(-4\sqrt{21})^4 = 21$; **г)** $-4\sqrt{21^4} = -21$;

д) $(-\sqrt[5]{2})^5 = -2$;

2) а) $(2\sqrt[3]{3})^3 = 8 \cdot 3 = 24$; **б)** $(-3\sqrt[4]{5})^4 = 81 \cdot 5 = 405$; **в)** $(-\sqrt[5]{14})^5 = -14$;

г) $-2\sqrt[5]{7^5} = -14$; **д)** $(-\sqrt[6]{5})^6 = 5$.

5. а) $x^3=5, x=\sqrt[3]{5}$; **б)** $x^6=17, x_{1,2}=\pm\sqrt[6]{17}$; **в)** $\frac{1}{8}x^2-2=0, x^4=16, x_{1,2}=\pm 2$;

г) $\frac{1}{2}x^5+16=0, x^5=-32, x=-2$.

6. а) $10\sqrt{y-3}, y-3 \geq 0, y \geq 3$; **б)** $\sqrt[3]{x+5}, x$ -любое; **в)** $\sqrt[6]{a(a-8)}, a(a-8) \geq 0$;

$a \in (-\infty; 0] \cup [8; +\infty)$;

г) $\sqrt[8]{b^2+b-12}, b^2+b-12 \geq 0$,

$D=1+4 \cdot 12=49$,

$b_1 = \frac{-1+7}{2} = 3, b_2 = -4$;

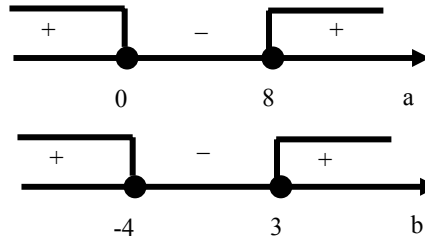
$b \in (-\infty; -4] \cup [3; +\infty)$.

7. а) $x^{10}-31x^5-32=0, x^5=y$, тогда $y^2-31y-32=0, D=961+4 \cdot 32=1089$,

$y_1 = \frac{31+33}{2} = 32, y_2 = -1, x^5=32, x=2, x^5=-1, x=-1$. Ответ: $-1; 2$.

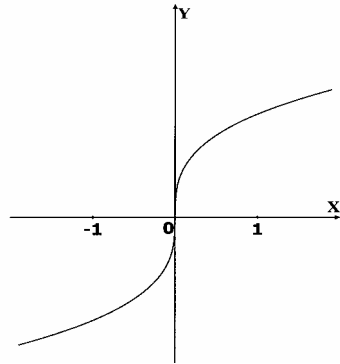
б) $x^8-82x^4+81=0, x^4=y$, тогда $y^2-82y+81=0, D=6724-4 \cdot 81=6400$,

$y_1 = \frac{82+80}{2} = 81, y_2 = 1, x^4=81, x_{1,2}=\pm 3, x^4=1, x_{3,4}=\pm 1$. Ответ: $\pm 3; \pm 1$.

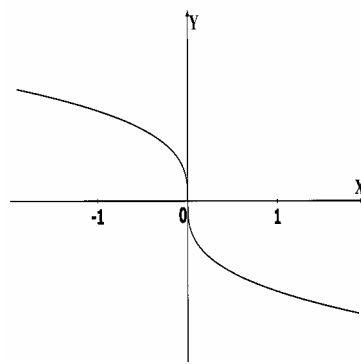


в) $x^4+2x^2-15=0$ $x^2=y$, тогда $y^2+2y-15=0$, $D=4+4 \cdot 15=64$,
 $y_1=\frac{-2+8}{2}=3$, $y_2=-5$, $x^2=3$, $x_{1,2}=\pm\sqrt{3}$, $x^2=-5$ – нет корней. Ответ: $\pm\sqrt{3}$.

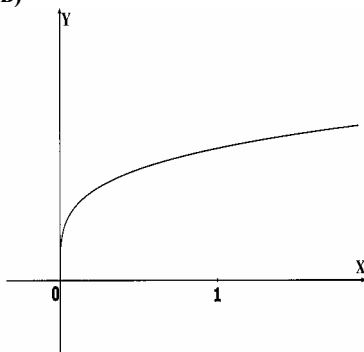
8. а)



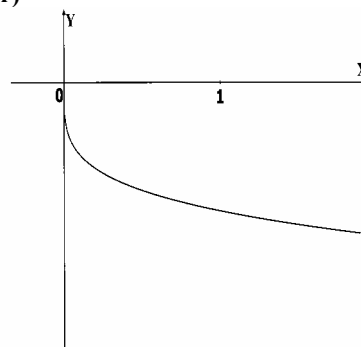
б)



в)



г)



C-27

1. а) $\sqrt[4]{16 \cdot 81} = 2 \cdot 3 = 6$; б) $\sqrt[3]{2^6 \cdot 5^3} = 2^2 \cdot 5 = 20$; в) $\sqrt[5]{0,00032 \cdot 5^{10}} = 0,2 \cdot 5^2 = 5$;
 г) $\sqrt[6]{\frac{3^6}{5^{12}}} = \frac{3}{5^2} = \frac{3}{25}$; д) $\sqrt[4]{\frac{7^8}{0,0625}} = \frac{7^2}{0,5} = 98$; е) $\sqrt[7]{\frac{2^7 \cdot 3^{21}}{5^{14}}} = \frac{2 \cdot 3^3}{5^2} = \frac{54}{25}$.
 2. а) $\sqrt[5]{4 \cdot \sqrt[5]{8}} = \sqrt[5]{4 \cdot 8} = \sqrt[5]{2^5} = 2$; б) $\sqrt[4]{27 \cdot \sqrt[4]{3}} = \sqrt[4]{27 \cdot 3} = \sqrt[4]{3^4} = 3$;
 в) $\sqrt[3]{50 \cdot \sqrt[3]{20}} = \sqrt[3]{50 \cdot 20} = \sqrt[3]{1000} = 10$; г) $\frac{\sqrt[4]{81}}{\sqrt[4]{625}} = \frac{3}{5}$;

д) $\sqrt[5]{9^5 \cdot 2^3} \cdot \sqrt[5]{2^7} = 9 \cdot \sqrt[5]{2^3 \cdot 2^7} = 9 \cdot \sqrt[5]{2^{10}} = 9 \cdot 2^2 = 36$;
 е) $\sqrt[8]{3^{13}} \cdot \sqrt[8]{5^8 \cdot 3^3} = 5 \cdot \sqrt[8]{3^{13} \cdot 3^3} = 5 \cdot \sqrt[8]{3^{16}} = 5 \cdot 3^2 = 45$.

3. а) $\sqrt{36x^2} = 6x$; б) $\sqrt[3]{27y^6} = 3y^2$; в) $\sqrt[5]{32x^5y^{15}} = 2xy^3$; г) $\sqrt[4]{\frac{16x^8y^4}{625}} = \frac{2x^2y}{5}$.

4. а) $\sqrt{16a} = 4\sqrt{a}$; б) $\sqrt{50b^3} = 5b\sqrt{2b}$; в) $\sqrt[3]{40 \cdot c^5} = \sqrt[3]{8 \cdot 5 \cdot c^3 \cdot c^2} = 2c\sqrt[3]{5c^2}$;
 г) $\sqrt[4]{243x^7} = \sqrt[4]{81 \cdot 3x^4 \cdot x^3} = 3x\sqrt[4]{3x^3}$.

5. а) $4\sqrt{3x} = \sqrt{16 \cdot 3x} = \sqrt{48x}$; б) $2\sqrt[3]{2y} = \sqrt[3]{8 \cdot 2y} = \sqrt[3]{16y}$;
 в) $a\sqrt[4]{3} = \sqrt[4]{3a^4}$; г) $b\sqrt[5]{4b^2} = \sqrt[5]{b^5 \cdot 4b^2} = \sqrt[5]{4b^7}$.

6. а) $\sqrt{4-\sqrt{7}} \cdot \sqrt{4+\sqrt{7}} = \sqrt{(4-\sqrt{7})(4+\sqrt{7})} = \sqrt{16-7} = 3$;
 б) $\sqrt[3]{7-\sqrt{22}} \cdot \sqrt[3]{7+\sqrt{22}} = \sqrt[3]{(7-\sqrt{22})(7+\sqrt{22})} = \sqrt[3]{49-22} = 3$;
 в) $\sqrt[4]{\sqrt{629}-2} \cdot \sqrt[4]{\sqrt{629}+2} = \sqrt[4]{(\sqrt{629}-2)(\sqrt{629}+2)} = \sqrt[4]{629-4} = 5$.

7. а) $\sqrt{a^2b} = a\sqrt{b}$ — верно при $a, b \geq 0$;
 б) $\sqrt{a^2b} = -a\sqrt{b}$ — верно при $a \leq 0, b \geq 0$;
 в) $\sqrt{a^3b^3} = ab\sqrt{ab}$ — верно при $ab \geq 0$, т.е. при $a, b \geq 0$ или $a, b \leq 0$.

8. а) $\sqrt{8xy^2} = -2y\sqrt{2x}$; б) $\sqrt[4]{-81a^5} = \sqrt[4]{-3^4 \cdot a^4 \cdot a} = -3a\sqrt[4]{-a}$;
 в) $\sqrt[6]{a^7b^7} = \sqrt[6]{a^6 \cdot b^6 ab} = |a||b|\sqrt[6]{ab} = ab\sqrt[6]{ab}$.

9. а) $x\sqrt[3]{\frac{2}{x^2}} = \sqrt[3]{\frac{2x^2}{x^2}} = \sqrt[3]{2x}$; б) $ax\sqrt{\frac{7}{ax}} = \sqrt{\frac{7a^2x^2}{ax}} = \sqrt{7ax}$;
 в) $by^4\sqrt{\frac{3}{b^2y^3}} = \sqrt[4]{\frac{3b^4y^4}{b^2y^3}} = \sqrt[4]{3b^2y}$.

10. $8b\sqrt[5]{3b^{-4}} - 3\sqrt[5]{96b} - b^2\sqrt[5]{3b^{-9}} = 8\sqrt[5]{3b^5 \cdot b^{-4}} - 3\sqrt[5]{32 \cdot 3b} - \sqrt[5]{b^{10} \cdot 3b^{-9}} =$
 $= 8\sqrt[5]{3b} - 3 \cdot 2\sqrt[5]{3b} - \sqrt[5]{3b} = \sqrt[5]{3b}$.

C-28

1. а) $\sqrt{\frac{3}{16}} = \frac{\sqrt{3}}{4}$; б) $\sqrt[3]{\frac{4}{125}} = \frac{\sqrt[3]{4}}{5}$; в) $\sqrt[7]{\frac{1}{a^4}} = \frac{1}{a}$; г) $\sqrt[5]{\frac{8}{b^{15}}} = \frac{\sqrt[5]{8}}{b^3}$.

2. а) $\frac{5}{\sqrt{10}} = \frac{5}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{5} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{10}$; б) $\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{2}{3}\sqrt{3}$;

$$\text{в) } \frac{7}{\sqrt[3]{4}} = \frac{7 \cdot \sqrt[3]{4^2}}{\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{4^2}} = \frac{7}{4} \cdot \sqrt[3]{16}; \text{ г) } \frac{4}{\sqrt[4]{125}} = \frac{4 \cdot \sqrt[4]{125^3}}{\sqrt[4]{125} \cdot \sqrt[4]{125^3}} = \frac{4}{125} \cdot \sqrt[4]{1953125};$$

$$\text{д) } \frac{6}{\sqrt[5]{16}} = \frac{6 \cdot \sqrt[5]{16^4}}{\sqrt[5]{16} \cdot \sqrt[5]{16^4}} = \frac{6 \sqrt[5]{65536}}{16} = \frac{3}{8} \sqrt[5]{65536}.$$

$$\text{3. а) } \sqrt[3]{5} = \sqrt[6]{5}; \text{ б) } \sqrt[4]{2} = \sqrt[8]{2}; \text{ в) } \sqrt[10]{6^5} = \sqrt{6}; \text{ г) } \sqrt[7]{\sqrt[3]{81}} = \sqrt[3]{\sqrt[4]{81}} = \sqrt[3]{3};$$

$$\text{д) } \sqrt[6]{c^3} = \sqrt{c}; \text{ е) } \sqrt{a\sqrt{a}} = \sqrt{\sqrt{a^3}} = \sqrt[4]{a^3}; \text{ ж) } \sqrt[3]{b\sqrt[4]{b}} = \sqrt[3]{\sqrt[4]{b^5}} = \sqrt[12]{b^5};$$

$$\text{з) } \sqrt[9]{x^2 \sqrt[4]{x}} = \sqrt[9]{\sqrt[4]{x^8} \cdot x} = \sqrt[9]{\sqrt{x^9}} = \sqrt{x}.$$

$$\text{4. а) } \sqrt[3]{4} > \sqrt[6]{15}, \sqrt[6]{4^2} > \sqrt[6]{15}, \sqrt[6]{16} > \sqrt[6]{15}; \text{ б) } \sqrt[5]{3} > \sqrt[15]{26}, \sqrt[15]{3^3} > \sqrt[15]{26}, \\ \sqrt[15]{27} > \sqrt[15]{26}; \text{ в) } \sqrt[6]{4} = \sqrt[9]{8}, \sqrt[18]{4^3} = \sqrt[18]{8^2}, \sqrt[18]{64} = \sqrt[18]{64}; \text{ г) } \sqrt[4]{3} < \sqrt[6]{2\sqrt{7}}, \\ \sqrt[12]{3^3} < \sqrt[12]{(2\sqrt{7})^2}, \sqrt[12]{27} < \sqrt[12]{28}.$$

$$\text{5. } \sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[4]{4}, \sqrt[6]{2^3}, \sqrt[6]{3^2}, \sqrt[6]{4}, \sqrt[6]{8}, \sqrt[6]{9}, \sqrt[6]{4} \text{ значит, } \sqrt[6]{4} < \sqrt{2} < \sqrt[3]{3}.$$

$$\text{6. а) } \frac{\sqrt{a} + \sqrt[4]{ab}}{\sqrt[4]{ab} + \sqrt{b}} = \frac{\sqrt[4]{a}(\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b})}{\sqrt[4]{b}(\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b})} = \frac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt[4]{b}}; \text{ б) } \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{\sqrt[3]{x} + \sqrt[6]{xy} + \sqrt[3]{y}} = \frac{(\sqrt[6]{x})^3 - (\sqrt[6]{y})^3}{\sqrt[3]{x} + \sqrt[6]{xy} + \sqrt[3]{y}} = \\ = \frac{(\sqrt[6]{x} - \sqrt[6]{y}) \cdot (\sqrt[3]{x} + \sqrt[6]{xy} + \sqrt[3]{y})}{\sqrt[3]{x} + \sqrt[6]{xy} + \sqrt[3]{y}} = \sqrt[6]{x} - \sqrt[6]{y};$$

$$\text{в) } \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt[4]{xy}} + \frac{1}{\sqrt[4]{xy} + \sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y})} + \frac{1}{\sqrt[4]{y}(\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y})} = \\ = \frac{\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y}}{\sqrt[4]{xy}(\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y})} = \frac{1}{\sqrt[4]{xy}}.$$

$$\text{7. а) } \sqrt{x} - 5\sqrt[4]{x} = 0, \sqrt[4]{x}(\sqrt[4]{x} - 5) = 0, \sqrt[4]{x} = 0, x=0, \sqrt[4]{x} - 5 = 0, \sqrt[4]{x} = 5 \\ x=625; \text{ б) } \sqrt[3]{x} + 2\sqrt[6]{x} = 0, \sqrt[6]{x}(\sqrt[6]{x} + 2) = 0, \sqrt[6]{x} = 0, \sqrt[6]{x} = -2 \text{ — нет} \\ \text{корней. } x=0.$$

$$\text{в) } \sqrt{x} - 5\sqrt[4]{x} + 6 = 0; \sqrt[4]{x} = y, \text{ тогда } y^2 - 5y + 6 = 0; D=1, y_1 = \frac{5+1}{2} = 3, y_2 = 2;$$

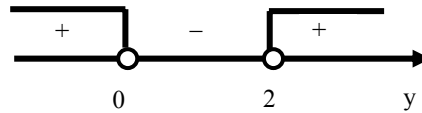
$$\sqrt[4]{x} = 3, x_1 = 81, \sqrt[4]{x} = 2, x_2 = 16;$$

$$\text{г) } \sqrt[5]{x} + 3\sqrt[10]{x} - 10 = 0, \sqrt[10]{x} = y, \text{ тогда } y^2 + 3y - 10 = 0, D=49, y_1 = \frac{-3+7}{2} = 2,$$

$$y_2 = -5, \sqrt[10]{x} = 2, x = 2^{10} = 1024, \sqrt[10]{x} = -5 \text{ — нет корней. Ответ: } 1024.$$

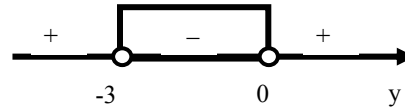
$$\text{8. а) } x - 2\sqrt{x} > 0, \sqrt{x} = y, y^2 - 2y > 0, y(y-2) > 0, y < 0, y > 2,$$

$\sqrt{x} < 0$ — нет решений,
 $\sqrt{x} > 2, x > 4$.



Ответ: $(4; +\infty)$.

б) $x + 3\sqrt{x} < 0, \sqrt{x} = y, y^2 + 3y < 0, y(y+3) < 0,$
 $-3 < y < 0, -3 < \sqrt{x} < 0,$



нет решений.

Ответ: нет решений.

в) $\sqrt{x} - 3\sqrt[4]{x} + 2 \geq 0, \sqrt[4]{x} = y, y^2 - 3y + 2 \geq 0,$

$D=1, y_1 = \frac{3+1}{2} = 2, y_2 = 1,$

$\sqrt[4]{x} \leq 1, 0 \leq x \leq 1,$

$\sqrt[4]{x} \geq 2, x \geq 16.$

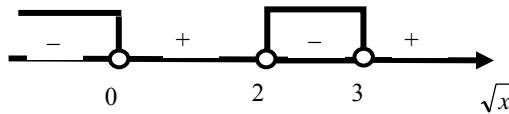
Ответ: $[0; 1] \cup [16; +\infty)$.

г) $\sqrt{x}(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} - 3) < 0,$

$\sqrt{x} < 0$ — нет решений,

$2 < \sqrt{x} < 3, 4 < x < 9.$

Ответ: $(4; 9)$.



C-29

1. а) $7^{-3} = \frac{1}{7^3} = \frac{1}{343}$; б) $3^{-1} = \frac{1}{3}$; в) $a^{-2} = \frac{1}{a^2}$; г) $2b^{-1}c = \frac{2c}{b}$;

д) $10^{-4} = \frac{1}{10^4} = \frac{1}{10000}$.

2. 1) а) $\frac{1}{3^7} = 3^{-7}$; б) $\frac{1}{x^2} = x^{-2}$; в) $\frac{1}{2} = 2^{-1}$; г) $\frac{1}{100} = 10^{-2}$;

д) $0,000001 = \frac{1}{1000000} = \frac{1}{10^6} = 10^{-6}$;

2) а) $\left(\frac{1}{12}\right)^3 = \frac{1}{12^3} = 12^{-3}$; б) $\frac{1}{a^5 b^5} = \frac{1}{(ab)^5} = (ab)^{-5}$;

в) $\frac{1}{(x-y)(x+y)} = ((x-y)(x+y))^{-1}$; г) $\frac{1}{(x+y)(x+y)} = \frac{1}{(x+y)^2} = (x+y)^{-2}$.

3. а) $\left(\frac{4}{7}\right)^{-5} = \left(\frac{7}{4}\right)^5 > 1$; б) $0,127^0 = 1$; в) $10^{-10} = \frac{1}{10^{10}} < 1$;

г) $\left(2\frac{3}{4}\right)^{-2} = \left(\frac{11}{4}\right)^{-2} = \left(\frac{4}{11}\right)^2 < 1$.

$$4. \text{ 1) a) } 5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}; \text{ б) } (-2)^{-4} = \frac{1}{(-2)^4} = \frac{1}{16}; \text{ в) } 1^{-7} = \frac{1}{1^7} = 1;$$

$$\text{г) } (-5,3)^0 = 1; \text{ д) } -13,1^0 = -1;$$

$$2) \text{ а) } (-0,2)^{-3} = \frac{1}{(-0,2)^3} = -\frac{1}{0,008}; \text{ б) } \left(-\frac{1}{2}\right)^{-4} = (-2)^4 = 16;$$

$$\text{в) } \left(\frac{4}{7}\right)^{-1} = \frac{7}{4}; \text{ г) } \left(3\frac{1}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{10}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{10}\right)^2 = 0,3^2 = 0,09;$$

$$3) \text{ а) } 3^4 \cdot 3^{-13} \cdot 3^{-5} \cdot 3^{11} = 3^{4-13-5+11} = 3^{-3} = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27}; \text{ б) } 8^{-6} : 8^{-7} = 8^{-6+7} = 8;$$

$$\text{в) } (0,1)^2 : (0,1)^{-2} = 0,1^{2+2} = 0,1^4 = 0,0001;$$

$$\text{г) } \left(\frac{2}{3}\right)^{-7} : \left(\frac{2}{3}\right)^{-5} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-7+5} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}.$$

$$4) \text{ а) } 2^{-1} + (-3)^{-3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{(-3)^3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{27} = \frac{25}{54};$$

$$\text{б) } \left(\frac{2}{3}\right)^{-3} - 4^{-2} = \left(\frac{3}{2}\right)^3 - \frac{1}{4^2} = \frac{27}{8} - \frac{1}{16} = \frac{53}{16};$$

$$\text{в) } (-0,1)^{-4} + (-0,2)^{-4} = \frac{1}{(-0,1)^4} + \frac{1}{(-0,2)^4} = \frac{1}{0,0001} + \frac{1}{0,0016} = 10000 + 625 = 10625;$$

$$\text{г) } (0,2)^{-2} + (0,5)^{-2} = \left(\frac{1}{5}\right)^{-2} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 5^2 + 2^2 = 25 + 4 = 29;$$

$$5) \text{ а) } \left(\frac{1}{4}\right)^{-2} - 4^{-3} : 4^{-5} = 4^2 - 4^{-3+5} = 4^2 - 4^2 = 0;$$

$$\text{б) } 2^{-2} : 2^{-4} - \left(\frac{1}{2}\right)^{-4} = 2^{-2+4} - 2^4 = 2^2 - 2^4 = 4 - 16 = -12;$$

$$\text{в) } 2,7 \cdot 10^{-4} \cdot 2 \cdot 10^4 = 2,7 \cdot 2 \cdot 10^{-4+4} = 5,4 \cdot 10^0 = 5,4.$$

$$5. \text{ а) } (a^{-1} + a^{-2})^2 - \frac{2}{a^3} = \left(a + \frac{1}{a^2}\right)^2 - \frac{2}{a^3} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^4} + \frac{2}{a^3} - \frac{2}{a^3} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^4};$$

$$\text{б) } (x^{-2} - x^{-1})^3 = \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}\right)^3 = \left(\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x} - 1\right)\right)^3 = \frac{1}{x^3} \cdot \frac{(1-x)^3}{x^3} = \frac{(1-x)^3}{x^6};$$

$$\text{в) } (a^{-2} - b^{-2}) : (a^{-2} + b^{-2}) = \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right) : \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) = \frac{b^2 - a^2}{a^2 b^2} : \frac{b^2 + a^2}{a^2 b^2} = \frac{b^2 - a^2}{a^2 b^2} \cdot \frac{a^2 b^2}{b^2 + a^2} = \frac{b^2 - a^2}{b^2 + a^2}.$$

C-30

1. a) $(x-y)^{-3} = \frac{1}{(x-y)^3}$; **б)** $2(bc)^{-1} = \frac{2}{bc}$; **в)** $a-a^{-1} = a - \frac{1}{a} = \frac{a^2-1}{a}$;

г) $a^{-2}-a^{-1} = \frac{1}{a^2} - \frac{1}{a} = \frac{1-a}{a^2}$; **д)** $a^{-3}-b^{-3} = \frac{1}{a^3} - \frac{1}{b^3} = \frac{b^3-a^3}{a^3b^3}$.

2. a) $(a^2)^{-2} = a^{2 \cdot (-2)} = a^{-4}$; **б)** $(cb^{-2})^{-2} = c^{-2} \cdot b^4$; **в)** $(2c^{-3})^3 = 8c^{-9}$; **г)** $\left(\frac{a^3}{b^2}\right)^{-1} = \frac{b^2}{a^3}$;

д) $\left(\frac{2x^{-4}}{y^3}\right)^{-2} = \left(\frac{y^3}{2x^{-4}}\right)^2 = \left(\frac{x^4y^3}{2}\right)^2 = \frac{x^8y^6}{4}$.

3. a) $16^{-2} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{-6} = (4^2)^{-5} \cdot 4^6 = 4^{-4} \cdot 4^6 = 4^2 = 16$;

б) $9^{-2} \cdot 27^2 = (3^2)^{-2} \cdot (3^3)^2 = 3^{-4} \cdot 3^6 = 3^2 = 9$;

в) $15^{-3} : 5^{-4} = (3 \cdot 5)^{-3} : 5^{-4} = 3^{-3} \cdot 5^{-3} : 5^{-4} = 3^{-3} \cdot 5 = \frac{5}{27}$;

г) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-7} : \left(\frac{3}{2}\right)^{10} = \left(\frac{3}{2}\right)^7 : \left(\frac{3}{2}\right)^{10} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-3} = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$;

д) $\frac{3^{-2} \cdot 9^3}{27} = \frac{3^{-2} \cdot (3^2)^3}{3^3} = \frac{3^{-2} \cdot 3^6}{3^3} = \frac{3^4}{3^3} = 3$.

4. a) $(a^2-b^2)a^2b^2 = \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right)a^2b^2 = \frac{b^2-a^2}{a^2b^2} \cdot a^2b^2 = b^2 - a^2$;

б) $(x+y)^2 \cdot (x+y)^{-1} = x+y$; **в)** $a^8(a^{-2}-a^{-4})(a^4+a^5)^{-1} = \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{a^4}\right) \cdot \frac{1}{a^4+a^5} =$

$= a^8 \cdot \frac{a^2-1}{a^4} \cdot \frac{1}{a^4+a^5} = a^4 \cdot \frac{(a-1)(a+1)}{a^4(1+a)} = a-1$.

5. $(9x^{-3}-x^{-3}y^2) \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^{-3} = x^{-3}(9-y^2) \cdot \frac{1}{x^{-3}} = 9-y^2 = 9-5^2 = 9-25 = -16$.

6. 1) a) $10000^3 = (10^4)^3 = 10^{12}$; **б)** $0,002^2 = (2 \cdot 10^{-3})^2 = 4 \cdot 10^{-6}$;

в) $2000^{-2} = (2 \cdot 10^3)^{-2} = \frac{1}{4} \cdot 10^{-6} = 0,25 \cdot 10^{-6} = 2,5 \cdot 10^{-1} \cdot 10^{-6} = 25 \cdot 10^{-7}$;

г) $0,001^{-3} = (10^{-3})^{-3} = 10^9$.

2) a) $0,000021 = 2,1 \cdot 10^{-5}$; **б)** $0,0000002081 = 2,081 \cdot 10^{-7}$;

в) $\frac{1}{64} = 0,015625 = 1,5625 \cdot 10^{-2}$; **г)** $\frac{1}{256} = 0,00390625 = 3,90625 \cdot 10^{-3}$.

$$7. \text{ a) } (3x^{-2}-2)(2+3x^{-2}) = \left(\frac{3}{x^2}-2\right)\left(\frac{3}{x^2}+2\right) = \left(\frac{3}{x^2}\right)^2 - 2^2 = \frac{9}{x^4} - 4;$$

$$\text{б) } (a^{-1}-3)(a^{-2}+(\frac{1}{3}a^{-1}+9)) = (a^{-1}-3)((a^{-1})^2+3 \cdot a^{-1}+3^2) = (a^{-1})^3 - 3^3 = a^{-3} - 27;$$

$$\text{в) } (a^{-1}+b^{-1})(a^{-2}-(ab)^{-1}+b^{-2}) = (a^{-1}+b^{-1})((a^{-1})^2 - a^{-1}b^{-1} + (b^{-1})^2) = (a^{-1})^3 + (b^{-1})^3 = \\ = a^{-3} + b^{-3} = \frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} = \frac{a^3 + b^3}{a^3 b^3}.$$

C-31

$$1. \text{ 1) a) } 5^{1/2} = \sqrt{5}; \quad 3^{2/3} = \sqrt[3]{3^2} = \sqrt[3]{9}; \quad 10^{-1/4} = \sqrt[4]{10^{-1}} = \sqrt[4]{0,1};$$

$$17^{-1/5} = \sqrt[5]{17^{-1}} = \sqrt[5]{0,1}; \quad \text{б) } x^{0,5} = x^{1/2} = \sqrt{x}; \quad y^{1,5} = y^{3/2} = \sqrt{y^3};$$

$$b^{-0,5} = b^{-1/2} = \sqrt{b^{-1}};$$

$$2) \text{ a) } 5x^{1/4} = 5\sqrt[4]{x}; \quad -3y^{2/3} = -3\sqrt[3]{y^2}; \quad (2a)^{0,5} = (2a)^{1/2} = \sqrt{2a};$$

$$(3b)^{-1,5} = (3b)^{-3/2} = \sqrt{(3b)^{-3}}; \quad \text{б) } (a-b)^{3/5} = \sqrt[5]{(a-b)^3};$$

$$a^{3/4} - b^{3/4} = \sqrt[4]{a^3} - \sqrt[4]{b^3}; \quad ax^{1,5} + b^{1,5} = ax^{3/2} + b^{3/2} = a\sqrt{x^3} + \sqrt{b^3}.$$

$$2. \text{ 1) a) } \sqrt{3} = 3^{1/2}; \quad \sqrt[3]{5} = 5^{1/3}; \quad \sqrt[4]{2} = 2^{1/4}; \quad \sqrt[5]{9^2} = 9^{2/5};$$

$$\text{б) } \sqrt[3]{a^2} = a^{2/3}; \quad \sqrt[10]{b^3} = b^{3/10} = b^{0,3}; \quad \sqrt[8]{2x} = (2x)^{1/8};$$

$$\sqrt[6]{8x^3} = (8x^3)^{1/6} = ((2x)^3)^{1/6} = (2x)^{1/2};$$

$$2) \text{ a) } \sqrt[4]{3^{-1}} = 3^{-1/4}; \quad \sqrt[7]{27} = \sqrt[7]{3^3} = 3^{3/7}; \quad \sqrt[15]{8^2} = 8^{2/15} = (2^3)^{2/15} = 2^{2/5};$$

$$\sqrt[20]{25^3} = 25^{3/20} = (5^2)^{3/20} = 5^{0,3}; \quad \text{б) } \sqrt[4]{x^{-3}} = x^{-3/4}; \quad \sqrt[5]{(a+b)^2} = (a+b)^{2/5};$$

$$\sqrt[5]{a^2 + b^2} = (a^2 + b^2)^{1/5}.$$

$$3. \text{ a) } 9^{1/2} = (3^2)^{1/2} = 3; \quad \text{б) } 36^{-1/2} = \frac{1}{36^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{36}} = \frac{1}{6};$$

$$\text{в) } 2 \cdot 125^{-1/3} = 2 \cdot \frac{1}{125^{1/3}} = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{125}} = \frac{2}{5};$$

$$\text{г) } -4 \cdot 0,01^{-3/2} = -4 \cdot \left(\frac{1}{100}\right)^{-3/2} = -4 \cdot 100^{3/2} = -4 \cdot (10^2)^{3/2} = -4 \cdot 10^3 = -4000;$$

$$2) \text{ a) } 0,125^{-1/3} = (0,5^3)^{-1/3} = 0,5^{-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2; \quad \text{б) } 0,00032^{0,4} = (0,2^5)^{0,4} = 0,2^2 = 0,04;$$

$$\text{в)} \left(3\frac{3}{8}\right)^{-2/3} = \left(\frac{27}{8}\right)^{-2/3} = \left(\left(\frac{3}{2}\right)^3\right)^{-2/3} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-2} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9};$$

$$\text{г)} \left(2\frac{10}{27}\right)^{-1/6} = \left(\frac{64}{27}\right)^{-1/6} = \left(\frac{27}{64}\right)^{1/6} = \left(\left(\frac{3}{4}\right)^3\right)^{1/6} = \left(\frac{3}{4}\right)^{1/2} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$4. \text{ а)} 0 \leq x \leq 0,00032; 0 \leq x^{0,4} \leq (0,00032)^{0,4}; 0 \leq x^{0,4} \leq 0,04;$$

$$\text{б)} 1 \leq x \leq 243; 1 \leq x^{0,4} \leq 243^{0,4}; 243^{0,4} = (3^5)^{2/5} = 9; 1 \leq x^{0,4} \leq 9;$$

$$\text{в)} 0,00001 \leq x \leq 1; (0,00001)^{0,4} \leq x^{0,4} \leq 1; 0,00001^{0,4} = (10^{-5})^{2/5} = 10^{-2} = 0,01;$$

$$0,01 \leq x^{0,4} \leq 1; \text{ г)} 243 \leq x \leq 1024; 243^{0,4} \leq x^{0,4} \leq 1024^{0,4};$$

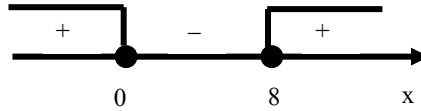
$$1024^{0,4} = (2^{10})^{2/5} = 2^4 = 16; 9 \leq x^{0,4} \leq 16.$$

$$5. \text{ а)} y = x^{2/3} = \sqrt[3]{x^2}, D(y) = \mathbb{R}; \text{ б)} y = x^{-0,6} = x^{-3/5} = \frac{1}{x^{3/5}} = \frac{1}{\sqrt[5]{x^3}},$$

$$D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty); \text{ в)} y = (x-8)^{-0,9} = \frac{1}{(x-8)^{0,9}} = \frac{1}{\sqrt[10]{(x-8)^9}},$$

$$(x-8)^9 > 0, x-8 > 0, x > 8, \text{ значит, } D(y) = (8; +\infty); \text{ г)} y = (x^2 - 8x)^{1/4} = \sqrt[4]{x^2 - 8x},$$

$$x^2 - 8x \geq 0, x(x-8) \geq 0.$$



$$D(y) = (-\infty; 0] \cup [8; +\infty).$$

$$6. \text{ а)} x^{1/2} = 3, \sqrt{x} = 3, x = 9; \text{ б)} x^{1/5} = 2, \sqrt[5]{x} = 2, x = 32; \text{ в)} (x-3)^{1/2} = 5,$$

$$\sqrt{x-3} = 5, x-3 = 25, x = 28; \text{ г)} (x+2)^{1/3} = 0, x+2 = 0, x = -2; \text{ д)} (x^2-9)^{0,5} = \sqrt{7},$$

$$\sqrt{x^2-9} = \sqrt{7}, x^2-9 = 7, x^2 = 16, x_{1,2} = \pm 4; \text{ е)} (x^2-6x)^{1/3} = 3, \sqrt[3]{x^2-6x} = 3,$$

$$x^2-6x = 27, x^2-6x-27 = 0, D = 36+4 \cdot 27 = 144, x_1 = \frac{6+12}{2} = 9, x_2 = -3.$$

C-32

$$1. \text{ 1) а)} x^{1/2} \cdot x^{1/3} = x^{1/2+1/3} = x^{5/6}; \text{ б)} (x^{1/2})^{1/3} = x^{1/6}; \text{ в)} x^{1/2} \cdot x^{1/3} = x^{1/2+1/3} = x^{5/6};$$

$$\text{г)} y : y^{2/3} = y^{1-2/3} = y^{1/3}; \text{ д)} x^{1/2} \cdot x^{1/6} \cdot x^{-1/3} = x^{1/2+1/6-1/3} = x^{1/3};$$

$$2) \text{ а)} (y^{0,7})^{0,5} \cdot y^{0,15} = y^{0,35} \cdot y^{0,15} = y^{0,5}; \text{ б)} (y^{5/7})^{1,4} \cdot (y^{-3/8})^{2,4} = y \cdot y^{-3,24} = y^{-2,24} = y^{-0,9} = y^{0,1};$$

$$\text{в)} \frac{y^{5/6} \cdot y^{2/3}}{y^{-0,5}} = \frac{y^{3/2}}{y^{-1/2}} = y^2; \text{ г)} \frac{y^{3,5} \cdot y^{-2,7}}{y^{2,9} \cdot y^{-3,1}} = \frac{y^{0,8}}{y^{-0,2}} = y.$$

$$2. \text{ 1) а)} (2^{0,5})^{-0,5} \cdot (0,5)^{-1,25} = 2^{-0,25} \cdot (2^{-1})^{-1,25} = 2^{-0,25} \cdot 2^{1,25} = 2;$$

$$\text{б)} (3^{-1/9})^{1,8} \cdot 9^{0,1} = 3^{-0,2} \cdot (3^2)^{0,1} = 3^{-0,2} \cdot 3^{0,2} = 1;$$

2) a) $16^{0,125} \cdot 8^{-5/6} \cdot 4^{2,5} = (2^4)^{0,125} \cdot (2^3)^{-5/6} \cdot (2^2)^{2,5} = 2^{0,5} \cdot 2^{-5/2} \cdot 2^5 = 2^3 = 8;$

б) $\frac{81^{0,4} \cdot 3^{0,5}}{9^{0,3} \cdot 27^{1/6}} = \frac{(3^4)^{0,4} \cdot 3^{0,5}}{(3^2)^{0,3} \cdot (3^3)^{1/6}} = \frac{3^{1,6} \cdot 3^{0,5}}{3^{0,6} \cdot 3^{0,5}} = 3.$

3. $a^4 = (a^2)^2; a^{-2} = \frac{1}{a^2} = \left(\frac{1}{a}\right)^2; a^3 = (a^{3/2})^2; a = (\sqrt{a})^2; a^{1/2} = (a^{1/4})^2;$

$a^{1/3} = (a^{1/6})^2; a^{3/7} = (a^{3/14})^2.$
 4. $b^6 = (b^2)^3; b^{-9} = (b^{-3})^3; b^{1/2} = (b^{1/6})^3; b^{1/3} = (b^{1/9})^3; b^{2/5} = (b^{2/15})^3.$

5. a) $(x^{1/2}-3) \cdot 2x^{1/2} + 6x^{1/2} = x^{1/2}(2x^{1/2}-6+6) = 2x;$

б) $(x^{0,5}-y^{0,5})(x^{0,5}+y^{0,5}) = (x^{0,5})^2 - (y^{0,5})^2 = x-y;$

в) $(1-x^{0,5})^2 + 2x^{0,5} = 1 - 2x^{0,5} + x + 2x^{0,5} = 1+x;$

г) $(y^{1/3}-1)(y^{2/3}+y^{1/3}+1) = (y^{1/3})^3 - 1^3 = y-1.$

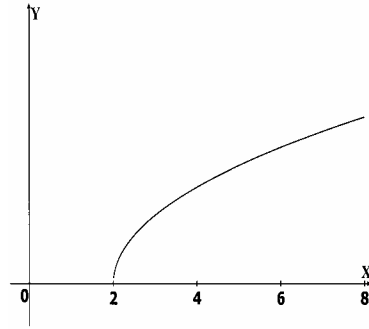
6. a) $x = a^{0,25}, y = a^{-0,25}; x \cdot y = a^{0,25} \cdot a^{-0,25} = a^0 = 1, \text{ т.е. } xy=1;$ б) $x = a^{1/3}, y = a^{1/6},$
 $x \cdot y^{-2} = a^{1/3} \cdot (a^{1/6})^{-2} = a^{1/3} \cdot a^{-1/3} = 1, \text{ т.е. } xy^{-2}=1; x=y^2;$

в) $x = a^{1/4}, y = \sqrt{1-a^{0,5}}; x^2 + y^2 = (a^{1/4})^2 + (\sqrt{1-a^{0,5}})^2 = a^{0,5} + 1 - a^{0,5} = 1,$

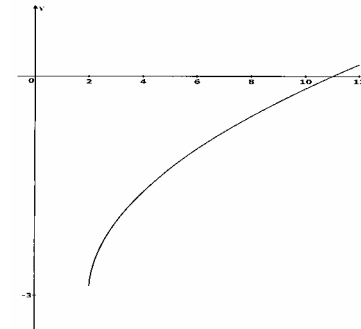
т.е. $x^2 + y^2 = 1;$

г) $x = \sqrt{a}, y = \sqrt{a-3}; x^2 - y^2 = (\sqrt{a})^2 - (\sqrt{a-3})^2 = a - (a-3) = 3, \text{ т.е. } x^2 - y^2 = 3.$

7. a)



б)



C-33

1. 1) a) $x+3x^{1/2} = x^{1/2}(x^{1/2}+3);$ б) $y^{1/2}-2y^{1/4} = y^{1/4}(y^{1/4}-2);$

в) $(a^{1/2})^2 - 4 = (a^{1/2}-2)(a^{1/2}+2);$ г) $(b^{1/2})^3 + 8 = (b^{1/2}+2)(b-2b^{1/2}+4);$

д) $x^{2/3} - y^{2/3} = (x^{1/3} - y^{1/3})(x^{1/3} + y^{1/3});$

е) $a^{3/2} - b^{3/2} = (a^{1/2})^3 - (b^{1/2})^3 = (a^{1/2} - b^{1/2})(a + a^{1/2}b^{1/2} + b);$

2) a) $a^{1/2} - 2a^{1/4} = a^{1/4}(a^{1/4} - 2);$ б) $b^{3/4} + b^{1/2} = b^{1/4}(b^{1/4} + 1);$

в) $ax^{1/6} - ax^{1/3} = ax^{1/6}(1 - x^{1/6});$ г) $y^{2/7} + y^{1/7} = y^{1/7}(y^{1/7} + 1);$

д) $a-4=(\sqrt{a}-2)(\sqrt{a}+2)$; е) $b+27=(b^{1/3})^3+3^3=(b^{1/3}+3)(b^{2/3}-3b^{1/3}+9)$. **2. 1) а)**

$$\frac{x+7x^{1/2}}{x^{1/2}+7} = \frac{x^{1/2}(x^{1/2}+7)}{x^{1/2}+7} = x^{1/2};$$

$$\text{б)} \frac{3y^{1/4}}{y^{1/2}-5y^{1/4}} = \frac{3y^{1/4}}{y^{1/4}(y^{1/4}-5)} = \frac{3}{y^{1/4}-5};$$

$$\text{в)} \frac{a-b}{a^{0,5}+b^{0,5}} = \frac{(a^{0,5}-b^{0,5})(a^{0,5}+b^{0,5})}{a^{0,5}+b^{0,5}} = a^{0,5}-b^{0,5};$$

$$\text{г)} \frac{a^{1,5}b-ab^{1,5}}{ab^{0,5}-a^{0,5}b} = \frac{ab(a^{0,5}-b^{0,5})}{a^{0,5}b^{0,5}(a^{0,5}-b^{0,5})} = a^{0,5}b^{0,5};$$

$$\text{д)} \frac{x^{3/2}-c^{3/2}}{x+x^{1/2} \cdot c^{1/2}+c} = \frac{(x^{1/2}-c^{1/2})(x+x^{1/2} \cdot c^{1/2}+c)}{x+x^{1/2} \cdot c^{1/2}+c} = x^{1/2}-c^{1/2};$$

$$\text{е)} \frac{m+n}{m^{1/3}+n^{1/3}} = \frac{(m^{1/3}+n^{1/3})(m^{2/3}-m^{1/3}n^{1/3}+n^{2/3})}{m^{1/3}+n^{1/3}} = m^{2/3}-m^{1/3}n^{1/3}+n^{2/3};$$

$$\text{2) а)} \frac{a-2a^{1/2}}{a^{3/2}-2a} = \frac{a^{1/2}(a^{1/2}-2)}{a(a^{1/2}-2)} = a^{1/2};$$

$$\text{б)} \frac{b^{5/6}-b^{1/3}}{b^{5/6}+b^{1/3}} = \frac{b^{1/3}(b^{1/2}-1)}{b^{1/3}(b^{1/2}+1)} = \frac{b^{1/2}-1}{b^{1/2}+1};$$

$$\text{в)} \frac{4x-y}{2x+x^{0,5}y^{0,5}} = \frac{(2x^{0,5}-y^{0,5})(2x^{0,5}+y^{0,5})}{x^{0,5}(2x^{0,5}+y^{0,5})} = \frac{2x^{0,5}-y^{0,5}}{x^{0,5}};$$

$$\text{г)} \frac{m^{2/3}-n^{2/3}}{m-m^{2/3}n^{1/3}} = \frac{(m^{1/3}-n^{1/3})(m^{1/3}+n^{1/3})}{m^{2/3}(m^{1/3}-n^{1/3})} = \frac{m^{1/3}+n^{1/3}}{m^{2/3}};$$

$$\text{д)} \frac{x^{3/2}-y^{3/2}}{x^{3/2}y^{1/2}+xy+x^{1/2}y^{3/2}} = \frac{(x^{1/2}-y^{1/2})(x+x^{1/2}y^{1/2}+y)}{x^{1/2}y^{1/2}(x+x^{1/2}y^{1/2}+y)} = \frac{x^{1/2}-y^{1/2}}{x^{1/2}y^{1/2}};$$

$$\text{е)} \frac{a^{0,3}+b^{0,3}}{a^{0,1}+b^{0,1}} = \frac{(a^{0,1}+b^{0,1})(a^{0,2}-a^{0,1}b^{0,1}+b^{0,2})}{a^{0,1}+b^{0,1}} = a^{0,2}-a^{0,1}b^{0,1}+b^{0,2}.$$

$$\text{3.} \frac{x-9x^{1/2}}{x^{3/4}+3x^{1/2}} = \frac{x^{1/2}(x^{1/2}-9)}{x^{1/2}(x^{1/4}+3)} = \frac{x^{1/2}(x^{1/4}-3)(x^{1/4}+3)}{x^{1/2}(x^{1/4}+3)} = x^{1/4}-3=$$

$$=(20,25)^{1/4}-3=\sqrt{4,5}-3=3\sqrt{0,5}-3.$$

$$\text{4. а)} \frac{x^{0,5}}{x^{0,5}-5} - \frac{5}{x^{0,5}+5} + \frac{x}{25-x} = \frac{x^{0,5}}{x^{0,5}-5} - \frac{5}{x^{0,5}+5} - \frac{x}{(x^{0,5}-5)(x^{0,5}+5)} =$$

$$= \frac{x^{0,5}(x^{0,5} + 5) - 5(x^{0,5} - 5) - x}{x - 25} = \frac{x + 5x^{0,5} - 5x^{0,5} + 25 - x}{x - 25} = \frac{25}{x - 25};$$

$$\begin{aligned} \text{б)} & \left(\frac{5a^{0,5} + b^{0,5}}{a^{0,5} - 5b^{0,5}} + \frac{5a^{0,5} - b^{0,5}}{a^{0,5} + 5b^{0,5}} \right) \cdot \frac{a - 25b}{a + b} = \\ & = \frac{(5a^{0,5} + b^{0,5})(a^{0,5} + 5b^{0,5}) + (5a^{0,5} - b^{0,5})(a^{0,5} - 5b^{0,5})}{(a^{0,5} - 5b^{0,5})(a^{0,5} + 5b^{0,5})} \cdot \\ & \cdot \frac{(a^{0,5} - 5b^{0,5})(a^{0,5} + 5b^{0,5})}{a + b} = (5a + a^{0,5} \cdot b^{0,5} + 25a^{0,5} \cdot b^{0,5} + 5b + 5a - a^{0,5} \cdot b^{0,5} - \\ & - 25a^{0,5} \cdot b^{0,5} + 5b) : (a + b) = (10a + 10b) : (a + b) = 10. \end{aligned}$$

C-34

1. а) $\frac{\pi}{4} = \frac{180^\circ}{4} = 45^\circ$; б) $\frac{\pi}{10} = \frac{180^\circ}{10} = 18^\circ$; в) $\frac{3}{4}\pi = 3 \cdot \frac{\pi}{4} = 3 \cdot 45^\circ = 135^\circ$;

г) $\frac{2}{5}\pi = \frac{2}{5} \cdot 180^\circ = 72^\circ$; д) $3\pi = 3 \cdot 180^\circ = 540^\circ$.

2. а) $25^\circ = 25 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{5}{36}\pi$; б) $40^\circ = 40 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{2}{9}\pi$; в) $150^\circ = 150 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{5}{6}\pi$;

г) $90^\circ = 90 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{2}$; д) $18^\circ = 18 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{10}$.

3.

Градусы	60°	45°	105°	120°	135°	36°	144°
Радианы	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{12}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{4\pi}{5}$

$$105^\circ = 105 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{7}{12}\pi; \quad \frac{\pi}{5} = \frac{180^\circ}{5} = 36^\circ;$$

$$70^\circ = 70 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{7\pi}{18}; \quad \frac{7\pi}{9} = \frac{7}{9} \cdot 180^\circ = 140^\circ.$$

Градусы	70°	140°	540°
Радианы	$\frac{7\pi}{18}$	$\frac{7\pi}{9}$	3π

4. а) $\pi \approx 3,1$; б) $\frac{\pi}{2} \approx 1,6$; в) $\frac{3}{4}\pi \approx 2,4$; г) $\frac{3\pi}{2} \approx 4,7$; д) $2\pi \approx 6,3$.

5. а) $\frac{\pi}{2} > 1,5$, $1,6 > 1,5$; б) $\pi < 3 \frac{1}{3}$, $3,14 < 3,33$; в) $-\frac{\pi}{2} > -2$, $-1,6 > -2$.

6. Длина окружности равна $2\pi R \approx 2 \cdot 3,14 \cdot 2,6 \approx 16,33$ (см).
За 20 мин. конец стрелки пройдет одну треть окружности, т.е.

$$\frac{1}{3} \cdot 16,33 \approx 5,44 \text{ (см).}$$

Ответ: 5,44 см.

7. Пусть x — коэффициент пропорциональности. Тогда $2x$, $3x$, и $4x$ — углы треугольника. Их сумма равна π , т.е. $2x+3x+4x=\pi$, $9x=\pi$, $x=\frac{\pi}{9}$,

$\frac{2\pi}{9}$ — I угол треугольника, $3\frac{\pi}{9}=\frac{\pi}{3}$ — II угол, $\frac{4\pi}{9}$ — III угол.

Ответ: $\frac{2\pi}{9}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{9}$.

8. Пусть x см — радиус. Тогда πx^2 см² — площадь круга, $\frac{\pi x^2}{2\pi} \cdot 2$ см² —

площадь сектора или 7,29 см². Получаем уравнение: $\frac{\pi x^2 \cdot 2}{2\pi} = 7,29$;
 $x^2=7,29$; $x=2,7$; 2,7 см—радиус. Ответ: 2,7.

9. $36^\circ = \frac{\pi}{5}$ — I угол; $\frac{\pi - \frac{\pi}{5}}{2} = \frac{4\pi}{2 \cdot 5} = \frac{2\pi}{5}$ — II и III углы.

Ответ: $\frac{\pi}{5}$, $\frac{2\pi}{5}$ и $\frac{2\pi}{5}$.

10. Внутренний угол правильного n -угольника равен $\pi \left(1 - \frac{2}{n}\right)$.

Получаем: $\frac{4\pi}{5} = \left(1 - \frac{2}{n}\right)\pi$; $\frac{4}{5} = 1 - \frac{2}{n}$; $\frac{2}{n} = \frac{1}{5}$; $n=10$. Ответ: 10.

С-35

1. 1) а) (0; 1); б) (-1; 0); в) (0; -1); г) (1; 0); д) (-1; 0);

2) а) (0; -1); б) (-1; 0); в) (0; 1); г) (1; 0); д) (0; 1).

2. а) II; б) I; в) III; г) I; д) III.

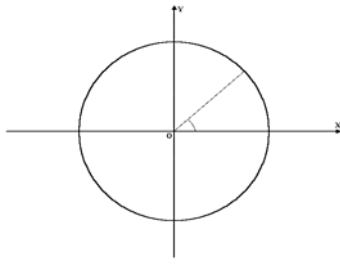
3. а) $\pi + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{3\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; в) $\frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

4. а) (0; 1); б) (0; 1); в) (1; 0).

5. а) $\frac{7\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{5\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

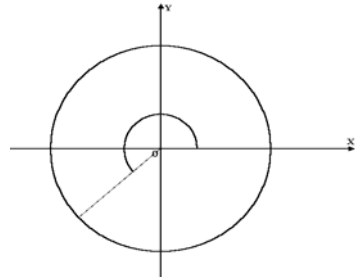
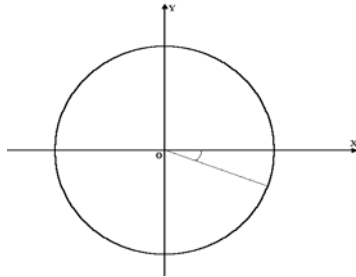
С-36

1) а) 45°;



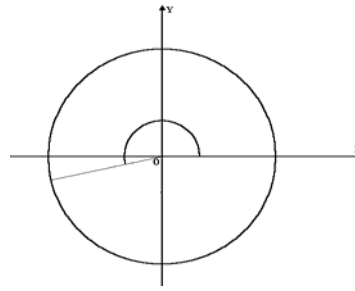
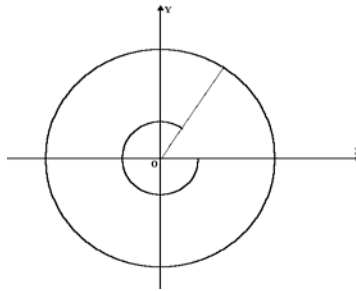
б) -30° ;

в) 225° ;



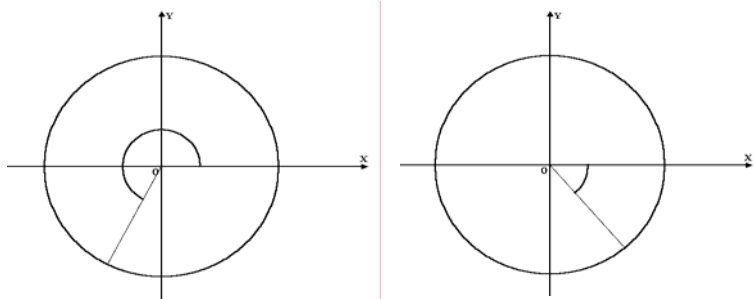
г) -315° ;

2) а) 210° ;

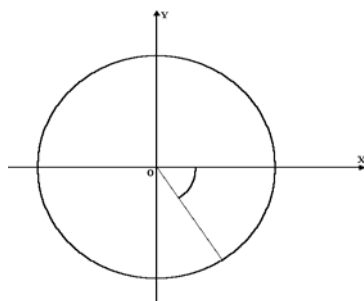


б) 590° ;

в) -50° ;



г) -410° .



2. 1) а) I; б) III; в) III; г) II;

2) а) IV; б) I; в) I; г) IV.

3.

α	0°	90°	180°	270°	360°
$\sin\alpha$	0	1	0	-1	0
$\cos\alpha$	1	0	-1	0	1
$\operatorname{tg}\alpha$	0	-	0	-	0
$\operatorname{ctg}\alpha$	-	0	-	0	-

4. 1) а) $\beta=360^\circ$; б) $\beta=450^\circ$; в) $\beta=630^\circ$;

2) а) $\beta=450^\circ$; б) $\beta=360^\circ$; в) $\beta=540^\circ$.

5. а) $-1 \leq \sin \alpha \leq 1$; $3-1 \leq 3+\sin \alpha \leq 3+1$; $2 \leq 3+\sin \alpha \leq 4$;

б) $-1 \leq \sin \alpha \leq 1$; $-1 \leq -\sin \alpha \leq 1$; $2 \leq 3-\sin \alpha \leq 4$;

в) $-1 \leq \cos \alpha \leq 1$; $5-1 \leq 5+\cos \alpha \leq 5+1$; $4 \leq 5+\cos \alpha \leq 6$;

г) $-1 \leq \cos \alpha \leq 1$; $-1 \leq -\cos \alpha \leq 1$; $4 \leq 5-\cos \alpha \leq 6$.

6. а) нет, т.к. $-1 \leq \sin \alpha \leq 1$, а $\frac{\sqrt{5}}{2} > 1$; б) нет, т.к. $-1 \leq \cos \alpha \leq 1$, а $\frac{\sqrt{5}}{2} > 1$;

в) да; г) да.

7. 1) а) $\cos 0^\circ + 3 \sin 90^\circ = 1 + 3 = 4$; б) $\sin 270^\circ - 2 \cos 180^\circ = -1 - 2 \cdot (-1) = 1$;

в) $6 \operatorname{tg} 180^\circ + 3 \operatorname{ctg} 90^\circ = 6 \cdot 0 + 3 \cdot 0 = 0$; г) $1 + \operatorname{ctg} 270^\circ - 5 \operatorname{tg} 360^\circ = 1 + 0 - 5 \cdot 0 = 1$;

2) а) $\sin 30^\circ + \cos 60^\circ = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$; б) $\sin 60^\circ + \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$;

в) $\sin 45^\circ + \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$; г) $\operatorname{tg} 30^\circ + \operatorname{ctg} 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} + \sqrt{3} = \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$.

8. а) $\sin x = 0$, $x = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; б) $\sin x = -1$, $x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$;

в) $\sin x = 1$, $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; г) $\cos x = 0$, $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$;

д) $\cos x = -1$, $x = \pi + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; е) $\cos x = 1$, $x = 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

9. а) $\sin^2 60^\circ + \cos^2 30^\circ = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} + \frac{3}{4} = 1,5$;

б) $\operatorname{tg}^2 45^\circ + \operatorname{ctg}^2 45^\circ = 1^2 + 1^2 = 2$; в) $\sin 45^\circ \cdot \cos 60^\circ \cdot \operatorname{ctg} 90^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 0 = 0$.

10. $0^\circ < \beta < 90^\circ$, $\cos \beta > 0$, $\cos \beta < 2$, значит, $\cos^2 \beta < 2 \cos \beta$.

11. $\alpha = 90^\circ$; а) $\sin 3\alpha = \sin 270^\circ = -1$; б) $3 \sin \alpha = 3 \sin 90^\circ = 3$;

в) $\cos 2\alpha = \cos 180^\circ = -1$; $2 \cos \alpha = 2 \cos 90^\circ = 0$.

C-37

1. а) $\sin 36^\circ > 0$, $\sin 117^\circ > 0$, $\sin 197^\circ < 0$, $\sin 311^\circ < 0$;

б) $\cos 16^\circ > 0$, $\cos 108^\circ < 0$, $\cos 288^\circ > 0$, $\cos 304^\circ > 0$;

в) $\operatorname{tg} 5^\circ > 0$, $\operatorname{tg} 91^\circ < 0$, $\operatorname{tg} 183^\circ > 0$, $\operatorname{tg} 303^\circ < 0$;

г) $\operatorname{ctg} 77^\circ > 0$, $\operatorname{ctg} 97^\circ < 0$, $\operatorname{ctg} 209^\circ > 0$, $\operatorname{ctg} 281^\circ < 0$.

2. 1) а) $\sin 185^\circ < 0$; б) $\operatorname{tg} 116^\circ < 0$; в) $\cos 210^\circ < 0$; г) $\operatorname{ctg} 310^\circ < 0$;

2) а) $\sin 510^\circ > 0$; б) $\cos 388^\circ > 0$; в) $\operatorname{tg} 456^\circ < 0$; г) $\operatorname{ctg} 373^\circ > 0$;

3) а) $\sin (-16^\circ) < 0$; б) $\cos (-88^\circ) > 0$; в) $\operatorname{tg} (-110^\circ) > 0$; г) $\operatorname{ctg} (-93^\circ) > 0$.

3.

α	135°	216°	400°	460°	-16°	-127°
$\sin \alpha$	+	-	+	+	-	-
$\cos \alpha$	-	-	+	-	+	-
$\operatorname{tg} \alpha$	-	+	+	-	-	+
$\operatorname{ctg} \alpha$	-	+	+	-	-	+

4. а) $\sin 92^\circ \cdot \cos 200^\circ = \langle + \rangle \cdot \langle - \rangle < 0$; б) $\sin 143^\circ \cdot \cos 311^\circ = \langle + \rangle \cdot \langle + \rangle > 0$;

- в)** $\frac{\sin 167^\circ}{\cos 267^\circ} = \frac{\langle + \rangle}{\langle - \rangle} < 0$; **г)** $\frac{\cos 131^\circ}{\sin 88^\circ} = \frac{\langle - \rangle}{\langle + \rangle} < 0$;
- д)** $\sin 116^\circ \cdot \cos 116^\circ \cdot \operatorname{tg} 197^\circ = \langle + \rangle \cdot \langle - \rangle \cdot \langle + \rangle < 0$;
- е)** $\cos 225^\circ \cdot \sin 83^\circ \cdot \operatorname{tg} 100^\circ = \langle - \rangle \cdot \langle + \rangle \cdot \langle - \rangle > 0$.
- 5. а)** $\sin \alpha < 0$ и $\operatorname{tg} \alpha > 0$, III или IV, I или III, значит, III четверть;
- б)** $\cos \alpha > 0$ и $\operatorname{tg} \alpha > 0$, I или IV, I или III, значит, I четверть.
- 6. 1) а)** $\sin(-60^\circ) = -\sin 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; **б)** $\cos(-90^\circ) = \cos 90^\circ = 0$;
- в)** $\operatorname{tg}(-45^\circ) = -\operatorname{tg} 45^\circ = -1$; **г)** $\operatorname{ctg}(-30^\circ) = -\operatorname{ctg} 30^\circ = -\sqrt{3}$;
- 2) а)** $\sin(-30^\circ) + \operatorname{tg} 45^\circ = -\frac{1}{2} + 1 = 0,5$; **б)** $\sin(-90^\circ) - \cos 0^\circ = -1 - 1 = -2$;
- в)** $\cos(-180^\circ) \sin(-30^\circ) = \cos 180^\circ \sin 30^\circ = (-1) \cdot \frac{1}{2} = 0,5$;
- г)** $\sin(-60^\circ) \operatorname{tg}(-30^\circ) = \sin 60^\circ \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = 0,5$.
- 7. а)** $\sin 390^\circ = \sin(360^\circ + 30^\circ) = \sin 30^\circ = 0,5$;
- б)** $\cos 405^\circ = \cos(360^\circ + 45^\circ) = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$;
- в)** $\operatorname{tg} 420^\circ = \operatorname{tg}(360^\circ + 60^\circ) = \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}$;
- г)** $\operatorname{ctg} 750^\circ = \operatorname{ctg}(720^\circ + 30^\circ) = \operatorname{ctg} 30^\circ = \sqrt{3}$;
- д)** $\sin 780^\circ = \sin(720^\circ + 60^\circ) \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$;
- е)** $\cos 390^\circ = \cos(360^\circ + 30^\circ) = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
- 8.** $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$; **а)** $\sin \alpha - \cos \alpha = \langle + \rangle \cdot \langle - \rangle < 0$; **б)** $\frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\langle + \rangle}{\langle - \rangle} < 0$;
- в)** $\frac{\operatorname{tg}^3 \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\langle - \rangle}{\langle + \rangle} < 0$; **г)** $\sin \alpha - \cos \alpha = \langle + \rangle - \langle - \rangle > 0$.
- 9.** $\sin \alpha = a$; **а)** $1 - \sin \alpha = 1 - a$; **б)** $1 - \sin(-\alpha) = 1 + \sin \alpha = 1 + a$;
- в)** $\sin(\alpha + 360^\circ) = \sin \alpha = a$; **г)** $\sin(\alpha - 360^\circ) = -\sin(360^\circ - \alpha) = \sin \alpha = a$;
- д)** $\sin(720^\circ + \alpha) = \sin \alpha = a$; **е)** $\sin(720^\circ - \alpha) = -\sin \alpha = -a$.
- 10.** $\sin \alpha + \cos \alpha = -1,01$; III четверти.
- 11.** $\beta \in \text{II}$ четверти; **а)** $|\cos \beta| + \cos \beta = -\cos \beta + \cos \beta = 0$;
- б)** $|\sin \beta| - \sin \beta = \sin \beta - \sin \beta = 0$; **в)** $|\operatorname{tg} \beta| + \operatorname{tg} \beta = -\operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \beta = 0$;
- г)** $|\sin \beta| - |\cos \beta| = \sin \beta + \cos \beta$.

C-38

1. 1) a) $2\sin 30^\circ + 6\cos 60^\circ - 3\operatorname{ctg} 30^\circ + 9\operatorname{tg} 30^\circ =$

$$= 2 \cdot \frac{1}{2} + 6 \cdot \frac{1}{2} - 3\sqrt{3} + 9 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = 1 + 3 - 3\sqrt{3} + 3\sqrt{3} = 4;$$

б) $\sin(-45^\circ) + \cos(-45^\circ) + 2\sin(-30^\circ) - 4\cos(-60^\circ) =$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - 2 \cdot \frac{1}{2} - 4 \cdot \frac{1}{2} = -1 - 2 = -3;$$

в) $4\sin(-30^\circ) + \operatorname{tg}(-45^\circ) \operatorname{ctg}(-45^\circ) - 3\cos 90^\circ = -4 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot 1 - 3 \cdot 0 = -2 + 1 = -1;$

2) a) $3\sin \frac{\pi}{6} - 2\cos \frac{\pi}{3} - \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} + 4\operatorname{ctg} \frac{\pi}{4} = 3 \cdot \frac{1}{2} - 2 \cdot \frac{1}{2} - 1 + 4 \cdot 1 = 1,5 - 1 - 1 + 4 = 3,5;$

б) $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) - 3\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + 3\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) - 4\sin \pi = -1 - 3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - 3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - 4 \cdot 0 = -1 - 3\sqrt{2};$

в) $2\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) \cdot \operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) + 3\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) + 5\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = 2 \cdot 1 \cdot 1 - 3 + 5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{2} - 1.$

2. a) $\sin 0 + \cos 0 = 0 + 1 = 1;$ $\sin \frac{\pi}{2} + \cos \frac{\pi}{2} = 1 + 0 = 1;$ $\sin \pi + \cos \pi = 0 - 1 = -1;$

$\sin \frac{3\pi}{2} + \cos \frac{3\pi}{2} = -1 + 0 = -1;$ **б)** $\sin 0 + 2\cos 0 = 0 + 2 \cdot 1 = 2;$

$\sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{6}\right) + 2\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2};$ $\sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{2}\right) + 2\cos \frac{\pi}{2} = 0 + 2 \cdot 0 = 0;$

$\sin 2\pi + 2\cos \pi = 0 + 2 \cdot (-1) = -2;$ **в)** $2\sin 0 - \cos 0 = 0 - 1 = -1;$

$2\sin \frac{\pi}{6} - \cos\left(3 \cdot \frac{\pi}{6}\right) = 2 \cdot \frac{1}{2} - 0 = 1;$ $2\sin \frac{\pi}{3} - \cos\left(3 \cdot \frac{\pi}{3}\right) = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - (-1) = \sqrt{3} + 1;$

$2\sin \pi - \cos 3\pi = 2 \cdot 0 - (-1) = 1;$ **г)** $3\sin 0 - 2\cos 0 = 3 \cdot 0 - 2 \cdot 1 = -2;$

$3\sin \frac{\pi}{6} - 2\cos\left(3 \cdot \frac{\pi}{6}\right) = 3 \cdot \frac{1}{2} - 2 \cdot 0 = 1,5;$

$3\sin \frac{\pi}{3} - 2\cos\left(3 \cdot \frac{\pi}{3}\right) = 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 2 \cdot (-1) = \frac{3\sqrt{3}}{2} + 2;$ $3\sin \frac{\pi}{2} - 2\cos\left(3 \cdot \frac{\pi}{2}\right) = 3 \cdot 1 - 2 \cdot 0 = 3.$

3. 1) a) $\sin^2 \frac{\pi}{4} - \cos^2 \frac{\pi}{4} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 0;$

б) $2\sin^2 \frac{\pi}{6} + \cos^2 \frac{\pi}{3} = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4};$

$$\text{в) } \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{6} \cdot \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi}{3} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^2 = \frac{1}{9};$$

$$\text{г) } \sin \frac{\pi}{6} \cdot \sin^2 \frac{\pi}{4} \cdot \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 \cdot (\sqrt{3})^2 = \frac{3}{4};$$

$$\text{2) а) } \sin^2 \left(-\frac{\pi}{3} \right) + \cos^2 \left(-\frac{\pi}{6} \right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 = 1,5;$$

$$\text{б) } 2\cos^2 \left(-\frac{\pi}{4} \right) \cdot \operatorname{ctg}^2 \left(-\frac{\pi}{4} \right) = 2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 \cdot 1^2 = 1;$$

$$\text{в) } \operatorname{tg}^2 \left(-\frac{\pi}{3} \right) + \operatorname{ctg}^2 \left(-\frac{\pi}{6} \right) = (\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3})^2 = 6;$$

$$\text{г) } \operatorname{tg}^2 \left(-\frac{\pi}{6} \right) \cdot \operatorname{ctg}^2 \left(-\frac{\pi}{6} \right) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^2 \cdot (\sqrt{3})^2 = 1.$$

$$\text{4. а) } \frac{0,3 + \sin^2 \frac{\pi}{6} - \cos^2 \frac{\pi}{3}}{2\sin \frac{\pi}{6}} = \frac{0,3 + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}}{2 \cdot 0,5} = 0,3;$$

$$\text{б) } \frac{1,5 - \sin^2 \left(-\frac{\pi}{6} \right) - \cos^2 \left(-\frac{\pi}{6} \right)}{2\cos \left(-\frac{\pi}{4} \right)} = \frac{1,5 - \left(\sin^2 \left(-\frac{\pi}{6} \right) - \cos^2 \left(-\frac{\pi}{6} \right) \right)}{2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1,5 - 1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

$$\text{5. а) } \frac{\sin 2\alpha + \cos 2\alpha}{\sin(15^\circ + \alpha) - 2\sin \alpha} = \frac{\sin 60^\circ + \cos 60^\circ}{\sin 45^\circ - 2\sin 30^\circ} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2} - 2 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{(1 + \sqrt{3}) \cdot 2}{2(\sqrt{2} - 2)} = \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{2} - 2};$$

$$\text{б) } \frac{\sin(30^\circ + 60^\circ)}{\sin(30^\circ - 60^\circ) + \cos(30^\circ + 60^\circ)} = \frac{1}{-0,5} = -2;$$

$$\text{в) } \frac{\sin \left(2 \cdot \frac{\pi}{4} \right) - \cos \left(2 \cdot \frac{\pi}{4} \right)}{\sin \frac{\pi}{4} - \cos \frac{\pi}{4} + \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}} = \frac{1 - 0}{\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + 1} = 1;$$

$$\text{г) } \frac{3\sin \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} \right)}{\sin \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \right) - \sin \left(3 - \frac{\pi}{3} \right)} = \frac{3 \cdot \frac{1}{2}}{1 - 0} = 1,5.$$

$$6. \text{ а) } \sin \frac{\pi}{3} + \cos \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2} > 1; \text{ б) } \cos \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} + 0 < 1;$$

$$\text{в) } \sin \frac{\pi}{6} + \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1+\sqrt{2}}{2} > 1;$$

$$\text{г) } 2\sin \frac{\pi}{6} + \cos \frac{\pi}{4} = 2 \cdot \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2+\sqrt{2}}{2} < 2.$$

$$7. \cos \frac{\pi}{6} \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} - 1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{3} - 1 = \frac{3}{2} - 1 = 0,5;$$

$$\operatorname{ctg}^2 \frac{\pi}{3} \cdot \left(1 + \cos^2 \frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 \cdot \left(1 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right) = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} = 0,5,$$

значит, $\cos \frac{\pi}{6} \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} - 1 = \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi}{3} \cdot \left(1 + \cos^2 \frac{\pi}{4}\right)$, что и требовалось доказать.

С-39

$$1. \text{ а) } \sin \alpha = 0,6, \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi; \cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\sqrt{1 - 0,6^2} = -0,8;$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{0,6}{-0,8} = -\frac{3}{4}; \text{ б) } \cos \alpha = 0,8, 0 < \alpha < \frac{\pi}{2};$$

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - 0,8^2} = 0,6; \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{0,6}{0,8} = \frac{3}{4};$$

$$\text{в) } \sin \alpha = \frac{7}{25}, \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}; \cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \frac{49}{625}} = -\frac{24}{25};$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{7 \cdot 25}{25 \cdot 24} = \frac{7}{24}; \operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{24}{7}; \text{ г) } \cos \alpha = \frac{7}{25}, \frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi;$$

$$\sin \alpha = -\sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \frac{49}{625}} = -\frac{24}{25}; \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\frac{24 \cdot 25}{25 \cdot 7} = -\frac{24}{7};$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = -\frac{7}{24}; \text{ д) } \operatorname{tg} \alpha = -\frac{7}{24}, \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi;$$

$$\cos \alpha = -\frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = -\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{49}{576}}} = -\frac{24}{25}; \sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{576}{625}} = \frac{7}{25};$$

$$\text{е) } \operatorname{ctg} \alpha = 3 \frac{3}{7} = \frac{24}{7}, \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}; \sin \alpha = -\frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}} = -\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{576}{49}}} = -\frac{7}{25};$$

$$\cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \frac{49}{625}} = -\frac{24}{25}.$$

2. а) $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = (-1)^2 + (-1)^2 = 2 \neq 1$, значит, данные равенства не могут выполняться одновременно.

б) $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{4}{9} + \frac{1}{9} = \frac{5}{9} \neq 1$, значит, данные равенства не могут выполняться одновременно.

3. а) $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$; $\cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$; $\frac{8}{9} = \frac{1}{1 + \frac{1}{4}}$; $\frac{8}{9} = \frac{4}{5}$ —

ложно, значит, данные равенства не могут выполняться одновременно.

б) $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \frac{5}{9} = \frac{4}{9}$; $\sin^2 \alpha = \frac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}$; $\frac{4}{9} = \frac{1}{1 + 2,5}$; $\frac{4}{9} = \frac{2}{7}$ —

ложно, значит, данные равенства не могут выполняться одновременно.

4. а) $\cos \beta = \frac{40}{41}$, $0 < \beta < \pi$, т.к. $\cos \beta > 0$, то $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$;

$$\sin \beta = \sqrt{1 - \cos^2 \beta} = \sqrt{1 - \frac{1600}{1681}} = \frac{9}{41}; \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = \frac{9 \cdot 41}{41 \cdot 40} = \frac{9}{40};$$

$$\operatorname{ctg} \beta = \frac{1}{\operatorname{tg} \beta} = \frac{40}{9}; \text{б) } \sin \beta = -\frac{4}{5}, \quad \frac{\pi}{2} < \beta < \frac{3\pi}{2};$$

$$\text{т.к. } \sin \beta < 0, \text{ то } \pi < \beta < \frac{3\pi}{2}; \cos \beta = -\sqrt{1 - \sin^2 \beta} = -\sqrt{1 - \frac{16}{25}} = -\frac{3}{5};$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{4 \cdot 5}{5 \cdot 3} = \frac{4}{3}; \operatorname{ctg} \beta = \frac{3}{4}; \text{в) } \operatorname{tg} \beta = 2, \quad 0 < \beta < \pi; \text{т.к. } \operatorname{tg} \beta > 0, \text{ то } 0 < \beta < \frac{\pi}{2};$$

$$\cos \beta = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \beta}} = \frac{1}{\sqrt{1 + 4}} = \frac{1}{\sqrt{5}}; \sin \beta = \sqrt{1 - \cos^2 \beta} = \sqrt{1 - \frac{1}{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}; \operatorname{ctg} \beta = \frac{1}{2};$$

г) $\operatorname{ctg} \beta = -1$, $\pi < \beta < 2\pi$; т.к. $\operatorname{ctg} \beta < 0$, то $\frac{3\pi}{2} < \beta < \frac{\pi}{2}$;

$$\sin \beta = -\frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \beta}} = -\frac{1}{\sqrt{1 + 1}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}; \cos \beta = \sqrt{1 - \sin^2 \beta} = \sqrt{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}};$$

$$\operatorname{tg} \beta = -1.$$

5. $\cos \alpha$; $\sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$; $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$;

$$\operatorname{tg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}; \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1 = \frac{1 - \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha};$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \pm \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}{\cos \alpha}; \operatorname{ctg} \alpha = \pm \frac{\cos \alpha}{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}.$$

$$6. 0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ, \sin \alpha = 1 + b;$$

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - (1 + b)^2} = \sqrt{1 - 1 - 2b - b^2} = \sqrt{-2b - b^2};$$

$$0 \leq \sin \alpha \leq 1 \text{ при } 0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ; 0 \leq 1 + b \leq 1; -1 \leq b \leq 0.$$

$$\text{Ответ: } \cos \alpha = \sqrt{-2b - b^2}, -1 \leq b \leq 0$$

$$7. \sin \alpha = \frac{a}{a+2}, \cos \alpha = \frac{2\sqrt{1+a}}{a+2};$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \frac{a^2}{(a+2)^2} + \frac{4(1+a)}{(a+2)^2} = \frac{a^2 + 4a + 4}{(a+2)^2} = \frac{(a+2)^2}{(a+2)^2} = 1,$$

значит, могут.

Ответ: могут.

C-40

$$1. 1) \text{ а) } \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \alpha = 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha};$$

$$\text{б) } \cos^2 \alpha (1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha) = \cos^2 \alpha \cdot \frac{1}{\sin^2 \alpha} = \operatorname{ctg}^2 \alpha;$$

$$\text{в) } 1 - \frac{1}{\cos^2 \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha - 1}{\cos^2 \alpha} = -\frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = -\operatorname{tg}^2 \alpha; \text{ г) } \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha + 1 = 1 + 1 = 2;$$

$$2) \text{ а) } \sin^2 \beta - \sin^2 \beta \cos^2 \beta = \sin^2 \beta (1 - \cos^2 \beta) = \sin^2 \beta \sin^2 \beta = \sin^4 \beta;$$

$$\text{б) } \cos^4 \beta + \cos^2 \beta \sin^2 \beta = \cos^2 \beta (\cos^2 \beta + \sin^2 \beta) = \cos^2 \beta;$$

$$\text{в) } \operatorname{tg}^2 \beta \operatorname{ctg}^2 \beta - \cos^2 \beta = 1 - \cos^2 \beta = \sin^2 \beta; \text{ г) } \frac{1 - \sin^2 \beta}{\cos^2 \beta - 1} = \frac{\cos^2 \beta}{-\sin^2 \beta} = -\operatorname{ctg}^2 \beta.$$

$$2. 1) \text{ а) } \sin \alpha \operatorname{ctg} \alpha = \sin \alpha \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \cos \alpha, \text{ ч.т.д.}$$

$$\text{б) } \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{ctg} \alpha} + 1 = \frac{\sin \alpha \sin \alpha}{\cos \alpha \cos \alpha} + 1 = \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} + 1 = \operatorname{tg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}, \text{ ч.т.д.}$$

$$2) \text{ а) } \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha + \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}} = \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} \cdot \cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha, \text{ ч.т.д.}$$

$$\text{б) } \frac{1 + \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{ctg} \alpha} = \frac{1 + \operatorname{tg} \alpha}{1 + \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}} = \frac{(1 + \operatorname{tg} \alpha) \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg} \alpha} = \operatorname{tg} \alpha, \text{ ч.т.д.}$$

$$3. 1) \text{ а) } (1 - \sin(-\alpha))(1 - \sin \alpha) = (1 + \sin \alpha)(1 - \sin \alpha) = 1 - \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha;$$

$$\text{б) } \operatorname{tg}(-\alpha) \operatorname{ctg} \alpha + \sin^2(-\alpha) = -\operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg} \alpha + \sin^2 \alpha = -1 + \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha;$$

$$\text{в) } \cos(-\alpha) + \cos \alpha \operatorname{tg}^2(-\alpha) = \cos \alpha + \cos \alpha \operatorname{tg}^2 \alpha =$$

$$= \cos \alpha (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) = \cos \alpha - \frac{1}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos \alpha};$$

$$2) \text{ а) } \frac{1 + \sin(-\beta)}{\cos(-\beta)} - \operatorname{tg}(-\beta) = \frac{1 - \sin \beta}{\cos \beta} + \operatorname{tg} \beta = \frac{1 - \sin \beta}{\cos \beta} + \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = \frac{1}{\cos \beta};$$

$$\text{б) } \frac{\cos^2(-\beta) - \cos^4(-\beta)}{\sin^2(-\beta)} = \frac{\cos^2 \beta - \cos^4 \beta}{\sin^2 \beta} = \frac{\cos^2 \beta (1 - \cos^2 \beta)}{\sin^2 \beta} =$$

$$= \frac{\cos^2 \beta \cdot \sin^2 \beta}{\sin^2 \beta} = \cos^2 \beta;$$

$$\text{в) } \frac{\cos(-\alpha)}{1 + \sin(-\alpha)} + \operatorname{tg}(-\alpha) = \frac{\cos \alpha}{1 - \sin \alpha} - \operatorname{tg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{1 - \sin \alpha} - \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} =$$

$$= \frac{\cos^2 \alpha - \sin \alpha + \sin^2 \alpha}{\cos \alpha (1 - \sin \alpha)} = \frac{1 - \sin \alpha}{\cos \alpha (1 - \sin \alpha)} = \frac{1}{\cos \alpha}.$$

4.

$$\frac{1 + \operatorname{tg} \varphi + \operatorname{tg}^2 \varphi}{1 + \operatorname{ctg} \varphi + \operatorname{ctg}^2 \varphi} - \operatorname{tg}^2 \varphi = \frac{1 + \operatorname{tg} \varphi + \operatorname{tg}^2 \varphi}{1 + \frac{1}{\operatorname{tg} \varphi} + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \varphi}} - \operatorname{tg}^2 \varphi = \frac{(1 + \operatorname{tg} \varphi + \operatorname{tg}^2 \varphi) \operatorname{tg}^2 \varphi}{1 + \operatorname{tg} \varphi + \operatorname{tg}^2 \varphi} - \operatorname{tg}^2 \varphi =$$

$$= \operatorname{tg}^2 \varphi - \operatorname{tg}^2 \varphi = 0 \text{ т.е. значение выражения не зависит от } \varphi, \text{ ч.т.д.}$$

$$5. \text{ а) } \frac{1 - \sin^4 \alpha}{3 \sin \alpha + 3 \sin^3 \alpha} = \frac{(1 - \sin^2 \alpha)(1 + \sin^2 \alpha)}{3 \sin \alpha (1 + \sin^2 \alpha)} = \frac{\cos^2 \alpha}{3 \sin \alpha};$$

$$\text{б) } \sin^3 \alpha \operatorname{ctg}^3 \alpha + 7 \cos^3 \alpha = \sin^3 \alpha \frac{\cos^3 \alpha}{\sin^3 \alpha} + 7 \cos^3 \alpha = 8 \cos^3 \alpha; -1 \leq \cos \alpha \leq 1;$$

$$-1 \leq \cos^3 \alpha \leq 1; -8 \leq 8 \cos^3 \alpha \leq 8; \text{ т.е. наибольшее значение равно } 8.$$

$$6. \frac{\operatorname{tg} \varphi + \operatorname{ctg} \varphi}{\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{ctg} \varphi} = \frac{\operatorname{tg} \varphi + \frac{1}{\operatorname{tg} \varphi}}{\operatorname{tg} \varphi - \frac{1}{\operatorname{tg} \varphi}} = \frac{\operatorname{tg}^2 \varphi + 1}{\operatorname{tg}^2 \varphi - 1}; \sin \varphi = \frac{2}{3}, \cos^2 \varphi = 1 - \sin^2 \varphi = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9};$$

$$\operatorname{tg}^2 \varphi = \frac{1}{\cos^2 \varphi} - 1 = \frac{9}{5} - 1 = \frac{4}{5}. \text{ Значит, наше выражение равно}$$

$$\frac{\operatorname{tg}^2 \varphi + 1}{\operatorname{tg}^2 \varphi - 1} = \frac{\frac{4}{5} + 1}{\frac{4}{5} - 1} = -\frac{9 \cdot 5}{5 \cdot 1} = -9$$

C-41

$$1. 1) \text{ a) } \frac{\sin \alpha + \operatorname{tg} \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{\sin \alpha + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}}{1 + \cos \alpha} = \frac{\sin \alpha - \cos \alpha + \sin \alpha}{\cos \alpha (1 + \cos \alpha)} = \frac{\sin \alpha (1 + \cos \alpha)}{\cos \alpha (1 + \cos \alpha)} = \operatorname{tg} \alpha ;$$

$$\text{б) } (1 - \sin^2 \alpha)(1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha) = \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \operatorname{ctg}^2 \alpha ;$$

$$\text{в) } \frac{\cos \alpha}{1 + \sin \alpha} + \frac{1 + \sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha + 1 + 2 \sin \alpha + \sin^2 \alpha}{\cos \alpha (1 + \sin \alpha)} =$$

$$= \frac{2 + 2 \sin \alpha}{\cos \alpha (1 + \sin \alpha)} = \frac{2(1 + \sin \alpha)}{\cos \alpha (1 + \sin \alpha)} = \frac{2}{\cos \alpha} ;$$

$$\text{г) } \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} - \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha} = \frac{\sin \alpha - \sin \alpha \cos \alpha - \sin \alpha - \sin \alpha \cos \alpha}{(1 + \cos \alpha)(1 - \cos \alpha)} =$$

$$= -\frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{1 - \cos^2 \alpha} = -\frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} = -2 \operatorname{ctg} \alpha ;$$

$$2) \text{ а) } \frac{1 + 2 \sin \alpha \cos \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} =$$

$$= \frac{(\sin \alpha + \cos \alpha)^2}{\sin \alpha + \cos \alpha} = \sin \alpha + \cos \alpha ;$$

$$\text{б) } \cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha + \sin^2 \alpha = (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) + \sin^2 \alpha =$$

$$= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha + \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha ;$$

$$\text{в) } \frac{1 + \operatorname{tg}^4 \alpha}{\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha} = \frac{1 + \operatorname{tg}^4 \alpha}{\operatorname{tg}^2 \alpha + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha}} = \frac{(1 + \operatorname{tg}^4 \alpha) \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^4 \alpha} = \operatorname{tg}^2 \alpha ;$$

$$\text{г) } \frac{\sin^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} + \frac{\cos^2 \alpha}{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha} = \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha = 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha .$$

$$2. \text{ а) } \operatorname{tg}^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} - \sin^2 \alpha = \frac{\sin^2 \alpha - \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} =$$

$$= \frac{\sin^2 \alpha (1 - \cos^2 \alpha)}{\cos^2 \alpha} = \operatorname{tg}^2 \alpha \sin^2 \alpha, \text{ ч.т.д.}$$

$$\text{б) } \frac{\sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha}{1 - \sin \alpha \cos \alpha} = \frac{(\sin \alpha + \cos \alpha)(\sin^2 \alpha - \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha)}{1 - \sin \alpha \cos \alpha} =$$

$$= \frac{(\sin \alpha + \cos \alpha)(1 - \sin \alpha \cos \alpha)}{1 - \sin \alpha \cos \alpha} = \sin \alpha + \cos \alpha, \text{ ч.т.д.}$$

$$3. \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} ;$$

$$\begin{aligned} \operatorname{ctg}^2 \alpha - \cos^2 \alpha &= \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} - \cos^2 \alpha = \cos^2 \alpha \left(\frac{1}{\sin^2 \alpha} - 1 \right) = \\ &= \cos^2 \alpha \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{16^2 \cdot 25}{25^2 \cdot 9} = \frac{256}{225} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4. \text{ а) } \frac{\sin^2 \alpha}{\operatorname{ctg}^2 \alpha - \cos^2 \alpha} &= \frac{\sin^2 \alpha}{\frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} - \cos^2 \alpha} = \frac{\sin^4 \alpha}{\cos^2 \alpha - \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha} = \\ &= \frac{\sin^4 \alpha}{\cos^2 \alpha (1 - \sin^2 \alpha)} = \frac{\sin^4 \alpha}{\cos^4 \alpha} = \operatorname{tg}^4 \alpha, \text{ ч.т.д.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6) \frac{3 \cos^2 \alpha + \sin^4 \alpha}{1 + \cos^2 \alpha + \cos^4 \alpha} &= \frac{3 \cos^2 \alpha + (1 - \cos^2 \alpha)^2}{1 + \cos^2 \alpha + \cos^4 \alpha} = \\ &= \frac{3 \cos^2 \alpha + 1 - 2 \cos^2 \alpha + \cos^4 \alpha}{1 + \cos^2 \alpha + \cos^4 \alpha} = 1, \text{ ч.т.д.} \end{aligned}$$

$$5. \frac{\sin^2 \alpha + \sin \alpha \cos \alpha}{\cos^2 \alpha + \sin \alpha \cos \alpha} = \frac{\sin \alpha (\sin \alpha + \cos \alpha)}{\cos \alpha (\cos \alpha + \sin \alpha)} = \frac{1}{\operatorname{ctg} \alpha} = \frac{1}{0,125} = 8.$$

$$\begin{aligned} 6. \frac{\sin^2 \varphi \cdot \cos^2 \varphi}{1 - \sin^6 \varphi - \cos^6 \varphi} &= \frac{\sin^2 \varphi \cdot \cos^2 \varphi}{1 - (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi)(\sin^4 \varphi - \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + \cos^4 \varphi)} = \\ &= \frac{\sin^2 \varphi \cdot \cos^2 \varphi}{1 - (\sin^4 \varphi + 2 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + \cos^4 \varphi - 3 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi)} = \\ &= \frac{\sin^2 \varphi \cdot \cos^2 \varphi}{1 - (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi)^2 + 3 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi} = \frac{1}{3}, \text{ ч.т.д.} \end{aligned}$$

$$7. y = 3 \sin^2 x - 2 \cos^2 x = 3 \sin^2 x - 2(1 - \sin^2 x) = 3 \sin^2 x - 2 + 2 \sin^2 x = 5 \sin^2 x - 2;$$

т.к. $0 \leq \sin^2 x \leq 1$, то $y_{\max} = 5 - 2 = 3$, $y_{\min} = -2$.

$$8. 2 \sin x = \sqrt{3}, \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}, x = \frac{\pi}{3}, x = 2\pi + \frac{\pi}{3} = \frac{7\pi}{3}. \text{ Ответ: } \frac{\pi}{3} \text{ и } \frac{7\pi}{3}.$$

C-42

$$1. 1) \text{ а) } \cos 225^\circ = \cos(180^\circ + 45^\circ) = \cos 180^\circ \cdot \cos 45^\circ - \sin 180^\circ \cdot \sin 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$6) \cos \frac{3}{4} \pi = \cos \left(\pi - \frac{\pi}{4} \right) = \cos \pi \cdot \cos \frac{\pi}{4} + \sin \pi \cdot \sin \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$2) \text{ а) } \cos 63^\circ \cos 18^\circ + \sin 63^\circ \sin 18^\circ = \cos(63^\circ - 18^\circ) = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\text{б) } \cos \frac{5\pi}{9} \cos \frac{13\pi}{9} - \sin \frac{5\pi}{9} \sin \frac{13\pi}{9} = \cos \left(\frac{5\pi}{9} + \frac{13\pi}{9} \right) = \cos 2\pi = 1;$$

$$\text{в) } \cos 32^\circ 30' \cos 27^\circ 30' - \sin 32^\circ 30' \sin 27^\circ 30' = \\ = \cos(32^\circ 30' + 27^\circ 30') = \cos 60^\circ = 0,5;$$

$$\text{3) а) } \cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - 0,8^2} = 0,6;$$

$$\cos \left(\frac{\pi}{4} + \alpha \right) = \cos \frac{\pi}{4} \cos \alpha - \sin \frac{\pi}{4} \sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} (0,6 + 0,8) = \frac{7\sqrt{2}}{10};$$

$$\text{б) } \sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - 0,6^2} = 0,8;$$

$$\cos \left(\alpha - \frac{\pi}{6} \right) = \cos \alpha \cos \frac{\pi}{6} + \sin \alpha \sin \frac{\pi}{6} = 0,6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 0,8 \cdot \frac{1}{2} = \frac{6\sqrt{3} + 8}{20} = \frac{3\sqrt{3} + 4}{10};$$

$$\text{в) } \cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -0,96; \quad \cos \beta = -\sqrt{1 - \cos^2 \beta} = -0,6;$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta = 0,96 \cdot 0,8 + 0,28 \cdot 0,6 = 0,936;$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta = 0,96 \cdot 0,8 - 0,28 \cdot 0,6 = 0,6;$$

$$\text{2. а) } \cos \alpha \cos 2\alpha + \sin(-\alpha) \sin 2\alpha = \cos \alpha \cos 2\alpha - \sin \alpha \sin 2\alpha = \cos(\alpha + 2\alpha) = \cos 3\alpha;$$

$$\text{б) } \cos 2\alpha \cos 3\alpha + \sin 2\alpha \sin 3\alpha = \cos(2\alpha - 3\alpha) = \cos \alpha;$$

$$\text{в) } \cos \left(\frac{\pi}{5} + \alpha \right) \cos \left(\frac{3\pi}{10} - \alpha \right) - \sin \left(\frac{\pi}{5} + \alpha \right) \sin \left(\frac{3\pi}{10} - \alpha \right) =$$

$$= \cos \left(\frac{\pi}{5} + \alpha + \frac{3\pi}{10} - \alpha \right) = \cos \frac{5\pi}{10} = \cos \frac{\pi}{2} = 0;$$

$$\text{г) } \sin \left(\frac{9}{7}\pi + \alpha \right) \sin \left(\frac{2}{7}\pi + \alpha \right) - \cos \left(\frac{9}{7}\pi + \alpha \right) \cos \left(\frac{2}{7}\pi + \alpha \right) =$$

$$= \cos \left(\frac{9}{7}\pi + \alpha - \frac{2}{7}\pi - \alpha \right) = \cos \pi = -1;$$

$$\text{д) } \cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \cos \left(\frac{\pi}{2} - \beta \right) - \cos(\alpha - \beta) =$$

$$= \sin \alpha \sin \beta - (\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta) = \cos \alpha \cos \beta.$$

$$\text{3. } \cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta) = (\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta)(\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta) =$$

$$= \cos^2 \alpha \cos^2 \beta - \sin^2 \alpha \sin^2 \beta = \cos^2 \alpha \cos^2 \beta - (1 - \cos^2 \alpha)(1 - \cos^2 \beta) =$$

$$= \cos^2 \alpha \cos^2 \beta - 1 + \cos^2 \beta - \cos^2 \alpha \cos^2 \beta = \cos^2 \alpha - \sin^2 \beta, \quad \text{ч.т.д.}$$

$$\text{4. а) } \cos \left(\frac{3\pi}{2} - \alpha \right) = \cos \frac{3\pi}{2} \cos \alpha + \sin \frac{3\pi}{2} \sin \alpha = -\sin \alpha, \quad \text{ч.т.д.}$$

$$\text{б) } \cos(\pi + \alpha) = \cos \pi \cdot \cos \alpha - \sin \pi \cdot \sin \alpha = -\cos \alpha, \quad \text{ч.т.д.}$$

$$\begin{aligned}
 5. \text{ a) } \cos\left(\frac{2}{3}\pi + \alpha\right) + \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right) &= \cos\frac{2}{3}\pi \cdot \cos\alpha - \sin\frac{2}{3}\pi \cdot \sin\alpha + \cos\alpha \cdot \cos\frac{\pi}{3} + \\
 &+ \sin\alpha \cdot \sin\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}\cos\alpha - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha + \frac{1}{2}\cos\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha = 0; \\
 \text{б) } \frac{\cos(\alpha - \beta) - \cos\alpha \cos\beta}{\cos(\alpha + \beta) + \sin\alpha \sin\beta} &= \frac{\cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta - \cos\alpha \cos\beta}{\cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta + \sin\alpha \sin\beta} = \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta.
 \end{aligned}$$

C-43

$$\begin{aligned}
 1. \text{ 1) a) } \sin 75^\circ &= \sin(45^\circ + 30^\circ) = \sin 45^\circ \cdot \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \cdot \sin 30^\circ = \\
 &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3} + 1)}{4};
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{б) } \sin \frac{\pi}{12} &= \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} - \cos \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4} = \\
 &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1)}{4};
 \end{aligned}$$

$$2) \text{ a) } \sin 80^\circ \cdot \cos 20^\circ - \cos 80^\circ \sin 20^\circ = \sin(80^\circ - 20^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\text{б) } \sin \frac{3\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} \sin \frac{4\pi}{7} = \sin\left(\frac{3\pi}{7} + \frac{4\pi}{7}\right) = \sin \pi = 0;$$

$$\begin{aligned}
 \text{в) } \sin 43^\circ 30' \cdot \cos 88^\circ 30' - \cos 43^\circ 30' \sin 88^\circ 30' &= \\
 = \sin(43^\circ 30' - 88^\circ 30') &= \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2};
 \end{aligned}$$

$$3) \text{ a) } \sin \alpha = -\sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \frac{25}{269}} = -\frac{12}{13};$$

$$\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right) = \sin \alpha \cdot \cos \frac{\pi}{3} - \cos \alpha \cdot \sin \frac{\pi}{3} = -\frac{12}{13} \cdot \frac{1}{2} + \frac{5}{13} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{5\sqrt{3} - 12}{26};$$

$$\text{б) } \cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\sqrt{1 - 0,6^2} = -0,8;$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = \sin \frac{\pi}{4} \cdot \cos \alpha + \cos \frac{\pi}{4} \cdot \sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} (-0,8 + 0,6) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{5} = -\frac{\sqrt{2}}{10};$$

$$\text{в) } \sin \alpha = -\sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{9}{16}} = \frac{\sqrt{7}}{4}; \quad \sin \beta = \sqrt{1 - \cos^2 \beta} = \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \frac{3}{5};$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \sin \beta = -\frac{\sqrt{7}}{4} \cdot \frac{4}{5} - \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{5} = \frac{-4\sqrt{7} - 9}{20};$$

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta=-\frac{\sqrt{7}\cdot 4}{20}+\frac{9}{20}=\frac{9-4\sqrt{7}}{20}.$$

2. a) $\sin 2\alpha\cos\alpha-\cos 2\alpha\sin\alpha=\sin(2\alpha-\alpha)=\sin\alpha;$

б) $\sin\alpha\cdot\cos 2\alpha-\cos(-\alpha)\sin(-2\alpha)=\sin\alpha\cdot\cos 2\alpha+\cos\alpha\sin 2\alpha=\sin(\alpha+2\alpha)=\sin 3\alpha;$

в) $\sin\left(\frac{2\pi}{3}-\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)-\cos\left(\frac{2\pi}{3}-\alpha\right)\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=$

$$=\sin\left(\frac{2\pi}{3}-\alpha-\frac{\pi}{3}-\alpha\right)=\sin\left(\frac{\pi}{3}-2\alpha\right);$$

г) $\sin(\alpha+\beta)-\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)\sin(-\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\beta=$

$$=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta-\cos\alpha\sin\beta=\sin\alpha\cos\beta.$$

3. $\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}=\frac{\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}=\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta,$ ч.т.д.

4. $\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)}=\frac{\sin\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta}=$

$$\frac{\sin\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}, \text{ ч.т.д.}$$

5. $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}=\frac{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}}{1-\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}}=\frac{1\cdot 9}{7}=1\frac{2}{7}.$

6. а) $\frac{\operatorname{tg} 43^\circ+\operatorname{tg} 17^\circ}{1-\operatorname{tg} 43^\circ\operatorname{tg} 17^\circ}=\operatorname{tg}(43^\circ+17^\circ)=\operatorname{tg} 60^\circ=\sqrt{3};$

б) $\frac{\operatorname{tg}\frac{9\pi}{16}-\operatorname{tg}\frac{5\pi}{16}}{1+\operatorname{tg}\frac{9\pi}{16}\operatorname{tg}\frac{5\pi}{16}}=\operatorname{tg}\left(\frac{9\pi}{16}-\frac{5\pi}{16}\right)=\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=1.$

7. а) $\operatorname{tg} 135^\circ=\operatorname{tg}(180^\circ-45^\circ)=\frac{\operatorname{tg} 180^\circ-\operatorname{tg} 45^\circ}{1+\operatorname{tg} 180^\circ\operatorname{tg} 45^\circ}=\frac{-1}{1}=-1;$

б) $\operatorname{ctg} 120^\circ=\operatorname{ctg}(90^\circ+30^\circ)=\frac{\operatorname{ctg} 90^\circ\cdot\operatorname{ctg} 30^\circ-1}{\operatorname{ctg} 90^\circ+\operatorname{ctg} 30^\circ}=-\frac{1}{\sqrt{3}};$

в) $\operatorname{tg}(-240^\circ)=-\operatorname{tg} 240^\circ=-\operatorname{tg}(180^\circ+60^\circ)=-\frac{\operatorname{tg} 180^\circ+\operatorname{tg} 60^\circ}{1-\operatorname{tg} 180^\circ\operatorname{tg} 60^\circ}=-\frac{\sqrt{3}}{1}=-\sqrt{3}.$

C-44

1. 1) а) $2\sin 75^\circ \cos 75^\circ = \sin(2 \cdot 75^\circ) = \sin 150^\circ = \sin(180^\circ - 30^\circ) = \sin 30^\circ = 0,5;$

б) $2\sin \frac{\pi}{8} \cos \frac{\pi}{8} = \sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{8}\right) = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2};$

в) $\sin 15^\circ \cos 15^\circ = \frac{1}{2} \sin(2 \cdot 15^\circ) = \frac{1}{2} \sin 30^\circ = 0,25;$

г) $\left(\cos \frac{\pi}{8} + \sin \frac{\pi}{8}\right)^2 = \cos^2 \frac{\pi}{8} + 2\cos \frac{\pi}{8} \sin \frac{\pi}{8} + \sin^2 \frac{\pi}{8} = 1 + \sin \frac{\pi}{4} = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2};$

д) $\left(\sin \frac{\pi}{12} - \cos \frac{\pi}{12}\right)^2 = \sin^2 \frac{\pi}{12} - 2\sin \frac{\pi}{12} \cos \frac{\pi}{12} + \cos^2 \frac{\pi}{12} = 1 - \sin \frac{\pi}{6} = 0,5;$

е) $\cos^2 75^\circ - \sin^2 75^\circ = \cos(2 \cdot 75^\circ) = \cos 150^\circ = \cos(180^\circ - 30^\circ) = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2};$

ж) $\cos^2 \frac{\pi}{8} - \sin^2 \frac{\pi}{8} = \cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{8}\right) \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2};$

з) $1 - 2 \cos^2 \frac{\pi}{12} = -(2 \cos^2 \frac{\pi}{12} - 1) = -\cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{12}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2};$

2) а) $\cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\sqrt{1 - 0,6^2} = -0,8;$
 $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha = 2 \cdot 0,6 \cdot 0,8 = 0,96;$

б) $\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{225}{289}} = \frac{8}{17}; \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha = 2 \cdot \frac{8}{17} \cdot \frac{15}{17} = -\frac{240}{289};$

в) $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1 + 2,4^2}} = \frac{1}{2,6}; \sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{1}{2,6^2}} = \frac{2,4}{2,6};$

$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{2 \cdot 2,4}{2,6 \cdot 2,6} = \frac{12}{13 \cdot 1,3} = \frac{120}{169};$

3) а) $\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 1 - 2 \cdot \frac{25}{169} = \frac{119}{169};$ б) $\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 2 \cdot \frac{1}{9} - 1 = -\frac{7}{9};$

в) $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1 + 2,25}} = \frac{1}{\sqrt{3,25}};$

$\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 2 \cdot \frac{1}{3,25} - 1 = -\frac{1,25}{3,25} = -\frac{5}{13}.$

2. 1) а) $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{2 \cdot 1,5}{1 - 2,25} = \frac{3}{-1,25} = -\frac{12}{5};$ б) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg} \alpha} = \frac{3}{\sqrt{2}};$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{2 \cdot \frac{3}{\sqrt{2}}}{1-\frac{9}{4}} = -\frac{6 \cdot 4}{\sqrt{2} \cdot 5} = -\frac{24}{5\sqrt{2}} = -\frac{24\sqrt{2}}{5 \cdot 2} = -\frac{12\sqrt{2}}{5};$$

$$2) \cos\alpha = -\sqrt{1-\sin^2\alpha} = -\sqrt{1-\frac{4}{25}} = -\frac{\sqrt{21}}{5};$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = -2 \cdot \frac{\sqrt{21}}{5} \cdot \frac{2}{5} = -\frac{4\sqrt{21}}{5}; \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\frac{2 \cdot 5}{5 \cdot \sqrt{21}} = -\frac{2}{\sqrt{21}};$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} = -\frac{4}{\sqrt{21}\left(1-\frac{4}{21}\right)} = -\frac{4 \cdot 21}{17\sqrt{21}} = -\frac{4\sqrt{21}}{17}.$$

$$3. \text{ а) } \frac{2\operatorname{tg} 75^\circ}{1-\operatorname{tg}^2 75^\circ} = \operatorname{tg}(2 \cdot 75^\circ) = \operatorname{tg} 150^\circ = \operatorname{tg}(180^\circ - 30^\circ) = -\operatorname{tg} 30^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}};$$

$$\text{б) } \frac{2\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}}{\cos^2\frac{\pi}{8}-\sin^2\frac{\pi}{8}} = \frac{\sin\frac{\pi}{6}}{\cos\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$4. \text{ а) } \cos\alpha - \sin\alpha = -\frac{1}{2}; (\cos\alpha - \sin\alpha)^2 = \left(-\frac{1}{2}\right)^2; \cos^2\alpha - 2\sin\alpha\cos\alpha + \sin^2\alpha = \frac{1}{4};$$

$$1 - \sin 2\alpha = \frac{1}{4}, \sin 2\alpha = \frac{3}{4}; \text{ б) } \cos\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}; \left(\cos\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2;$$

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} + 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = \sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{4}; 1 + \sin\alpha = \frac{1}{4}, \sin\alpha = -\frac{3}{4}.$$

C-45

$$1. \text{ а) } 1 - \cos 2\alpha = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha - (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = 2\sin^2\alpha;$$

$$\text{б) } \frac{1 + \cos\alpha}{\cos\alpha} - \cos\alpha, \text{ вероятно, в задачнике опечатка, упростите следующее}$$

$$\text{выражение: } \frac{1 + \cos 2\alpha}{\cos\alpha} - \cos\alpha = \frac{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha + \cos^2\alpha - \sin^2\alpha - \cos^2\alpha}{\cos\alpha} = \cos\alpha;$$

$$\text{в) } 1 - 2\sin^2\alpha + \cos 2\alpha = \cos 2\alpha + \cos 2\alpha = 2\cos 2\alpha; \text{ г) } \frac{1 - \cos 2\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{2\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha} = 2;$$

$$\text{д) } (1 - \cos 2\alpha)\operatorname{ctg}\alpha = 2\sin^2\alpha \cdot \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = 2\sin\alpha\cos\alpha = \sin 2\alpha;$$

$$\text{е) } (\sin\alpha - \cos\alpha)^2 = \sin^2\alpha - 2\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha = 1 - \sin 2\alpha;$$

$$\text{ж) } \cos^2\alpha - \cos^2\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos 2\alpha;$$

$$\text{з) } \cos^2\alpha - \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = \sin^2\alpha;$$

$$\text{н) } \operatorname{tg}^2 \alpha (1 + \cos 2\alpha)^2 = \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} (2\cos^2 \alpha)^2 = \frac{4\sin^2 \alpha \cdot \cos^4 \alpha}{\cos^2 \alpha} =$$

$$= 4\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = (2\sin \alpha \cos \alpha)^2 = \sin^2 2\alpha;$$

$$\text{к) } \frac{\cos \alpha - \sin \alpha}{\cos 2\alpha - \sin 2\alpha + 2\sin^2 \alpha} = \frac{\cos \alpha - \sin \alpha}{1 - 2\sin^2 \alpha - \sin 2\alpha + 2\sin^2 \alpha} =$$

$$= \frac{\cos \alpha - \sin \alpha}{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha - 2\cos \alpha \sin \alpha} = \frac{\cos \alpha - \sin \alpha}{(\cos \alpha - \sin \alpha)^2} = \frac{1}{\cos \alpha - \sin \alpha}.$$

$$\text{2. а) } \frac{1 + 2\sin \alpha \cos \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha + 2\sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} =$$

$$= \frac{(\sin \alpha + \cos \alpha)^2}{\sin \alpha + \cos \alpha} = \sin \alpha + \cos \alpha, \text{ ч.т.д.}$$

$$\text{б) } \frac{1 - \cos 4\alpha}{1 + \cos 4\alpha} = \frac{2\sin^2 2\alpha}{2\cos^2 2\alpha} = \operatorname{tg}^2 2\alpha, \text{ ч.т.д.}$$

$$\text{3. а) } \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha - (1 - \cos^2 \alpha) = 2\cos^2 \alpha - 1;$$

$$\text{б) } \cos \alpha = \cos \left(2 \cdot \frac{\alpha}{2} \right) = 2\cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1.$$

$$\text{4. а) } \frac{\cos(90^\circ - \alpha)}{\sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin \alpha}{\sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{2\sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} = 2\cos \frac{\alpha}{2};$$

$$\text{б) } \sin 20^\circ \cdot \sin 70^\circ = \sin 20^\circ \cdot \sin(90^\circ - 20^\circ) = \sin 20^\circ \cdot \cos 20^\circ = \frac{1}{2} \sin 40^\circ;$$

$$\text{в) } \sin \alpha \sin(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha;$$

$$\text{г) } \frac{\sin 160^\circ}{\cos^4 10^\circ - \sin^4 10^\circ} = \frac{\sin(180^\circ - 20^\circ)}{(\cos^2 10^\circ + \sin^2 10^\circ)(\cos^2 10^\circ - \sin^2 10^\circ)} = \frac{\sin 20^\circ}{\cos 20^\circ} = \operatorname{tg} 20^\circ;$$

$$\text{д) } \frac{1 - \operatorname{tg}^2 15^\circ}{2\operatorname{tg} 15^\circ} = \frac{1}{\operatorname{tg} 30^\circ} = \operatorname{ctg} 30^\circ = \sqrt{3}.$$

$$\text{5. а) } \frac{1 - \cos 2\alpha + \sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha + \sin 2\alpha} = \frac{2\sin^2 \alpha + 2\sin \alpha \cos \alpha}{2\cos^2 \alpha + 2\sin \alpha \cos \alpha} = \frac{\sin \alpha (\sin \alpha + \cos \alpha)}{\cos \alpha (\cos \alpha + \sin \alpha)} = \operatorname{tg} \alpha,$$

ч.т.д.

$$\text{б) } \frac{\operatorname{tg}^2(45^\circ + \alpha) - 1}{\operatorname{tg}^2(45^\circ + \alpha) + 1} = \cos^2(45^\circ + \alpha) \left(\frac{\sin^2(45^\circ + \alpha)}{\cos^2(45^\circ + \alpha)} - 1 \right) = \sin^2(45^\circ + \alpha) - \cos^2(45^\circ +$$

$$+ \alpha) = -\cos(2(45^\circ + \alpha)) = -\cos(90^\circ + 2\alpha) = \sin 2\alpha, \text{ ч.т.д.}$$

$$\text{6. а) } \sin 18^\circ \cdot \sin 36^\circ = \frac{2\sin 18^\circ \cdot \cos 18^\circ \cdot \cos 36^\circ}{2\cos 18^\circ} = \frac{2\sin 36^\circ \cdot \cos 36^\circ}{4\cos 18^\circ} = \frac{\sin 72^\circ}{4\cos 18^\circ} =$$

$$= \frac{\sin(90^\circ - 18^\circ)}{4\cos 18^\circ} = \frac{\cos 18^\circ}{4\cos 18^\circ} = \frac{1}{4}, \text{ ч.т.д.}$$

$$\text{б) } 8\cos \frac{\pi}{7} \cos \frac{2\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7} = \frac{8\cos \frac{\pi}{7} \sin \frac{\pi}{7} \cos \frac{2\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7}}{\sin \frac{\pi}{7}} = \frac{4\sin \frac{2\pi}{7} \cos \frac{2\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7}}{\sin \frac{\pi}{7}}$$

$$= \frac{2\sin \frac{4\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7}}{\sin \frac{\pi}{7}} = \frac{\sin \frac{8\pi}{7}}{\sin \frac{\pi}{7}} = \frac{\sin\left(\pi + \frac{\pi}{7}\right)}{\sin \frac{\pi}{7}} = -\frac{\sin \frac{\pi}{7}}{\sin \frac{\pi}{7}} = -1, \text{ ч.т.д.}$$

C-46

$$\text{1. а) } \sin 945^\circ = \sin(720^\circ + 225^\circ) = \sin 225^\circ = \sin(180^\circ + 45^\circ) = -\sin 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\text{б) } \cos 135^\circ = \cos(90^\circ + 45^\circ) = -\sin 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\text{в) } \operatorname{tg} 225^\circ = \operatorname{tg}(180^\circ + 45^\circ) = \operatorname{tg} 45^\circ = 1; \text{ р) } \operatorname{ctg} 210^\circ = \operatorname{ctg}(270^\circ - 60^\circ) = \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3};$$

$$\text{д) } \sin \frac{15\pi}{4} = \sin\left(4\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\sin \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\text{е) } \cos \frac{7\pi}{6} = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\cos \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}; \text{ ж) } \operatorname{tg} \frac{5\pi}{3} = \operatorname{tg}\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = -\sqrt{3};$$

$$\text{з) } \operatorname{ctg} \frac{2\pi}{3} = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right) = -\operatorname{tg} \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{\sqrt{3}};$$

$$\text{и) } \sin(-960^\circ) = \sin 960^\circ = \sin(720^\circ + 240^\circ) = \sin 240^\circ = \sin(180^\circ + 60^\circ) = -\sin 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\text{к) } \cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = \cos \frac{2\pi}{3} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\cos \frac{\pi}{3} = -0,5;$$

$$\text{л) } \operatorname{tg}\left(-\frac{7\pi}{3}\right) = -\operatorname{tg} \frac{7\pi}{3} = -\operatorname{tg}\left(2\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = -\sqrt{3};$$

$$\text{м) } \operatorname{ctg}(-420^\circ) = \operatorname{ctg} 420^\circ = \operatorname{ctg}(360^\circ + 60^\circ) = \operatorname{ctg} 60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

$$\begin{aligned} \text{2. а) } & \sin(-570^\circ) + \sqrt{3} \cos 150^\circ + \operatorname{tg} 315^\circ = -\sin(360^\circ + 210^\circ) + \sqrt{3} \cos(180^\circ - 30^\circ) + \\ & + \operatorname{tg}(360^\circ - 45^\circ) = -\sin(180^\circ + 30^\circ) - \sqrt{3} \cos 30^\circ - \operatorname{tg} 45^\circ = \sin 30^\circ - \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 = \\ & = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} - 1 = -2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{б)} \sin 210^\circ + \cos(-480^\circ) - \sqrt{3} \operatorname{ctg} 480^\circ &= \sin(180^\circ + 30^\circ) + \cos 120^\circ - \sqrt{3} \operatorname{ctg} 120^\circ = \\ &= -\sin 30^\circ + \cos(90^\circ + 30^\circ) - \sqrt{3} \operatorname{ctg}(90^\circ + 30^\circ) = -0,5 - \sin 30^\circ + \sqrt{3} \operatorname{tg} 30^\circ = \\ &= -1 + \sqrt{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{в)} \operatorname{tg} \frac{7\pi}{4} + \sin\left(-\frac{7\pi}{6}\right) - 2\cos\left(-\frac{11\pi}{6}\right) &= \operatorname{tg}\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) - 2\cos\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \\ &= \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{6} - 2\cos \frac{\pi}{6} = 1 + 0,5 - 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -0,5 - \sqrt{3}. \end{aligned}$$

$$\text{3. а)} 1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \sin(\pi - \alpha) = 1 - \sin \alpha \sin \alpha = \cos^2 \alpha;$$

$$\text{б)} \cos(\pi - \alpha) \cos(2\pi - \alpha) + \cos^2 \alpha = -\cos \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha = 0;$$

$$\text{в)} \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha; \text{ г)} \sin(\alpha - \pi) = -\sin(\pi - \alpha) = -\sin \alpha;$$

$$\text{д)} \operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = -\operatorname{ctg} \alpha;$$

$$\text{е)} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \sin(-2\alpha)}{2\operatorname{tg}(\pi + \alpha)} = \frac{-\cos \alpha \sin 2\alpha}{2\operatorname{tg} \alpha} = -\frac{2\sin \alpha \cos^2 \alpha \cos \alpha}{2\sin \alpha} = -\cos^3 \alpha;$$

$$\text{ж)} \cos(2\pi - \alpha) \cos(2\pi + \alpha) - \sin^2 \alpha = \cos \alpha \cos \alpha - \sin^2 \alpha = \cos 2\alpha;$$

$$\text{з)} \cos^2(\pi - \alpha) + \sin(2\pi - \alpha) \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos^2 \alpha - \sin \alpha \sin \alpha = \cos 2\alpha.$$

$$\begin{aligned} \text{4. а)} \frac{\sin(x - \pi) \sin(0,5\pi + x)}{\operatorname{ctg}(0,5\pi - x) \cos(1,5\pi - x) \cos(0,5\pi + x)} &= \frac{-\sin x \cos x}{\operatorname{tg} x \sin x \sin x} = \\ &= -\frac{\cos x \cos x}{\sin x \sin x} = -\operatorname{ctg}^2 x, \text{ ч.т.д.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{б)} \sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) &= \sin \frac{\pi}{4} \cos \alpha - \cos \frac{\pi}{4} \sin \alpha - \cos \frac{\pi}{4} \cos \alpha + \sin \frac{\pi}{4} \sin \alpha = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos \alpha - \sin \alpha - \cos \alpha + \sin \alpha) = 0, \text{ ч.т.д.} \end{aligned}$$

$$\text{6. } \cos \alpha = -0,6; \cos \beta = \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha = 0,6.$$

7. Пусть α и β — острые углы прямоугольного треугольника. Тогда:
 $\alpha + \beta = 90^\circ$, $\beta = 90^\circ - \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$. Ответ: 1.

C-47

$$\text{1. 1) а)} \sin 36^\circ + \sin 24^\circ = 2\sin \frac{36^\circ + 24^\circ}{2} \cos \frac{36^\circ - 24^\circ}{2} = 2\sin 30^\circ \cos 6^\circ = \cos 6^\circ;$$

$$\begin{aligned}
\text{б) } \sin 18^\circ + \sin 11^\circ &= 2\sin \frac{18^\circ + 11^\circ}{2} \cos \frac{18^\circ - 11^\circ}{2} = 2\sin 14,5^\circ \cos 3,5^\circ; \\
\text{в) } \sin 6^\circ + \sin 14^\circ &= 2\sin \frac{6^\circ + 14^\circ}{2} \cos \frac{14^\circ - 6^\circ}{2} = 2\sin 10^\circ \cos 4^\circ; \\
\text{г) } \sin \frac{5\pi}{6} + \sin \frac{\pi}{6} &= 2\sin \frac{\frac{5\pi}{6} + \frac{\pi}{6}}{2} \cos \frac{\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{6}}{2} = 2\sin \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{3} = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1; \\
\text{2) а) } \sin 72^\circ - \sin 52^\circ &= 2\sin \frac{72^\circ - 52^\circ}{2} \cos \frac{72^\circ + 52^\circ}{2} = 2\sin 10^\circ \cos 62^\circ; \\
\text{б) } \sin 16^\circ - \sin 7^\circ &= 2\sin \frac{16^\circ - 7^\circ}{2} \cos \frac{16^\circ + 7^\circ}{2} = 2\sin 4,5^\circ \cos 11,5^\circ; \\
\text{в) } \sin 13^\circ - \sin 23^\circ &= 2\sin \frac{13^\circ - 23^\circ}{2} \cos \frac{13^\circ + 23^\circ}{2} = -2\sin 5^\circ \cos 18^\circ; \\
\text{г) } \sin \frac{\pi}{6} - \sin \frac{\pi}{12} &= 2\sin \frac{\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{12}}{2} \cos \frac{\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{12}}{2} = 2\sin \frac{\pi}{24} \cos \frac{\pi}{8}; \\
\text{3) а) } \cos 18^\circ + \cos 8^\circ &= 2\cos \frac{18^\circ + 8^\circ}{2} \cos \frac{18^\circ - 8^\circ}{2} = 2\cos 13^\circ \cos 5^\circ; \\
\text{б) } \cos 7^\circ + \cos 4^\circ &= 2\cos \frac{7^\circ + 4^\circ}{2} \cos \frac{7^\circ - 4^\circ}{2} = 2\cos 5,5^\circ \cos 1,5^\circ; \\
\text{в) } \cos 16^\circ + \cos 66^\circ &= 2\cos \frac{16^\circ + 66^\circ}{2} \cos \frac{16^\circ - 66^\circ}{2} = 2\cos 41^\circ \cos 25^\circ; \\
\text{г) } \cos \frac{3\pi}{8} + \cos \frac{\pi}{8} &= 2\cos \frac{\frac{3\pi}{8} + \frac{\pi}{8}}{2} \cos \frac{\frac{3\pi}{8} - \frac{\pi}{8}}{2} = 2\cos \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{8}; \\
\text{4) а) } \cos 36^\circ - \cos 26^\circ &= -2\sin \frac{36^\circ + 26^\circ}{2} \sin \frac{36^\circ - 26^\circ}{2} = -2\sin 31^\circ \sin 5^\circ; \\
\text{б) } \cos 17^\circ - \cos 10^\circ &= -2\sin \frac{17^\circ + 10^\circ}{2} \sin \frac{17^\circ - 10^\circ}{2} = -2\sin 13,5^\circ \sin 3,5^\circ; \\
\text{в) } \cos 5^\circ - \cos 15^\circ &= -2\sin \frac{5^\circ + 15^\circ}{2} \sin \frac{5^\circ - 15^\circ}{2} = 2\sin 10^\circ \sin 5^\circ; \\
\text{г) } \cos \frac{2\pi}{5} - \cos \frac{\pi}{5} &= -2\sin \frac{\frac{2\pi}{5} + \frac{\pi}{5}}{2} \sin \frac{\frac{2\pi}{5} - \frac{\pi}{5}}{2} = -2\sin \frac{3\pi}{10} \sin \frac{\pi}{10}. \\
\text{2. 1) а) } \sin 5\alpha + \sin 3\alpha &= 2\sin 4\alpha \cos \alpha; \text{ б) } \sin 8\alpha - \sin 4\alpha = 2\sin 2\alpha \cos 6\alpha; \\
\text{в) } \cos 27\alpha + \cos 17\alpha &= 2\cos 22\alpha \cos 5\alpha; \text{ г) } \cos 4\alpha - \cos \alpha = -2\sin \frac{5\alpha}{2} \sin \frac{3\alpha}{2}; \\
\text{2) а) } \sin(15^\circ + \alpha) + \sin(15^\circ - \alpha) &=
\end{aligned}$$

$$=2\sin\frac{15^\circ+\alpha+15^\circ-\alpha}{2}\cos\frac{15^\circ+\alpha-15^\circ+\alpha}{2}=2\sin15^\circ\cos\alpha;$$

$$\text{б) } \sin(60^\circ-\beta)-\sin(60^\circ+\beta)=2\sin\frac{60^\circ-\beta-60^\circ-\beta}{2}\cos\frac{60^\circ-\beta+60^\circ+\beta}{2} =$$

$$=2\sin\beta\cos60^\circ=-\sin\beta;$$

$$\text{в) } \cos(17^\circ+x)+\cos(17^\circ-x)=$$

$$=2\cos\frac{17^\circ+x+17^\circ-x}{2}\cos\frac{17^\circ+x-17^\circ+x}{2}=2\cos17^\circ\cos x;$$

$$\text{г) } \cos(40^\circ-\alpha)-\cos(40^\circ+\alpha)=$$

$$=2\sin\frac{40^\circ-\alpha+40^\circ+\alpha}{2}\sin\frac{40^\circ-\alpha-40^\circ-\alpha}{2}=2\sin40^\circ\sin\alpha;$$

$$\text{д) } \sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=2\sin\frac{\alpha+\beta+\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta-\alpha+\beta}{2}=2\sin\alpha\cos\beta;$$

$$\text{е) } \cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)=-2\sin\frac{\alpha+\beta-\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta+\alpha-\beta}{2}=-2\sin\beta\sin\alpha.$$

$$\text{3. а) } \frac{\sin 7\alpha + \sin \alpha}{\cos 7\alpha + \cos \alpha} = \frac{2\sin 4\alpha \cos 3\alpha}{2\cos 4\alpha \cos 3\alpha} = \text{tg}4\alpha;$$

$$\text{б) } \frac{\cos 4\alpha + \cos 6\alpha}{\cos \alpha + \cos 9\alpha} = \frac{2\cos 5\alpha \cos \alpha}{2\cos 5\alpha \cos 4\alpha} = \frac{\cos \alpha}{\cos 4\alpha};$$

$$\text{в) } \frac{\sin 11\alpha - \sin \alpha}{\cos 11\alpha - \cos \alpha} = \frac{2\sin 5\alpha \cos 6\alpha}{-2\sin 5\alpha \sin 6\alpha} = -\text{ctg}6\alpha;$$

$$\text{г) } \frac{\cos 7\alpha - \cos 3\alpha}{\sin 7\alpha + \sin 3\alpha} = \frac{-2\sin 2\alpha \sin 5\alpha}{2\sin 5\alpha \cos 2\alpha} = -\text{tg}2\alpha.$$

$$\text{4. а) } \sin^2 43^\circ - \sin^2 13^\circ = (\sin 43^\circ - \sin 13^\circ)(\sin 43^\circ + \sin 13^\circ) =$$

$$=2\sin 15^\circ \cos 28^\circ \cdot 2\sin 28^\circ \cos 15^\circ = \sin 30^\circ \cdot \sin 56^\circ = 0,5\sin 56^\circ;$$

$$\text{б) } \cos^2 37^\circ - \cos^2 17^\circ = (\cos 37^\circ - \cos 17^\circ)(\cos 37^\circ + \cos 17^\circ) =$$

$$=2\sin 10^\circ \sin 27^\circ \cdot 2\cos 27^\circ \cos 10^\circ = \sin 20^\circ \cdot \sin 54^\circ.$$

т.е. равенство верно.

$$\text{б) } \frac{\sin 72^\circ - \sin 62^\circ}{\cos 72^\circ + \cos 62^\circ} = \frac{2\sin 5^\circ \cos 67^\circ}{2\cos 67^\circ \cos 5^\circ} = \text{tg}5^\circ = \text{tg}(90^\circ - 85^\circ) = \text{ctg}85^\circ,$$

т.е. равенство верно.

$$\text{6. а) } \frac{\sin 3\alpha + \sin 7\alpha}{\cos 3\alpha + \cos 7\alpha} = \frac{2\sin 5\alpha \cos 2\alpha}{2\cos 5\alpha \cos 2\alpha} = \text{tg}5\alpha = \text{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - 5\alpha\right), \text{ ч.т.д.}$$

$$\text{б) } \frac{\sin \beta + \sin 3\beta + \sin 5\beta + \sin 7\beta}{\cos \beta + \cos 3\beta + \cos 5\beta + \cos 7\beta} = \frac{2\sin 4\beta \cos 3\beta + 2\sin 4\beta \cos \beta}{2\cos 4\beta \cos 3\beta + 2\cos 4\beta \cos \beta} =$$

$$= \frac{\sin 4\beta(\cos 3\beta + \cos \beta)}{\cos 4\beta(\cos 3\beta + \cos \beta)} = \text{tg}4\beta, \text{ ч.т.д.}$$

$$\begin{aligned} \text{в)} \frac{\cos \alpha + \sin \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha} &= \frac{\cos \alpha + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \sin \alpha} = \frac{2 \cos \frac{\pi}{4} \cdot \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)}{2 \sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) \cdot \cos \frac{\pi}{4}} = \\ &= \frac{\cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)} = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right), \quad \text{ч.т.д.} \end{aligned}$$

$$\text{г)} \frac{\operatorname{ctg} \alpha + 1}{\operatorname{ctg} \alpha - 1} = \frac{\cos \alpha + \sin \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha} = \frac{\cos \alpha + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \sin \alpha} = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right), \quad \text{ч.т.д.}$$

$$\begin{aligned} \text{д)} \cos^2(\alpha - \beta) - \cos^2(\alpha + \beta) &= (\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))(\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)) = \\ &= 2 \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot 2 \cos \alpha \cdot \cos \beta = \sin 2\alpha \cdot \sin 2\beta, \quad \text{ч.т.д.} \end{aligned}$$

С-48

1. а) $\alpha=30^\circ$, $\alpha=45^\circ$, $\alpha=60^\circ$; б) $\alpha=60^\circ$, $\alpha=45^\circ$, $\alpha=30^\circ$.

2. $\sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$ $\sin\left(\pi - \frac{\pi}{12}\right) = \sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$; $\pi - \frac{\pi}{12} = \frac{11\pi}{12}$.

3. $a_n = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $b_n = \frac{\pi}{2} - \pi n$; $\cos a_n = \cos\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \pi n\right) = \sin \pi n = 0$;

$\cos b_n = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \pi n\right) = \sin \pi n = 0$, значит, любое число, являющееся членом

(a_n) или (b_n) — корень данного уравнения.

4. 1) а) $\sin x = 0$, $x = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; б) $\cos x = 1$, $x = 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$;

в) $\operatorname{tg} x = -1$, $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$;

2) а) $\sin x - 1 = 0$, $\sin x = 1$, $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; б) $\cos x = 0$, $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$;

в) $2 \operatorname{tg} x = 0$, $\operatorname{tg} x = 0$, $\frac{\sin x}{\cos x} = 0$, $\sin x = 0$, $x = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

5. а) $\sin \beta = \frac{1}{2}$, $\beta = \frac{\pi}{6}$, $\beta = \frac{5\pi}{6}$; б) $\cos \beta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\beta = \frac{3\pi}{4}$.

6. 1) а) $\sin 2x = 1$ $2x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$;

б) $\cos 3x = 0$ $3x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}$, $n \in \mathbb{Z}$;

2) а) $\sin^2 x - \sin x = 0$, $\sin x(\sin x - 1) = 0$; $\sin x = 0$, $\sin x = 1$

$x_1 = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ $x_2 = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$;

б) $\cos^2 x + \cos x = 0$ $\cos x(\cos x + 1) = 0$; $\cos x = 0$, $\cos x = -1$;

$x_1 = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ $x_2 = \pi + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$;

3) а) $\sin 2x \cos x - \cos 2x \sin x = 0$; $\sin(2x - x) = 0$, $\sin x = 0$, $x = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$;

б) $\cos x \cos 2x + \sin x \sin 2x = 0$; $\cos(x - 2x) = 0$, $\cos x = 0$, $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$;

4) а) $\cos^2 x = \cos 2x$; $\cos^2 x = 2\cos^2 x - 1$;

$\cos^2 x = 1$; $\cos x = 1$, $\cos x = -1$;

$x_1 = 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ $x_2 = \pi + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$;

б) $2\sin x = \sin 2x$; $2\sin x = 2\sin x \cos x$;

$\sin x = 0$, $\cos x = 1$; $x_1 = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; $x_2 = 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

7. а) $\cos x \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 1$; $\cos x \cdot \sin x = 1$; $\frac{1}{2} \cdot 2\sin x \cdot \cos x = 1$;

$\sin 2x = 2$ – нет корней, т.к. $-1 \leq \sin \alpha \leq 1$ для любого α .

б) $\frac{\cos 2x}{2\cos^2 x - 1} = 0$; $\frac{2\cos^2 x - 1}{2\cos^2 x - 1} = 0$;

$1 = 0$ – нет корней.

Вариант 2.

С-1.

1. 1) $f(x) = 21x - 7$, $f(3) = 21 \cdot 3 - 7 = 56$; $f(0) = 21 \cdot 0 - 7 = -7$; $f(-2) = 21 \cdot (-2) - 7 = -49$;

2) $g(x) = x^2 - 10x$; $g(8) = 8^2 - 10 \cdot 8 = -16$; $g(-3) = (-3)^2 - 10 \cdot (-3) = 39$; $g(0) = 0^2 - 10 \cdot 0 = 0$;

3) $\varphi(x) = \frac{x-6}{x+4}$; $\varphi(-3) = \frac{-3-6}{-3+4} = -9$; $\varphi(6) = \frac{6-6}{6+4} = 0$; $\varphi(0) = \frac{0-6}{0+4} = -1,5$.

2. 1) $f(x) = 12 - 5x$; а) $12 - 5x = 2$, $5x = 10$, $x = 2$; б) $12 - 5x = 24$, $5x = -12$, $x = -\frac{12}{5}$;

в) $12 - 5x = 0$; $5x = 12$, $x = \frac{12}{5}$;

2) $g(x) = \frac{1}{4}x + 9$; а) $\frac{1}{4}x + 9 = 10$, $\frac{1}{4}x = 1$, $x = 4$; б) $\frac{1}{4}x + 9 = 1$, $\frac{1}{4}x = -8$, $x = -32$;

в) $\frac{1}{4}x + 9 = 0$, $\frac{1}{4}x = -9$, $x = -36$.

3. 1) а) $f(x) = 37 - 3x$, $D(f) = \mathbb{R}$; б) $g(x) = \frac{53}{x}$, $D(g) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$;

в) $\varphi(x) = x^2 - 7$, $D(\varphi) = \mathbb{R}$; г) $y = \sqrt{x}$, $D(y) = [0; +\infty]$;

2) **a)** $g(x)=10-x^2$, $D(g)=R$; **б)** $f(x)=-\frac{42}{x}$, $D(f)=(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$;

в) $\varphi(x)=\sqrt{x-3}$, $x-3 \geq 0$, $x \geq 3$, $D(\varphi)=[3; +\infty]$; **г)** $y=\frac{12}{x+4}$, $x+4 \neq 0$; $x \neq -4$,
 $D(y)=(-\infty; -4) \cup (-4; +\infty)$.

4) **a)** $y=-24x+5$, $E(y)=R$; **б)** $y=41$, $E(y)=41$; **в)** $y=-\frac{22}{x}$, $E(y)=(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$;

г) $y=\sqrt{x}$, $E(y)=[0; +\infty)$; **д)** $y=|x|$, $E(y)=[0; +\infty)$.

5) **a)** $f(x)=\frac{x^2+5}{6x^2}$, $f(5)+f(-5)=2f(5)=2 \cdot \frac{5^2+5}{6 \cdot 5^2}=0,4$;

б) $g(x)=\frac{4x^3-x}{9}$, $g(-2)+g(2)=-g(2)+g(2)=0$.

6) $g(x)=kx+b$, $\begin{cases} 5 = k + b \\ -1 = 3k + b \end{cases}$, $\begin{cases} k = 5 - b \\ -1 = 3(5 - b) + b \end{cases}$; $-1 = 15 - 3b + b$;

$2b = 16$; $b = 8$; $k = 5 - 8 = -3$.

7) **a)** $f(x)=\frac{1}{x-1} + \frac{3}{x-4}$; **б)** $g(x)=\sqrt{x-6}$.

C-2

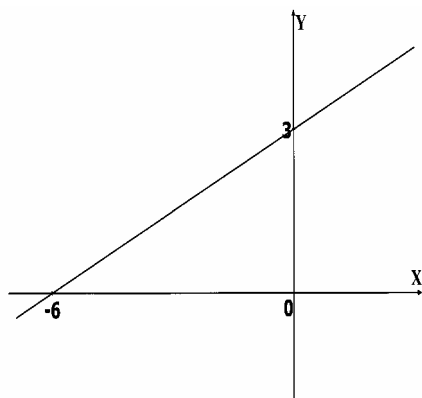
1. 1) **a)** $g(-1)=-3$; **б)** $g(0)=-1$; **в)** $g(1)=0$; **г)** $g(3)=1,5$;

2) **a)** $g(x)=3$, $x=-3$; **б)** $g(x)=0$, $x_1=-2,5$; $x_2=1$; $x_3=3,5$; **в)** $g(x)=-2$, $x_1=-2$;
 $x_2=-0,5$; **3)** $g_{\max}=3$, $g_{\min}=-3$; **4)** $E(g)=[-3; 3]$.

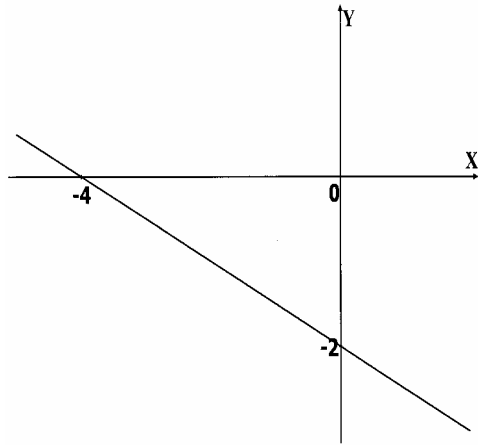
2. 1)

a) $y=0,5x+3$;

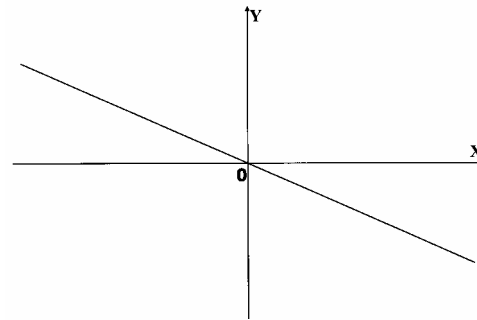
x	0	-6
y	3	0



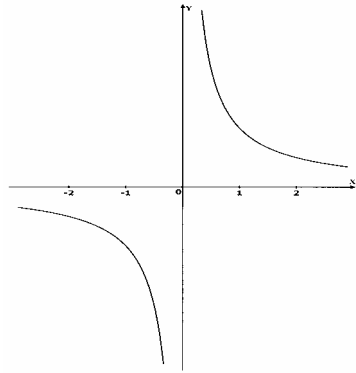
$$6) y = -0,5x - 2; \quad \begin{array}{c|c|c} x & 0 & -4 \\ \hline y & -2 & 0 \end{array}$$



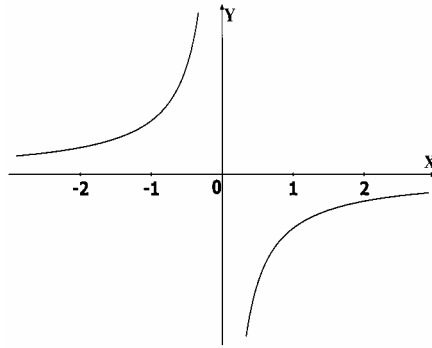
$$B) y = \frac{1}{3}x; \quad \begin{array}{c|c|c} x & 0 & -3 \\ \hline y & 0 & 1 \end{array}$$



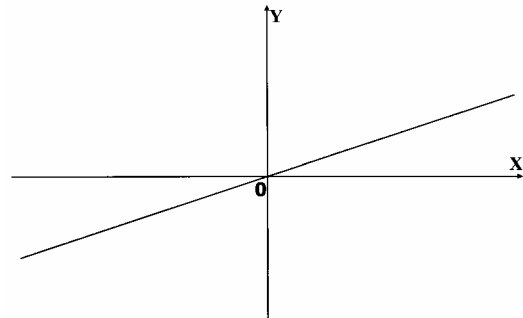
$$2) a) y = \frac{6}{x};$$



6) $y = \frac{8}{x}$;

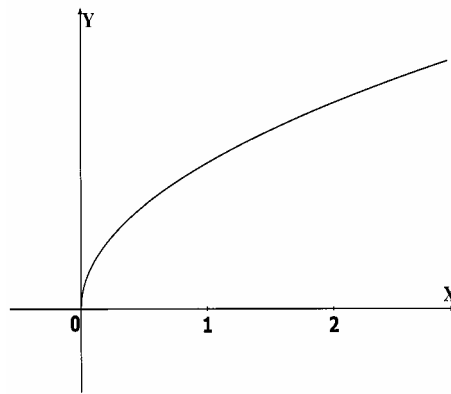
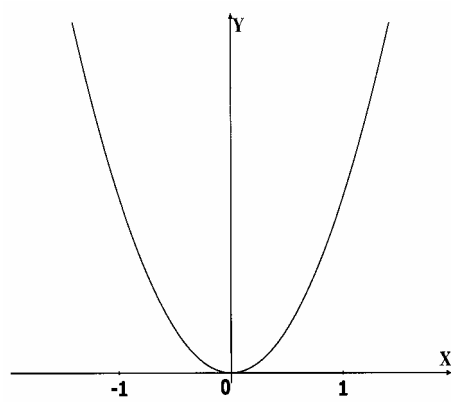


в) $y = \frac{x}{4}$;

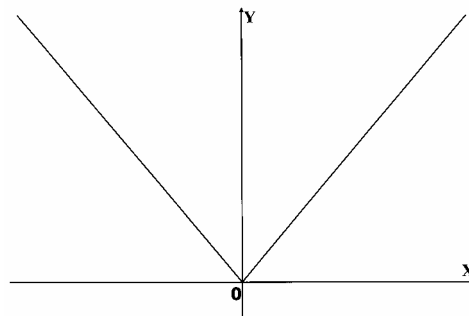


3) а) $y = x^2$;

6) $y = \sqrt{x}$, $x \geq 0$;

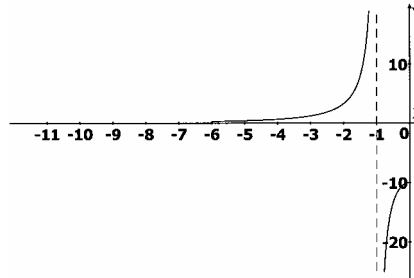


в) $y = |x|$.



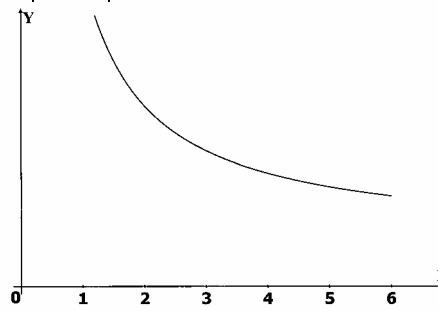
3. а) $y = \frac{10}{x^2 - 1}, -6 \leq x \leq 0;$

x	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0
y	$\frac{2}{7}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{10}{3}$	-	-10

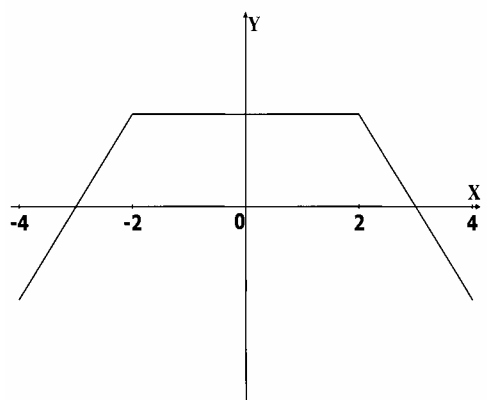


б) $y = \frac{x+6}{x}$, где $1 \leq x \leq 6$.

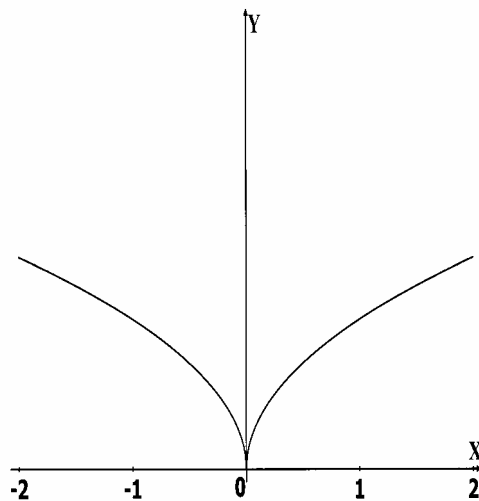
x	1	2	3	4	5	6
y	7	4	3	2,5	$\frac{11}{5}$	1



4. а) $y = \begin{cases} x+3, & \text{если } x < -2 \\ 1, & \text{если } -2 \leq x \leq 2; \\ -x+3, & \text{если } x > 2 \end{cases}$



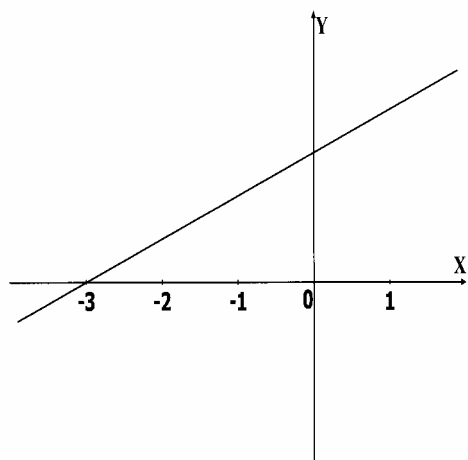
$$6) y = \sqrt{|x|} = \begin{cases} \sqrt{x} & x \geq 0 \\ \sqrt{-x} & x < 0 \end{cases}$$



$$5. f(x) = \begin{cases} 2x+4, & -2 \leq x \leq -1 \\ 2, & -1 < x \leq 2 \\ 2x-2, & 2 < x \leq 3 \end{cases}$$

$$6. g(x) = \frac{x^3 + 3x^2 - x - 3}{2(x^2 - 1)} = \frac{x^2(x+3) - (x+3)}{2(x^2 - 1)} = \frac{(x+3)(x^2 - 1)}{2(x^2 - 1)} = \frac{x}{2} + 1,5;$$

$x^2 - 1 \neq 0$, т.к. знаменатель $x \neq \pm 1$.



7. **1)** два привала–30 мин и 1 ч; **2)** 6 км; 6 км; 6 км;
3) 6 км/ч; $\frac{6}{2}=3$ (км/ч); $\frac{6}{1,5}=4$ (км/ч); **4)** 6 ч; **5)** 7,5 км; 10,5 км; 12 км.
8. 1) велосипедист на 3 ч; **2)** 6,5 ч; 2,5 ч;
3) $\frac{35}{6,5} = \frac{70}{13}$ (км/ч); $\frac{35}{2,5}=14$ (км/ч); **4)** велосипедист на 1 ч;
5) через 2 ч; **6)** 10 (км).

С-3

- 1. 1) а)** $x_1=-2$, $x_2=1$, $x_3=3$; **б)** $f(x) > 0$ при $x \in (-2; 1) \cup (3; 4]$;
 $f(x) < 0$ при $x \in [-3; -2] \cup (1; 3)$;
2) $f(x)$ возрастает при $x \in [-3; -1]$ и $[2; 4]$;
 $f(x)$ убывает при $x \in [-1; 2]$;
3) $x_{\max}=-1$, $x_{\min}=-3$;
4) $E(f)=[-2; 3]$.
2. 1) а) $y=25x-18$, $D(y)=E(y)=R$, $y > 0$ при $x > \frac{18}{25}$, $y < 0$ при $x < \frac{18}{25}$,
 $y=0$ при $x=\frac{18}{25}$, $y(x)$ возрастает на R ;
б) $y=-0,83x+16,2$; $D(y)=E(y)=R$;
 $y > 0$ при $x < \frac{16,2}{0,83} = \frac{1620}{83}$, $y < 0$ при $x > \frac{1620}{83}$; $y=0$ при $x=\frac{1620}{83}$, $y(x)$ убывает
на R ; **в)** $y=-27$ $D(y)=R$, $E(y)=-27$, $y < 0$ на R ; **2) а)** $y=\frac{36}{x}$;

$D(y)=E(y)=(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; $y > 0$ при $x > 0$, $y < 0$ при $x < 0$,

$y(x)$ убывает на $D(y)$; **б)** $y = -\frac{63}{x}$, $D(y)=E(y)=(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$;

$y > 0$ при $x < 0$, $y < 0$ при $x > 0$, $y(x)$ возрастает на R .

3. 1) а) $y = \frac{1}{5}x - 8$, $\frac{1}{5}x = 8$, $x = 40$; **б)** $y = -0,4x + 32$, $0,4x = 32$, $x = 80$;

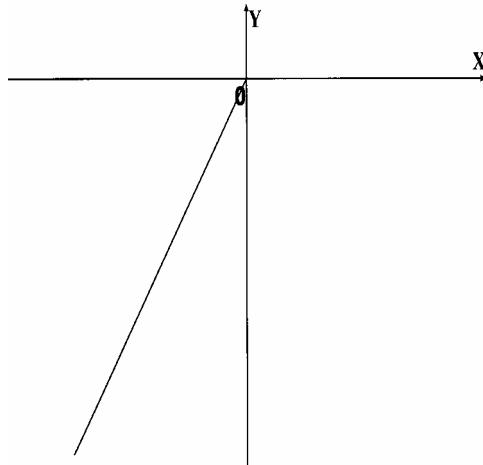
в) $y = 47$ нет нулей функции; **2) а)** $y = 9x(x - 5)$, $x_1 = 0$, $x_2 = 5$;

б) $y = 16(x^2 + 2)$ нет нулей функции; **в)** $y = x(x - 1)(x + 2)$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = -2$;

3) а) $y = \sqrt{x - 3}$, $x = 3$; **б)** $y = \sqrt{x^2 - 4}$, $x_1 = 2$, $x_2 = -2$;

в) $y = \sqrt{x^2 + 4}$ нет нулей функции.

4. $g(x) = x - |x|$; $g(x) = \begin{cases} 2x, & x \leq 0 \\ 0, & x > 0 \end{cases}$.



Свойства: $D(g) = R$, $E(g) = (-\infty; 0]$.

Нули функции: $x \geq 0$, $g(x) < 0$ при $x < 0$,

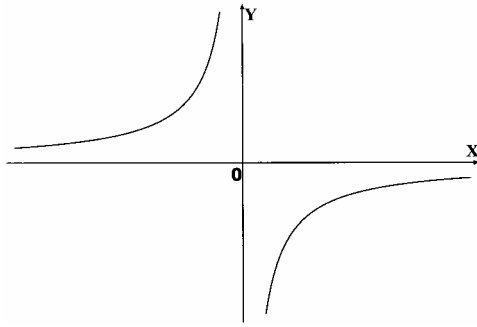
$g(x)$ возрастает при $x \leq 0$, $g_{\max} = g(0) = 0$.

5. $D(f) = R$, $E(f) = [-4; 4]$; $f(x) > 0$ при $x < 0$, $f(x) < 0$ при $x > 0$, $f(x) = 0$ при $x = 0$

$f(x)$ возрастает при $x \in (-\infty; -2]$ и $[2; +\infty)$; $f(x)$ убывает при $x \in [-2; 2]$.

С-4

1.



$$y = \frac{3}{x}; \quad D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty);$$

а) $y(-2) = -1,5, y(-1,5) = 2, y(1,5) = -2, y(2) = -1,5;$

б) $4 = \frac{3}{x}, x = \frac{3}{4}; -3 = \frac{3}{x}, x = 1; x = \frac{3}{4}; x = -1;$

в) $y > 0$ при $x < 0, y < 0$ при $x > 0.$

2. $y = \frac{144}{x};$ **а)** $20 \frac{4}{7} = \frac{144}{-7}$ — ложно, значит, точка A не принадлежит

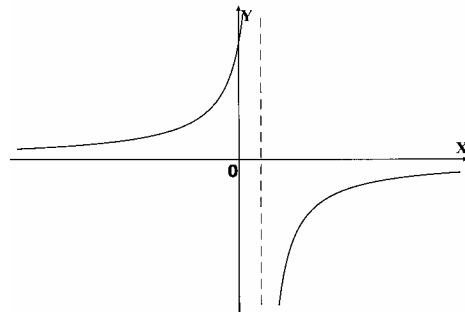
графику; **б)** $24 = \frac{144}{6}$ — верно, значит, точка B принадлежит графику;

в) $144 = \frac{144}{0}$ — ложно, значит, точка C не принадлежит графику;

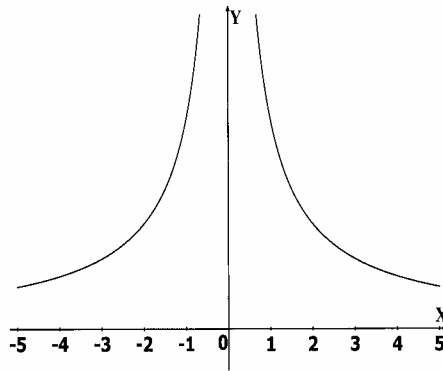
г) $-12 = \frac{144}{12}$ — ложно, значит, точка D не принадлежит графику.

3. $\frac{2}{x} = x + 1.$

4. а)



б)



5. $y = \frac{k}{x}$, $0,25 = \frac{k}{4}$, $k=1$, $y = \frac{1}{x}$.

C-5

1. 1) а) $x^2 - 8x + 15 = 0$; $D = 64 - 60 = 4$; $x_1 = \frac{8+2}{2} = 5$; $x_2 = 3$;

б) $-y^2 + 3y - 10 = 0$, $y^2 - 3y + 10 = 0$, $D = 9 - 4 \cdot 10 < 0$, значит, нет корней;

в) $4b^2 - 16b + 12 = 0$, $b^2 - 4b + 3 = 0$, $D = 16 - 4 \cdot 3 = 4$, $b_1 = \frac{4+2}{2} = 3$, $b_2 = 1$;

г) $2a^2 - a = 0$, $a(2a - 1) = 0$, $a_1 = 0$, $a_2 = 0,5$;

2) а) $5y^2 + 14y - 3 = 0$, $D = 196 + 4 \cdot 5 \cdot 3 = 256$, $y_1 = \frac{-14+16}{10} = 0,2$, $y_2 = -3$;

б) $10b^2 - 7b + 1 = 0$, $D = 49 - 4 \cdot 10 = 9$, $b_1 = \frac{7+3}{20} = 0,5$, $b_2 = 0,2$;

в) $-0,4c^2 + 0,8 = 0$, $0,4c^2 = 0,8$, $c^2 = 2$, $c_{1,2} = \pm \sqrt{2}$; г) $7x^2 - 28 = 0$, $x^2 = 4$, $x_{1,2} = \pm 2$;

3) а) $0,5x^2 - x - 1 = 0$, $x^2 - 2x - 2 = 0$, $D = 4 + 4 \cdot 2 = 4 \cdot 3$, $x_{1,2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{3}}{2} = 1 \pm \sqrt{3}$;

б) $-100c^2 + 20c + 3 = 0$, $100c^2 - 20c - 3 = 0$, $D = 400 + 4 \cdot 100 \cdot 3 = 1600$, $c_1 = \frac{20+40}{200} = 0,3$;

$c_2 = \frac{20}{200} = 0,1$; в) $-25a^2 + 10a - 1 = 0$, $25a^2 - 10a + 1 = 0$, $D = 100 - 4 \cdot 25 = 0$,

$a = \frac{10}{50} = 0,2$.

2. 1) а) $x^2 + 4x + 1 = x^2 + 4x + 4 - 3 = (x+2)^2 - 3$;

б) $3b^2 - 12b + 11 = 3(b^2 - 4b + \frac{11}{3}) = 3(b^2 - 4b + 4 - \frac{1}{3}) = 3(b-2)^2 - 1$;

в) $y^2 + 2y = y^2 + 2y + 1 - 1 = (y+1)^2 - 1$;

- 2) **а)** $-b^2+6b-8=-(b^2-6b+8)=-(b^2-6b+9-1)=-(b-3)^2+1$;
б) $\frac{1}{4}y^2-y+2=\frac{1}{4}(y^2-4y+8)=\frac{1}{4}(y^2-4y+4+4)=\frac{1}{4}(y-2)^2+1$.
3. а) $x^2-10x+28=x^2-10x+25+3=(x-5)^2+3 > 0$;
б) $-x^2+4x-6=-(x^2-4x+6)=-(x^2-4x+4+2)=-(x-2)^2-2 < 0$.
4. а) b^2-4b+9 , $b_0=\frac{4}{2}=2$; **б)** $-b^2+6b-14$, $b_0=\frac{-6}{-2}=3$.
5. $(12-b)$ см, $(8+b)$ см — новые стороны; $(12-b)(8+b)$ см² — площадь полученного прямоугольника; $(12-b)(8+b)=-b^2+4b+96$, $b_0=\frac{-4}{-2}=2$.

С-6

- 1. 1) а)** $x^2-7x+10=0$, $D=49-40=9$, $x_1=\frac{7+3}{2}=5$, $x_2=2$, $x^2-7x+10=(x-2)(x-5)$;
б) $3x^2+3x-6=0$, $x^2+x-2=0$, $D=1+4 \cdot 2=9$, $x_1=\frac{-1+3}{2}=1$, $x_2=-2$,
 $3x^2+3x-6=3(x-1)(x+2)$; **в)** $7x^2-63=7(x^2-9)=7(x-3)(x+3)$;
г) $5x^2+19x-4=0$, $D=361+4 \cdot 5 \cdot 4=441$, $x_1=\frac{-19+21}{10}=\frac{1}{5}$, $x_2=-4$,
 $5x^2+19x-4=5(x-\frac{1}{5})(x+4)=(5x-1)(x+4)$;
2) а) $x^2+x-72=0$, $D=1+4 \cdot 72=289$, $x_1=\frac{-1+17}{2}=8$, $x_2=-9$, $x^2+x-72=(x-8)(x+9)$;
б) $7x^2+20x-3=0$, $D=400+4 \cdot 7 \cdot 3=484$, $x_1=\frac{-20+22}{14}=\frac{1}{7}$, $x_2=-3$,
 $7x^2+20x-3=7(x-\frac{1}{7})(x+3)=(7x-1)(x+3)$; **в)** $12x^2-588=12(x^2-49)=12(x-7)(x+7)$;
г) $3x^2-12x+3=3(x^2-4x+1)=3(x^2-4x+4-3)=3((x-2)^2-3)=3(x-2-\sqrt{3})(x-2+\sqrt{3})$.
2. 1) а) $x^2-5x+7=0$, $D=25-4 \cdot 7 < 0$; **б)** $-3x^2+2x-1=0$, $3x^2-2x+1=0$, $D=4-4 \cdot 3 < 0$;
2) а) $x^2-12x+39=0$, $D=144-4 \cdot 39 < 0$; **б)** $4x^2+4x-3=0$, $4x^2-4x+3=0$, $D=16-4 \cdot 4 \cdot 3 < 0$;
в) $x^2+3=0$, $D=-4 \cdot 3 < 0$.
3. 1) а) $\frac{4b+12}{b^2-9}=\frac{4(b+3)}{(b-3)(b+3)}=\frac{4}{b-3}$; **б)** $\frac{c^2+c-6}{7c+21}=\frac{(c-2)(c+3)}{7(c+3)}=\frac{c-2}{7}$,
 $c^2+c-6=0$, $D=1+4 \cdot 6=25$, $c_1=\frac{-1+5}{2}=2$, $c_2=-3$;
в) $\frac{16-2x}{8+7x-x^2}=\frac{2(8-x)}{-(x-8)(x+8)}=\frac{2}{x+1}=x^2-7x-8=0$, $D=49+4 \cdot 8=81$,
 $x_1=\frac{7+9}{2}=8$; $x_2=-1$;

$$2) \text{ a) } \frac{a^2 - 16a + 63}{a^2 - 81} = \frac{(a-9)(a-7)}{(a-9)(a+9)} = \frac{a-7}{a+9}, a^2 - 16a + 63 = 0, D = 256 - 4 \cdot 63 = 4,$$

$$a_1 = \frac{16+2}{2} = 9, a_2 = 7;$$

$$6) \frac{y^3 + 7y^2 - 60y}{10y - 50} = \frac{y(y^2 + 7y - 60)}{10(y-5)} = \frac{y(y-5)(y+12)}{10(y-5)} = \frac{y(y+2)}{10},$$

$$y^2 + 7y - 60 = 0, D = 49 + 4 \cdot 60 = 289, y_1 = \frac{-7+17}{2} = 5, y_2 = -12;$$

$$b) \frac{3+14b-5b^2}{3b-b^2} = \frac{-(b-3)\left(b+\frac{1}{5}\right) \cdot 5a}{b(3-b)} = \frac{5b+1}{b}, 5b^2 - 14b - 3 = 0,$$

$$D = 196 + 4 \cdot 5 \cdot 3 = 256, b_1 = \frac{14+16}{10} = 3; b_2 = -\frac{1}{5}.$$

$$4. 1) \frac{x^2 - 8x - 33}{10x + 30} = \frac{(x-11)(x+3)}{10(x+3)} = \frac{x-11}{10} = f(x), x^2 - 8x - 33 = 0,$$

$$D = 64 + 4 \cdot 33 = 196, x_1 = \frac{8+14}{2} = 11, x_2 = -3,$$

$$f(-9) = \frac{-9-11}{10} = -2; f(12) = \frac{12-11}{10} = 0,1; f(111) = \frac{111-11}{10} = 10;$$

$$2) \frac{8y-56}{y^2-27y+140} = \frac{8(y-7)}{(y-20)(y-7)} = \frac{8}{y-20} = f(y), y^2 - 27y + 140 = 0,$$

$$D = 729 - 4 \cdot 140 = 169, y_1 = \frac{27+13}{2} = 20; y_2 = 7,$$

$$f(-4) = \frac{8}{-4-20} = -\frac{1}{3}; f(22,5) = \frac{8}{22,5-20} = 3,2; f(24) = \frac{8}{24-20} = 2.$$

$$5. \frac{9b-4}{b+7} - \frac{44-16b}{b^2+5b-14} = \frac{9b-4}{b+7} - \frac{44-16b}{(b-2)(b+7)} =$$

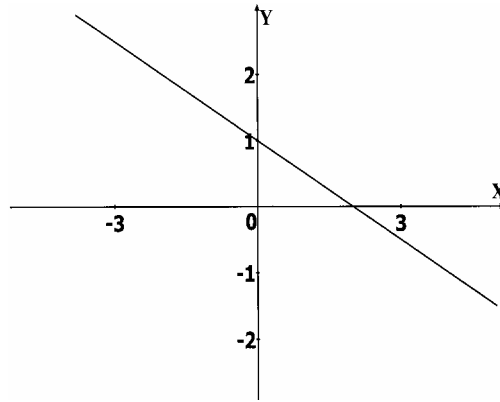
$$= \frac{(9b-4)(b-2) - 44 + 16b}{(b-2)(b+7)} = \frac{9b^2 - 4b - 18b + 8 - 44 + 16b}{(b-2)(b+7)} = \frac{9b^2 - 6b - 36}{(b-2)(b+7)},$$

$$b^2 + 5b - 14 = 0, D = 25 + 4 \cdot 14 = 81, b_1 = \frac{-5+9}{2} = 2; b_2 = -7.$$

6.

$$y(x) = \frac{x^3 - 2x^2 - 9x + 18}{18 - 2x^2} = \frac{x^2(x-2) - 9(x-2)}{2(9-x^2)} = -\frac{(x-2)(x^2-9)}{2(x^2-9)} = \frac{2-x}{2} = -\frac{x}{2} + 1,$$

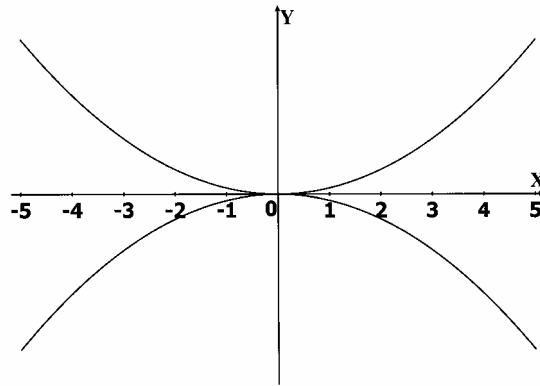
$$x \neq \pm 3.$$



C-7

1. $g(x) = \frac{1}{10}x^2$;

x	0	± 1	± 2	± 4	± 6	± 8
$g(x)$	0	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{18}{5}$	$\frac{32}{5}$



$g(-3)=g(3)=0,9$, $g(-5)=g(5)=2,5$, $f(x)=-\frac{1}{10}x^2$, $f(-3)=f(3)=-0,9$, $f(-5)=f(5)=-2,5$.

2. $y=-2x^2$; **a)** $y=-200$, $-200=-2x^2$, $x^2=100$, $x=\pm 10$, $(10,-200)$, $(-10,-200)$;

b) $y=-3200$, $-3200=-2x^2$, $x^2=1600$, $x=\pm 40$; $(40,-3200)$, $(-40,-3200)$;

v) $y=40x$, $40x=-20x^2$, $x_1=0$, $x_2=-2$; $(0, 0)$, $(-2,-80)$;

r) $y=-1400x$, $-1400x=-2x^2$, $x_1=0$, $x_2=700$; $(0, 0)$; $(700,-980000)$.

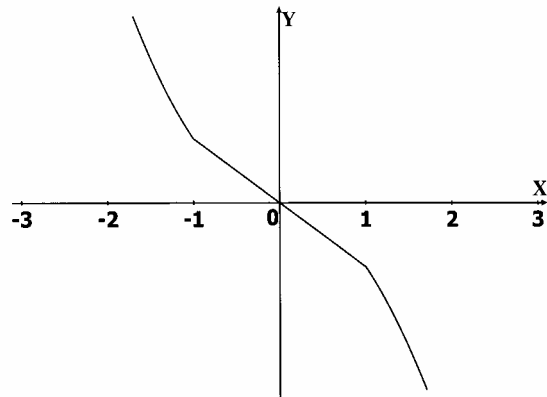
3. $y=40x^2$;

а) $A(-2; -160)$; $-160=40 \cdot 4$ — ложно, значит, не принадлежит;

б) $B(2, 160)$; $160=40 \cdot 4$ — верно, значит, принадлежит;

в) $C(0,1; 0,4)$; $0,4=40 \cdot 0,01$ — верно, значит, принадлежит.

4.



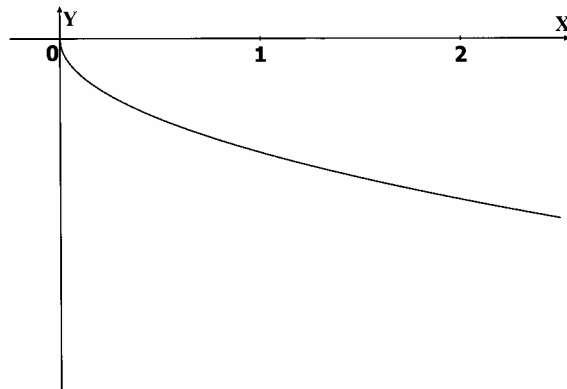
5.

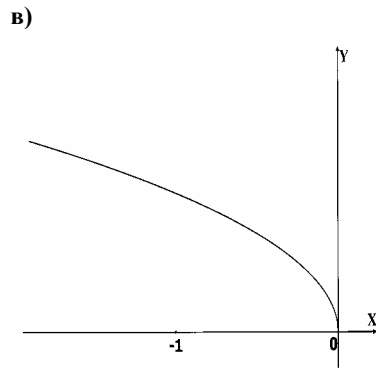
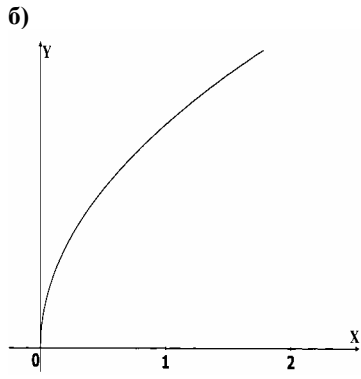
а) $y=\frac{1}{4}x^2$, $x \in [-4; 8]$, $y_{\min}=y(0)=0$, $y_{\max}=y(8)=16$;

б) $y=-\frac{1}{3}x^2$, $x \in [-6; 3]$, $y_{\min}=y(-6)=-\frac{1}{3} \cdot 36=-12$, $y_{\max}=y(0)=0$.

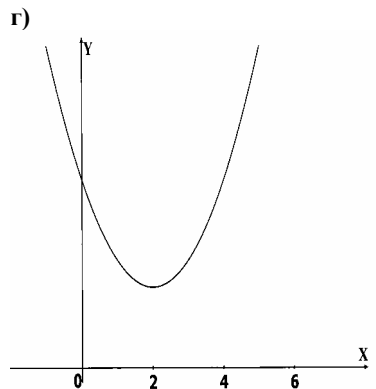
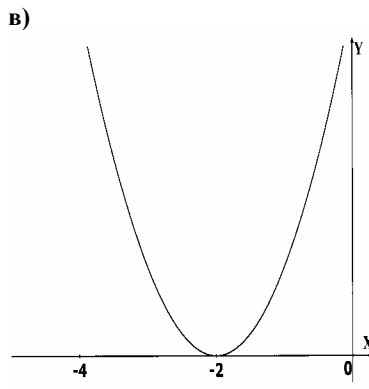
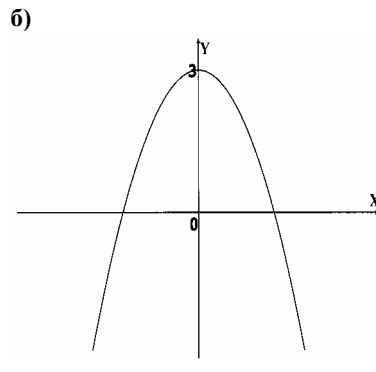
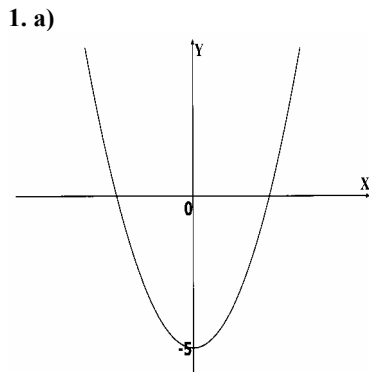
6. $S=\frac{gt^2}{2}$; $560=\frac{10 \cdot t^2}{2}$; $t^2=112$; $t=\sqrt{112}=4\sqrt{7}$ (с).

7. а)





C-8

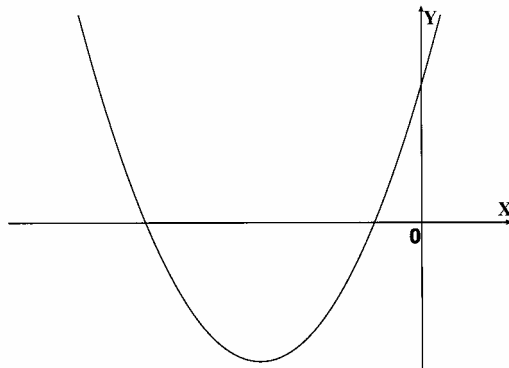


2. а) $g(x)=x^2+4x+2$, $m=-\frac{4}{2}=-2$, $n=f(-2)=4-8+2=-2$, $(-2;-2)$;

б) $g(x)=-x^2-6x+3$, $m=\frac{6}{-2}=-3$, $n=f(-3)=-9+18+3=12$, $(-3; 12)$;

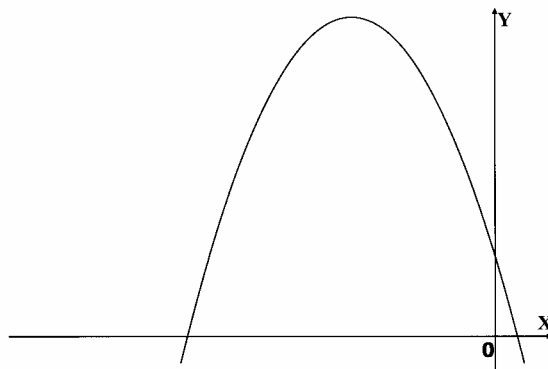
в) $g(x)=4x^2-8x-1$, $m=\frac{8}{8}=1$, $n=f(1)=4-8-1=-5$, $(1;-5)$.

3. $g(x)=x^2+4x+2$;



а) $x_1 \approx -3,4$ $x_2 \approx -0,6$, $g(x) > 0$ при $x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$,
 $g(x) < 0$ при $x \in (x_1; x_2)$; б) $g(x)$ возрастает при $x \in [-2; +\infty)$, убывает при
 $x \in (-\infty; -2]$, $g_{\min} = -2$.

4. $g(x)=-x^2-6x+3$;

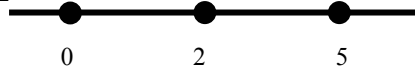


а) $x_1 \approx -6,4$ $x_2 \approx 0,4$, $g(x) > 0$ при $x \in (x_1; x_2)$,

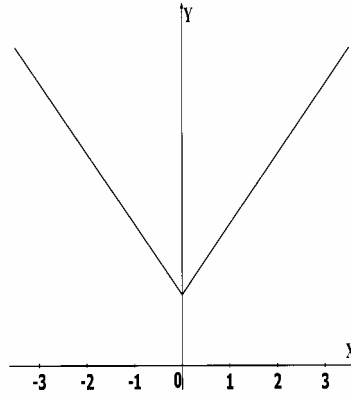
$g(x) < 0$ при $x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$;

б) $g(x)$ возрастает при $x \in (-\infty; -3]$, убывает при $x \in [-3; +\infty)$,
 $g_{\max} = 12$.

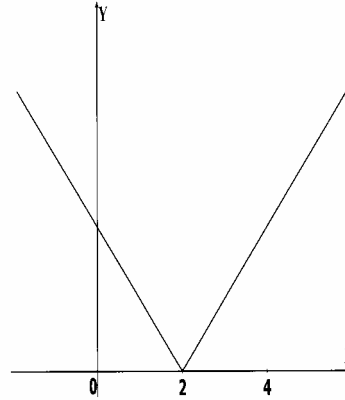
5. $y = -x^2 + 4x + 3$, $x \in [0; 5]$, $m = \frac{-4}{-2} = 2$, $n = y(2) = -4 + 8 + 3 = 7$,
 $y(5) = -25 + 20 + 3 = -2$,
 $E(y) = [-2; 7]$.



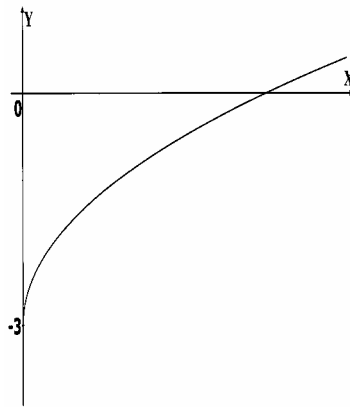
6. a)



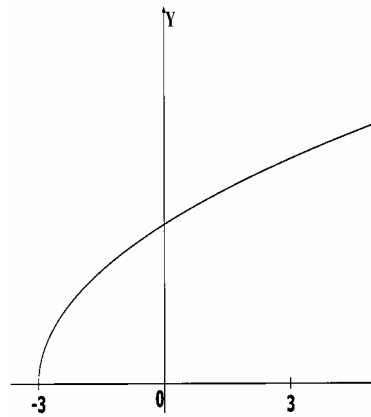
б)



в)

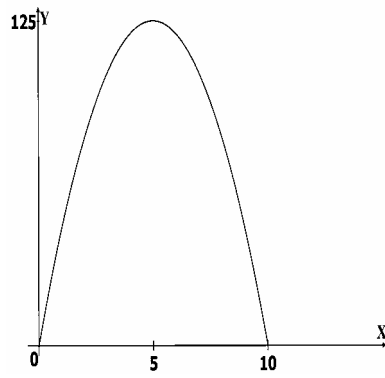


г)



7. $y = x^2 + bx + c$, $K(7, 2)$, $m = -\frac{b}{2} = 7$, $b = -14$,
 $2 = n = f(7) = 49 - 14 \cdot 7 + c = c - 49$, $c = 51$.

8. $S(t)=50t-5t^2$;

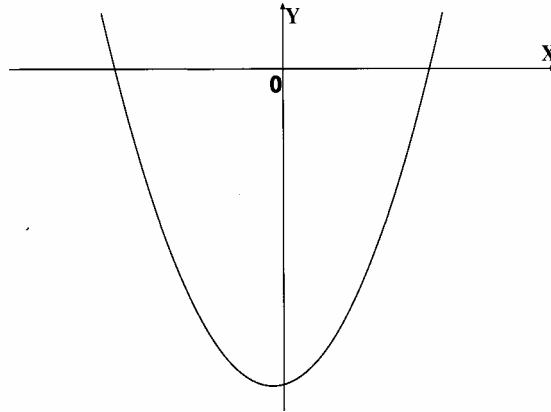


1) 125 м; 2) стрела поднималась вверх при $t \in [0; 5]$, опускалась вниз при $t \in [5; 10]$; 3) через 10 с.

C-9

1. 1) $y=3x^2+x-17$; а) вверх; б) $3x^2+x-17=0$, $D=1+4 \cdot 3 \cdot 17=205$, $x_{2,1}=\frac{-1 \pm 2\sqrt{51}}{6}$;

в)



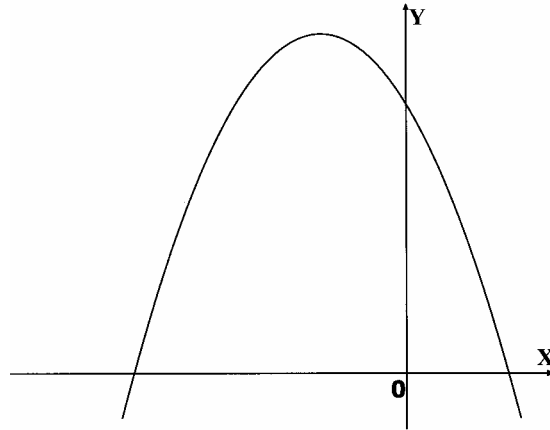
г) $y > 0$ при $x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$, $y < 0$ при $x \in (x_1; x_2)$;

2) $y=-2x^2-5x+12$;

а) вниз;

б) $2x^2+5x-12=0$ $D=25+8 \cdot 12=121$ $x_2=\frac{-5+11}{4}=1,5$; $x_1=-4$;

в)

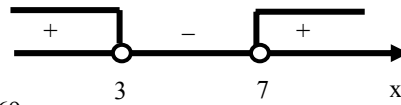


г) $y > 0$ при $x \in (x_1; x_2)$, $y < 0$ при $x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$.

2. а) $x^2 - 10x + 21 > 0$, $D = 100 - 4 \cdot 21 = 16$,

$$x_1 = \frac{10 + 4}{2} = 7; \quad x_2 = 3.$$

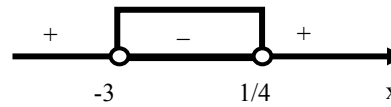
Ответ: $(-\infty; 3) \cup (7; +\infty)$.



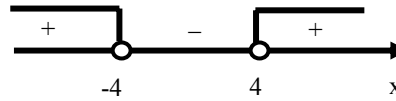
б) $4x^2 + 11x - 3 < 0$, $D = 121 + 16 \cdot 3 = 169$,

$$x_1 = \frac{-11 + 3}{8} = \frac{1}{4}; \quad x_2 = -3.$$

Ответ: $(-3; \frac{1}{4})$.



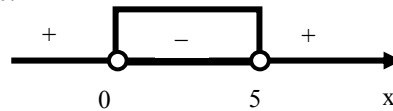
в) $x^2 - 16 > 0$ $(x-4)(x+4) > 0$.



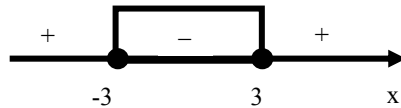
Ответ: $(-\infty; -4) \cup (4; +\infty)$.

г) $5x - x^2 > 0$, $x^2 - 5x < 0$, $x(x-5) < 0$.

Ответ: $(0; 5)$.

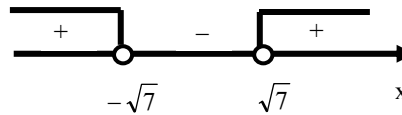


3. а) $x^2 \leq 9$, $(x-3)(x+3) \leq 0$.



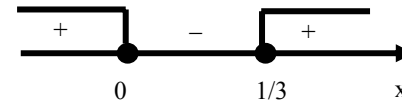
Ответ: $[-3; 3]$.

б) $x^2 > 7$, $(x - \sqrt{7})(x + \sqrt{7}) > 0$.



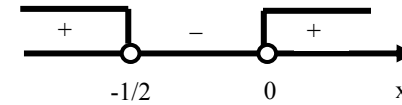
Ответ: $(-\infty; -\sqrt{7}) \cup (\sqrt{7}; +\infty)$.

в) $3x^2 \geq x$, $x^2 - \frac{x}{3} \geq 0$, $x(x - \frac{1}{3}) \geq 0$.



Ответ: $(-\infty; 0] \cup [\frac{1}{3}; +\infty)$.

г) $-4x < 8x^2$, $8x^2 + 4x > 0$,
 $x^2 + \frac{x}{2} > 0$, $x(x + \frac{1}{2}) > 0$.



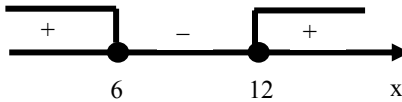
Ответ: $(-\infty; -\frac{1}{2}) \cup (0; +\infty)$.

4. а) $7b^2 - 4b + 1 > 0$, $D = 16 - 4 \cdot 7 < 0$ т.к. $a = 7 > 0$, то любое b — решение, ч.т.д. б) $8b < b^2 + 17$, $b^2 - 8b + 17 > 0$, $D = 64 - 4 \cdot 17 < 0$ т.к. $a = 1 > 0$, то любое b — решение, ч.т.д.

5. а) $y = \sqrt{x^2 - 18x + 72}$, $x^2 - 18x + 72 \geq 0$,

$D = 324 - 4 \cdot 72 = 36$,

$x_1 = \frac{18 + 6}{2} = 12$; $x_2 = 6$.



Ответ: $(-\infty; 6] \cup [12; +\infty)$.

б) $y = \frac{7}{\sqrt{6x - 3x^2}}$,

$6x - 3x^2 > 0$, $3x^2 - 6x < 0$,

$x^2 - 2x < 0$, $x(x - 2) < 0$.



Ответ: $(0; 2)$.

6. $x^2 - 8x + c < 0$

а) $D = 64 - 4c$, чтобы (3; 5) был решением, нужно $x_1 = 3$, $x_2 = 5$, т.е.

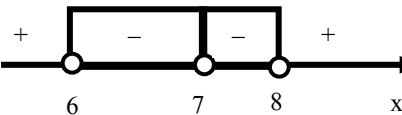
$9 - 24 + c = 0$; $c = 15$. Ответ: 15.

б) Ответ: ни при каких c .

7. $\frac{x^2 - 14x + 48}{(x - 7)^2} < 0$, $\frac{(x - 6)(x - 8)}{(x - 7)^2} < 0$,

$x^2 - 14x + 48 = 0$, $D = 196 - 4 \cdot 48 = 4$;

$x_1 = \frac{14 + 2}{2} = 8$; $x_2 = 6$.

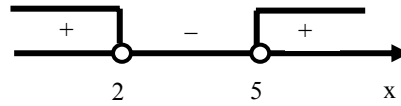


Ответ: $(6; 7) \cup (7; 8)$.

C-10

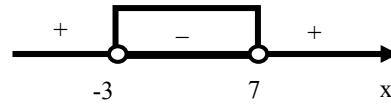
1. 1) а) $(x-2)(x-5) > 0$.

Ответ: $(-\infty; 2) \cup (5; +\infty)$.



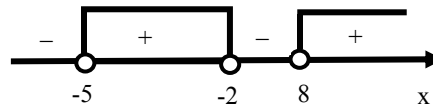
б) $(x+3)(x-7) < 0$.

Ответ: $(-3; 7)$.



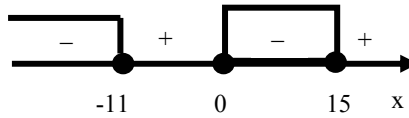
в) $(x+5)(x+2)(x-8) > 0$.

Ответ: $(-5; -2) \cup (8; +\infty)$.



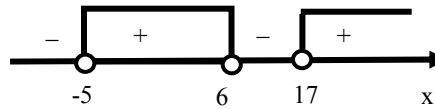
г) $x(x+11)(x-15) \leq 0$.

Ответ: $(-\infty; -11] \cup [0; 15]$.



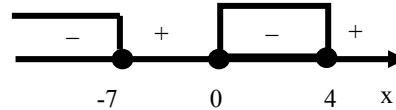
2) а) $(x+5)(x-6)(x-17) > 0$.

Ответ: $(-5; 6) \cup (17; +\infty)$.



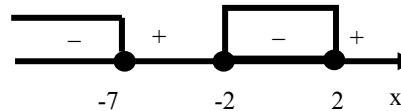
б) $x(x+7)(x-4) \leq 0$.

Ответ: $(-\infty; -7] \cup [0; 4]$.



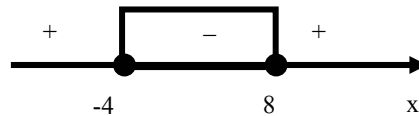
в) $(x^2-4)(x+7) \leq 0$,
 $(x-2)(x+2)(x+7) \leq 0$.

Ответ: $(-\infty; -7] \cup [-2; 2]$.



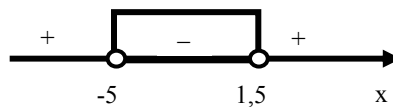
г) $(x^2+4)(x+4)(x-8) \leq 0$, $(x+4)(x-8) \leq 0$.

Ответ: $[-4; 8]$.



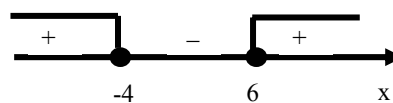
2. 1) a) $(2x-3)(x+5) < 0$,
 $(x-1,5)(x+5) < 0$.

Ответ: $(-5; 1,5)$.



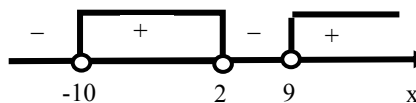
б) $(6-x)(3x+12) \leq 0$,
 $(x-6)(x+4) \geq 0$.

Ответ: $(-\infty; -4] \cup [6; +\infty)$.



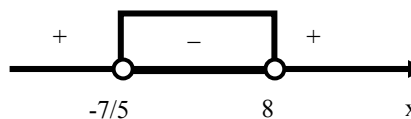
в) $-(x-2)(9-x)(x+10) > 0$,
 $(x-2)(x-9)(x+10) > 0$.

Ответ: $(-10; 2) \cup (9; +\infty)$.



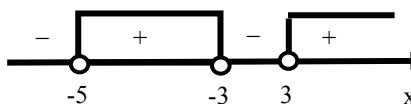
2) a) $(5x+7)(8-x) > 0$,
 $(x+\frac{7}{5})(x-8) < 0$.

Ответ: $(-\frac{7}{5}; 8)$.



б) $(9-x^2)(6x+30) < 0$,
 $(x-3)(x+3)(x+5) > 0$.

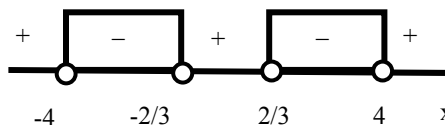
Ответ: $(-5; -3) \cup (3; +\infty)$.



в) $(9x^2-4)(16-x^2)(2x^2+3) > 0$,
 $(x^2-\frac{4}{9})(x^2-16) < 0$,

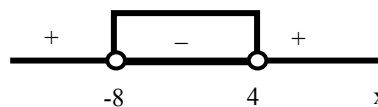
$(x-\frac{2}{3})(x+\frac{2}{3})(x-4)(x+4) < 0$.

Ответ: $(-4; -\frac{2}{3}) \cup (\frac{2}{3}; 4)$.



3. 1) a) $\frac{x-4}{x+8} < 0$.

Ответ: $(-8; 4)$.



б) $\frac{x+10}{x-3} \geq 0$.

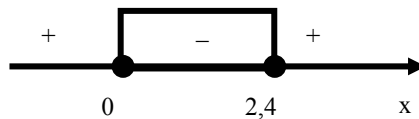
Ответ: $(-\infty; -10] \cup [3; +\infty)$.



$$\text{в) } \frac{9x}{5x-12} \leq 0,$$

$$\frac{x}{x-2,4} \leq 0.$$

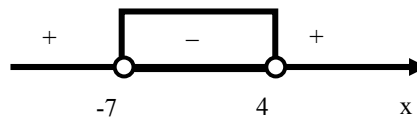
Ответ: $[0; 2,4]$.



$$\text{2) а) } \frac{3x-12}{x+7} < 0,$$

$$\frac{x-4}{x+7} < 0.$$

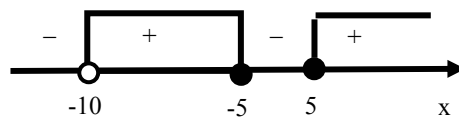
Ответ: $(-7; 4)$.



$$\text{б) } \frac{x^2-25}{x+10} \geq 0,$$

$$\frac{(x-5)(x+5)}{x+10} \geq 0.$$

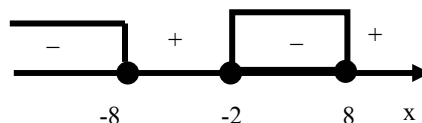
Ответ: $(-10; -5] \cup [5; +\infty)$.



$$\text{в) } \frac{(x+2)(x^2-64)}{x^2+15} \leq 0,$$

$$(x+2)(x-8)(x+8) \leq 0.$$

Ответ: $(-\infty; -8] \cup [-2; 8]$.

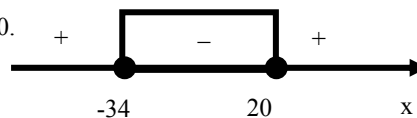


4.

$$\text{а) } y = \sqrt{(x+34)(20-x)},$$

$$(x+34)(20-x) \geq 0, \quad (x+34)(x-20) \leq 0.$$

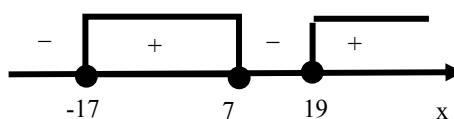
Ответ: $[-34; 20]$.



$$\text{б) } y = \sqrt{(x-7)(x+17)(x-19)},$$

$$(x-7)(x+17)(x-19) \geq 0.$$

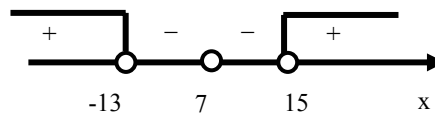
Ответ: $[-17; 7] \cup [19; +\infty)$.



5.

$$\text{а) } (x+13)(x-7)^2(x-15) > 0.$$

Ответ: $(-\infty; -13) \cup (15; +\infty)$.



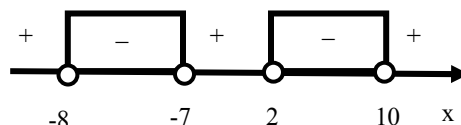
$$\text{б) } \frac{x^2+15x+56}{x^2-12x+20} < 0, \quad x^2+15x+56=0,$$

$$D=225-4 \cdot 56=1,$$

$$x_1 = \frac{-15+1}{2} = -7; \quad x_2 = -8, \quad x^2 - 12x + 20 = 0, \quad D = 144 - 4 \cdot 20 = 64,$$

$$x_1 = \frac{12+8}{2} = 10, \quad x_2 = 2,$$

$$\frac{(x+7)(x+8)}{(x-2)(x-10)} < 0.$$



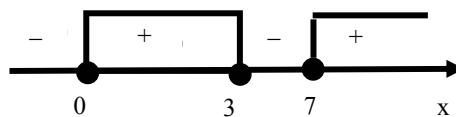
Ответ: $(-8; -7) \cup (2; 10)$.

в) $x^3 - 10x^2 + 21x \geq 0,$
 $x(x^2 - 10x + 21) \geq 0, \quad x^2 - 10x + 21 = 0,$
 $D = 100 - 4 \cdot 21 = 16,$

$$x_1 = \frac{10+4}{2} = 7; \quad x_2 = 3,$$

$$x(x-7)(x-3) \geq 0.$$

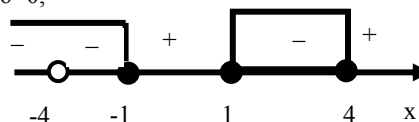
Ответ: $[0; 3] \cup [7; +\infty)$.



г) $\frac{x^4 - 17x^2 + 16}{5x + 20} \leq 0, \quad x^4 - 17x^2 + 16 = 0,$

$$D = 289 - 4 \cdot 16 = 225,$$

$$x_1^2 = \frac{17+15}{2} = 16, \quad x_2^2 = 1,$$



$$\frac{(x^2 - 16)(x^2 - 1)}{x + 4} \leq 0, \quad \frac{(x-4)(x+4)(x-1)(x+1)}{x+4} \leq 0.$$

Ответ: $(-\infty; -4) \cup (-4; -1] \cup [1; 4]$.

C-11

1. а) $x^4 - x^3 + 2x^5 - 2 = 0, \quad 2x^5 + x^4 - x^3 - 2 = 0$ пятая степень;

б) $(2x-1)(x+4)(x-8) = 0$ третья степень;

в) $(x^2+6)(x-5) - x(x+1)(x-1) = 0, \quad x^3 + 6x - 5x^2 - 30 - x^3 + x = 0,$
 $-5x^2 + 7x - 30 = 0$ вторая степень;

г) $(5x^4-1)(5x^2-2) - (5x^3+1)^2 = 0, \quad 25x^6 - 5x^2 - 10x^4 + 2 - 25x^6 - 10x^3 - 1 = 0,$
 $-10x^4 - 10x^3 - 5x^2 + 1 = 0$ четвертая степень.

2. а) $x^3 - 9x = 0, \quad x(x^2 - 9) = 0, \quad x(x-3)(x+3) = 0, \quad x_1 = 0, \quad x_{2,3} = \pm 3;$

б) $x^2(x-7) + 7(x^2-x) = 6, \quad x^3 - 7x^2 + 7x^2 - 7x + 6 = 0, \quad x^3 - 7x + 6 = 0,$
 $(x-1)(x^2+x-6) = 0, \quad (x-1)(x-2)(x+3) = 0, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = -3;$

в) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0, \quad D = 169 - 4 \cdot 36 = 25, \quad x_1^2 = \frac{13+5}{2} = 9, \quad x_2^2 = 4, \quad x_{1,2} = \pm 3; \quad x_{3,4} = \pm 2.$

3. 1 а) $(8x+1)(2x-3) - (4x-2)^2 = 1, \quad 16x^2 + 2x - 24x - 3 - 16x^2 + 16x - 4 - 1 = 0,$

$-6x = 8, \quad x = -\frac{4}{3};$ **б)** $5x(5x-1) - (5x+3)(5x-3) = x-3, \quad 25x^2 - 5x - 25x^2 + 9 = x-3,$

$$6x=12, x=2; \text{в)} \frac{2x-1}{5} - \frac{x+1}{2} = 1, 4x-2-5x-5=10, x=-17;$$

$$\text{г)} \frac{x(2x-5)}{6} - \frac{x(x-2)}{3} = 1, 2x^2-5x-2x^2+4x-6=0, x=-6;$$

$$2) \text{а)} (2x-3)(x+1)=x^2+17, 2x^2-3x+2x-3=x^2+17, x^2-x-20=0, D=1+4 \cdot 20=81,$$

$$x_1 = \frac{1+9}{2} = 5, x_2 = -4; \text{б)} (x-7)(x+7)+(x-2)^2=11x+30-(x+5)^2,$$

$$x^2-49+x^2-4x+4=11x+30-x^2-10x-25, 3x^2-5x-50=0, D=25+4 \cdot 3 \cdot 50=625,$$

$$x_1 = \frac{5+25}{6} = 5, x_2 = -\frac{10}{3}; \text{в)} \frac{x^2}{27} + \frac{x}{3} = \frac{x+9}{3}, \frac{x^2}{27} = 3, x^2=81, x_{1,2}=\pm 9;$$

$$\text{г)} \frac{x^2-6x-4}{3} = \frac{11x}{10} + 110x^2-60x-40=33x+30, 10x^2-93x-70=0, D=107^2,$$

$$x_1 = \frac{93+107}{10} = 20, x_2 = -1,4.$$

$$4. \text{а)} x+11=0; \text{б)} (x-2)(x+9)=0, x^2+7x-18=0; \text{в)} (x-4)(x-7)(x+7)=0, (x-4)(x^2-49)=0, x^3-4x^2-49x+196=0.$$

$$5. \text{а)} \frac{x(2-x)}{2} + \frac{3(x-3)^2}{2} = 2\frac{1}{2} - \frac{2(4-x)^2}{3},$$

$$3x(2-x)+9(x^2-6x+9)=15-4(16-8x+x^2), 6x-3x^2+9x^2-54x+81=15-64+32x-4x^2,$$

$$10x^2-80x+130=0, x^2-8x+13=0, D=64-4 \cdot 13=4 \cdot 3, x_{1,2} = \frac{8 \pm 2\sqrt{3}}{2} = 4 \pm \sqrt{3};$$

$$\text{б)} x = \frac{(3-x)^2}{9} - \frac{x(x-12)}{18} + \frac{(3-x)(x-2)}{36},$$

$$36x=4(9-6x+x^2)-2x(x-12)+(3x-x^2-6+2x), 36x=36-24x+4x^2-2x^2+24x-x^2-6+5x,$$

$$x^2-31x+30=0, D=961-4 \cdot 30=841, x_1 = \frac{31+29}{2} = 30, x_2 = 1.$$

$$6. \text{а)} x^6+3x^4+x^2=-16, x^6+3x^4+x^2+16=0, \text{уравнение не имеет корней, т.к. } x^6+3x^4+x^2+16 > 0 \text{ при всех } x;$$

$$\text{б)} 25x(x+2)-(5x-1)(5x+1)=25(2x-1)+26, 25x^2+50x-25x^2+1=50x-25+26;$$

$$1=1 \text{ — у этого уравнения корень — любое число;}$$

$$\text{в)} 6x^5+8x^3+12x-41=0, 6x^5+8x^3+12x=41, \text{ верно, т.к. если бы был отрицательный корень, то левая часть была бы меньше нуля (т.к. каждое слагаемое было бы меньше нуля), а правая } 41 > 0;$$

$$\text{г)} 5x^5+25x^4-20x^3+10x^2-5x=17, \text{ уравнение не имеет целых корней, т.к. если бы был целый корень, то правая часть делилась бы на 5, а левая — нет.}$$

С-12

$$1. \text{а)} 5(x-2)-4(3+x)=2+ax, 5(6-2)-4(3+6)=2+6a, 20-36=2+6a, 6a=-18, a=-3;$$

$$\text{б)} 9x^2+3(c+2)-(3-2c)=0, 9 \cdot 25+3(c+2)-(3-2c)=0, 3c+6-3+2c+225=0,$$

$$5c = -228, c = -\frac{228}{5} = -45,6, x_1 = 5, x_2 = -5.$$

$$2. kx + 1 = 7, kx = 6; x = \frac{6}{k}, k = \pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 6.$$

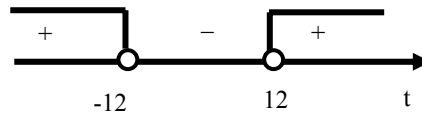
$$3. 4x - 2b = 5, x = \frac{2b + 5}{4}; \text{ а) } \frac{2b + 5}{4} > 0, 2b > -5, b > -2,5;$$

$$\text{б) } \frac{2b + 5}{4} < 0, b < -2,5; \text{ в) } \frac{2b + 5}{4} > 8; 2b + 5 > 32; 2b > 27; b > 13,5;$$

$$\text{г) } \begin{cases} \frac{2b + 5}{4} > 1; 2b + 5 > 4; b > -0,5 \\ \frac{2b + 5}{4} < 3; 2b + 5 < 12; b < 3,5 \end{cases} \quad -0,5 < b < 3,5.$$

$$4. \text{ а) } 2x^2 + 4x + t = 0, D = 16 - 4 \cdot 2 \cdot t > 0, 16 - 8t > 0, 8t < 16; t < 2;$$

$$\text{б) } 6x^2 + tx + 6 = 0, D = t^2 - 4 \cdot 6 \cdot 6 > 0, t^2 - 144 > 0, (t - 12)(t + 12) > 0.$$

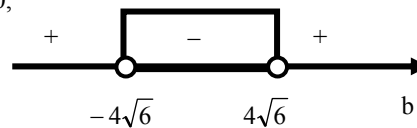


$$5. \text{ а) } 4x^2 - 8x + c = 0, D = 64 - 4 \cdot 4 \cdot c = 0, 64 = 16c, c = 4;$$

$$\text{б) } x^2 + cx + 16 = 0, D = c^2 - 4 \cdot 16 = 0, c^2 = 64, c_{1,2} = \pm 8.$$

$$6. \text{ а) } 6^2 + bx + 4 = 0, D = b^2 - 4 \cdot 6 \cdot 4 < 0,$$

$$b^2 - 96 < 0, (b - 4\sqrt{6})(b + 4\sqrt{6}) < 0,$$

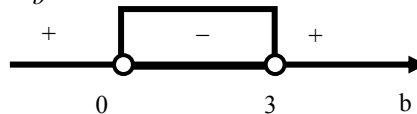


$$\text{б) } x^2 + 8x + b = 0, D = 64 - 4b < 0,$$

$$4b > 64, b > 16.$$

$$7. b(2-x) = 6, 2-x = \frac{6}{b}, x = 2 - \frac{6}{b}, x = \frac{2b-6}{b},$$

$$\frac{2b-6}{b} < 0, \frac{b-3}{b} < 0.$$



$$8. x^2 + ax = 0 \text{ при } a = 0, x = 0 \text{ — единственный корень;}$$

$$x^2 + ax - 1 = 0, D = a^2 + 4 > 0 \text{ при любом } a \text{ имеет два корня;}$$

$$x^2 + ax + 1 = 0, D = a^2 - 4 > 0 \text{ не при любом } a;$$

$$x^2 - a = 0 \text{ при } a = 0 \text{ } x = 0 \text{ — единственный корень.}$$

$$\text{Ответ: } x^2 + ax - 1 = 0.$$

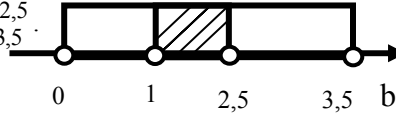
9. $2x^2+nx-(18-x)=0$, пусть a и $-a$ корни уравнения, тогда

$$\begin{cases} 2a^2 + na - (18 - a) = 0 \\ 2a^2 - na - (18 + a) = 0 \end{cases}, na - (18 - a) + na + (18 + a) = 0,$$

$$2na + 2a = 0, n + 1 = 0, n = -1.$$

10. $x^2 - 4bx + 4b^2 - 1 = 0$, $D = 16b^2 - 4(4b^2 - 1) = 4$, $x_1 = \frac{4b + 2}{2} = 2b + 1$, $x_2 = 2b - 1$,

$$\begin{cases} 1 < 2b + 1 < 6 \\ 1 < 2b - 1 < 6 \end{cases} \begin{cases} 0 < 2b < 5 \\ 2 < 2b < 7 \end{cases} \begin{cases} 0 < b < 2,5 \\ 1 < b < 3,5 \end{cases}$$



Ответ: (1; 2,5).

C-13

1) а) $18y^3 - 36y^2 = 0$, $y^2(y - 2) = 0$, $y_1 = 0$, $y_2 = 2$;

б) $x^3 - 144x = 0$, $x(x^2 - 144) = 0$, $x(x - 12)(x + 12) = 0$, $x_1 = 0$, $x_{2,3} = \pm 12$;

в) $x^2 + 0,9x = 0$, $x(x + 0,9) = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = -0,9$;

2) а) $16x^3 - 32x^2 - x + 2 = 0$, $16x^2(x - 2) - (x - 2) = 0$, $(16x^2 - 1)(x - 2) = 0$,

$(4x - 1)(4x + 1)(x - 2) = 0$, $x_{1,2} = \frac{1}{4}$, $x_3 = 2$; б) $x^6 - x^4 + 5x^2 - 5 = 0$, $x^4(x^2 - 1) + 5(x^2 - 1) = 0$,

$(x^2 - 1)(x^4 + 5) = 0$, $(x - 1)(x + 1) = 0$, $x_{1,2} = \pm 1$, в) $y^6 + 4y^4 = y^2 + 4$, $y^4(y^2 + 4) = y^2 + 4$, $y^4 = 1$, $y_{1,2} = \pm 1$.

2. а) $(x^2 - 10)^2 - 3(x^2 - 10) + 4 = 0$, $x^2 - 10 = y$, $y^2 - 3y + 4 = 0$, $D = 9 - 4 \cdot 4 = < 0$ нет корней;

б) $(x^2 + x)^2 - 5(x^2 + x) + 6 = 0$, $x^2 + x = y$, $y^2 - 5y + 6 = 0$, $D = 25 - 4 \cdot 6 = 1$, $y_1 = \frac{5 + 1}{2} = 3$, $y_2 = 2$;

$x^2 + x = 3$, $x^2 + x - 3 = 0$, $D = 1 + 4 \cdot 3 = 13$, $x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}$, $x^2 + x = 2$, $x^2 + x - 2 = 0$,

$D = 1 + 4 \cdot 2 = 9$, $x_3 = \frac{-1 + 3}{2} = 1$, $x_4 = -2$; в) $(x^2 + x + 6)(x^2 + x - 4) = 144$, $x^2 + x + 6 = y$,

$y(y - 10) = 144$, $y^2 - 10y - 144 = 0$, $D = 100 + 4 \cdot 144 = 676$, $y_1 = \frac{10 + 26}{2} = 18$, $y_2 = -8$,

$x^2 + x + 6 = 18$, $x^2 + x - 12 = 0$, $D = 1 + 4 \cdot 12 = 49$, $x_1 = \frac{-1 + 7}{2} = 3$; $x_2 = -4$,

$x^2 + x + 6 = -8$, $x^2 + x + 14 = 0$, $D = 1 - 4 \cdot 14 < 0$ нет корней. Ответ: 3; -4.

3. а) $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$, $D = 100 - 4 \cdot 9 = 64$, $x_1^2 = \frac{10 + 8}{2} = 9$, $x_2^2 = 1$, $x_{1,2} = \pm 3$, $x_{3,4} = \pm 1$;

б) $x^4 - 18x^2 + 32 = 0$, $D = 324 - 4 \cdot 32 = 196$, $x_1^2 = \frac{18 + 14}{2} = 16$, $x_2^2 = 2$, $x_{1,2} = \pm 4$,

$x_{3,4} = \pm \sqrt{2}$; в) $x^4 - x^2 - 12 = 0$, $D = 1 + 4 \cdot 12 = 49$, $x_1^2 = \frac{1 + 7}{2} = 4$, $x_2^2 = < 0$, $x_{1,2} = \pm 2$;

$$\text{г) } x^4+6x^2-27=0, D=36+4 \cdot 27=144, x_1^2=\frac{-6+12}{2}=3, x_2^2 < 0, x_{1,2}=\pm\sqrt{3};$$

$$\text{д) } x^4+15x^2+54=0, D=225-4 \cdot 54=9, x_1^2=\frac{-15+3}{2} < 0, x_2^2 < 0 \text{ нет корней};$$

$$\text{е) } x^4+25x^2=0, x^2(x^2+25)=0, x^2=0, x=0.$$

$$4. y=x^4-3x^2-4, x^4-3x^2-4=0, D=9+4 \cdot 4=25, x_1^2=\frac{3+5}{2}=4, x_2^2 < 0, x_{1,2}=\pm 2.$$

Ответ: $(\pm 2; 0)$.

$$5. x^5+x^4+3x^3+3x^2+4x+4=0, x^4(x+1)+3x^2(x+1)+4(x+1)=0, (x+1)(x^4+3x^2+4)=0, x_1=-1, x^4+3x^2+4=0, D=9-4 \cdot 4 < 0, \text{ нет корней. Ответ: } -1.$$

$$6. \frac{x^2-3}{x} + \frac{x}{x^2-3} = 2\frac{1}{2}, \frac{x^2-3}{x} = t, t + \frac{1}{t} - \frac{5}{2} = 0, 2t^2-5t+2=0, D=25-4 \cdot 2 \cdot 2=9,$$

$$t_1 = \frac{5+3}{4} = 2, t_2 = \frac{1}{2}, \frac{x^2-3}{x} = 2, x^2-2x-3=0, D=4+4 \cdot 3=16, x_1 = \frac{2+4}{2} = 3, x_2 = -1,$$

$$\frac{x^2-3}{x} = \frac{1}{2}, 2x^2-x-6=0, D=1+4 \cdot 2 \cdot 6=49, x_3 = \frac{1+7}{4} = 2, x_4 = -1,5.$$

$$7. \text{ а) } x^3-13x+12, x^3-x-12x+12=0, x(x^2-1)-12(x-1)=0, x(x-1)(x+1)-12(x-1)=0,$$

$$(x-1)(x^2+x-12)=0, x_1=1, x^2+x-12=0, D=49, x_2 = \frac{-1+7}{2} = 3, x_3 = -4;$$

$$\text{ б) } x^3-31x+30=0, x^3-x-30x+30=0, x(x^2-1)-30(x-1)=0, x(x-1)(x+1)-30(x-1)=0, (x-1)(x^2+x-30)=0, x_1=1, x^2+x-30=0, D=121,$$

$$x_2 = \frac{-1+11}{2} = 5, x_3 = -6.$$

$$8. \text{ а) } (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)=840, (x^2-5x+4)(x^2-5x+6)=840, x^2-5x+4=y,$$

$$y(y+2)=840, y^2+2y-840=0, D=4+4 \cdot 840=4 \cdot 841, y_1 = \frac{-2+58}{2} = 28, y_2 = -30,$$

$$x^2-5x+4=28, x^2-5x-24=0, D=25+4 \cdot 24=121, x_1 = \frac{5+11}{2} = 8, x_2 = -3,$$

$$x^2-5x+4=-30, x^2-5x+34=0, D=25-4 \cdot 34 < 0 \text{ нет корней. Ответ: } -3; 8.$$

$$\text{ б) } (x+1)(x+3)(x+5)(x+7)=945, (x^2+8x+7)(x^2+8x+15)=945, x^2+8x+7=y,$$

$$y(y+8)=945, y^2+8y-945=0, D=64+4 \cdot 945=62^2, y_1 = \frac{-8+62}{2} = 27, y_2 = -35,$$

$$x^2+8x+7=27, x^2+8x-20=0, D=64+4 \cdot 20=144, x_1 = \frac{-8+12}{2} = 2, x_2 = -10,$$

$$x^2+8x+7=-35, x^2+8x+42=0, D=64-4 \cdot 42 < 0 \text{ нет корней. Ответ: } -10; 2.$$

$$9. \text{ а) } x^4-8x^2+a=0, x^2=y, y^2-8y+a=0, f(y)=y^2-8y+a, D=64-4a < 0 \text{ или}$$

$$\begin{cases} f(0) > 0 \\ m = \frac{8}{2} = 4 < 0 \end{cases} \text{ — нет решений, } 64 < 4a, a > 16. \text{ Ответ: } a > 16.$$

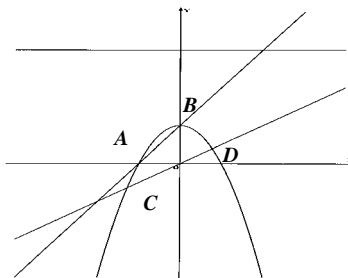
б) $x^4+ax^2+25=0, x^2=y, y^2+ay+25=0, f(y)=y^2+ay+25, D=a^2-4\cdot 25 < 0,$

$(a-10)(a+10)<0, -10 < a < 10$ или $\begin{cases} m = -\frac{a}{2} < 0 \\ f(0) = 25 > 0 \end{cases}, a > 0.$ Ответ: $a > -10.$

C-14

1. $\begin{cases} xy = 6 \\ y = 0,5x^2 - 8 \end{cases}$. Три решения: $(-3,6;-1,8), (-0,8;-7,8), (4,2; 1,3).$

2. $y = -x^2 + 1.$



а) $\begin{cases} y = -x^2 + 1 \\ y = x + 1 \end{cases}$, две точки пересечения: $A(-1; 0), B(0; 1).$

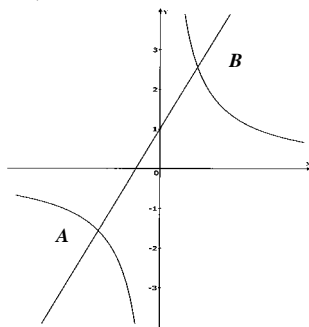
Ответ: $(-1; 0), (0; 1).$

б) $\begin{cases} y = -x^2 + 1 \\ y = 0,5x^2 - 8 \end{cases}$, две точки пересечения: $C(-1,4;-0,8), D(0,8; 0,5).$

Ответ: $(-1,4;-0,8), (0,8; 0,5).$

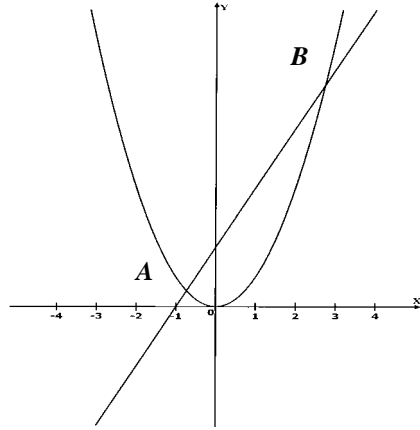
в) $\begin{cases} y = -x^2 + 1 \\ y = 3 \end{cases}$, нет точек пересечения. Ответ: нет решения.

3. а)



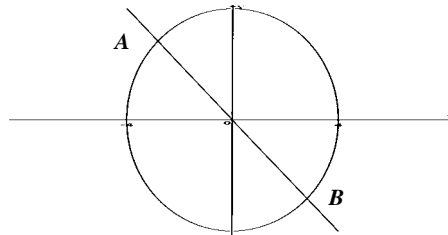
$\begin{cases} y = \frac{4}{x} \\ y = x + 1 \end{cases}$. Ответ: $(1,6; 2,6), (-2,6;-1,6).$

$$\text{б) } \begin{cases} y = 0,5x^2 \\ y = x + 1 \end{cases}$$

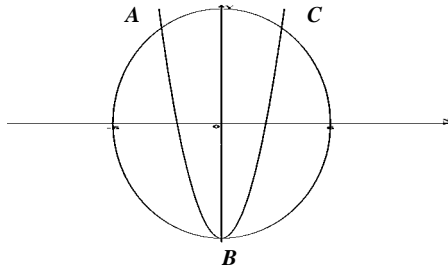


Ответ: $(-0,8; 0,2)$, $(2,5; 3,5)$.

$$\text{в) } \begin{cases} x^2 + y^2 = 16 \\ y = -x \end{cases} \text{ . Ответ: } (2,9; -2,9), (-2,9; 2,9).$$

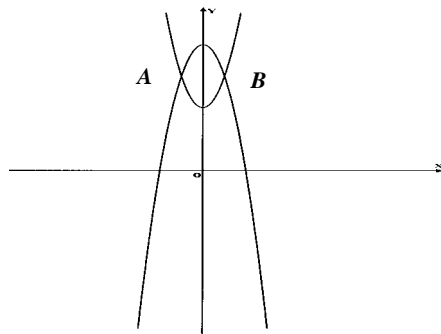


$$\text{г) } \begin{cases} x^2 + y^2 = 36 \\ y = x^2 - 6 \end{cases} \text{ . Ответ: } (0; -6), (3,4; 5), (-3,4; 5).$$



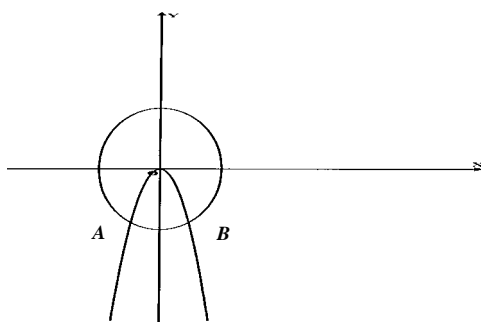
$$4. \text{ a) } \begin{cases} y = -x^2 + 8 \\ y = x^2 + 4 \end{cases}$$

Ответ: два решения.

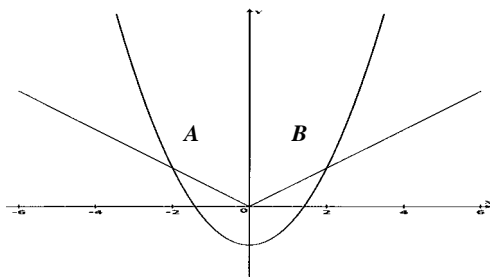


$$6) \begin{cases} x^2 + y^2 = 16 \\ y = -x^2 \end{cases}$$

Ответ: два решения.

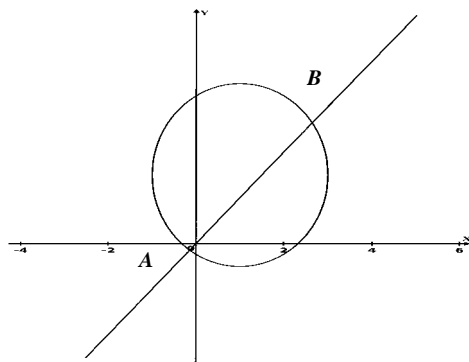


$$5. \text{ a) } \begin{cases} y = |x| \\ y = x^2 - 2 \end{cases}, \text{ две точки пересечения: } A(-2; 2), B(2; 2).$$



Ответ: $(-2; 2)$, $(2; 2)$.

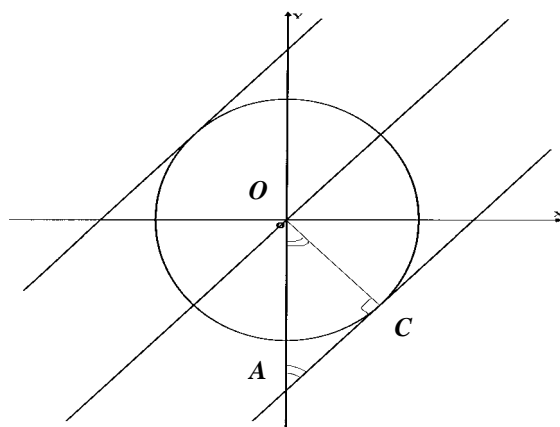
б)



$$\begin{cases} (x-2)^2 + (y-3)^2 = 16 \\ y = x \end{cases}, \text{ две точки пересечения: } A(-0,5; -0,5), B(5,2; 5,2).$$

Ответ: $(-0,5; -0,5), (5,2; 5,2)$.

6.
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ x - y = m; \quad y = x - m \end{cases}$$



Изобразим графики функций.

Рассмотрим $\triangle AOC$: $\angle C = 90^\circ$, $\angle A = \angle O = 45^\circ$.

$$OC = 3 \text{ (радиус)} \quad AC = 3 \quad OA = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}.$$

Ясно, что при $m = \pm 3\sqrt{2}$ получаем одну точку пересечения;

при $m \in (-3\sqrt{2}; 3\sqrt{2})$ — две точки; при $|m| > 3\sqrt{2}$ решений нет.

Ответ: а) $m = \pm 3\sqrt{2}$; б) $(-3\sqrt{2}; 3\sqrt{2})$ в) $(-\infty; -3\sqrt{2}) \cup (3\sqrt{2}; +\infty)$.

C-15

1. $\begin{cases} xy + 42 = 0 \\ x^2 - 2y - 61 = 0 \end{cases}, \begin{cases} 7 \cdot (-6) + 42 = 0 \\ 49 - 2 \cdot (-6) - 61 = 0 \end{cases}$ верно, значит, является.

2. $\begin{cases} x^2 - 5y - 24 = 0 \\ y = x - 2 \end{cases}, x^2 - 5(x - 2) - 24 = 0; x^2 - 5x + 10 - 24 = 0; ,$

$x^2 - 5x - 14 = 0, D = 25 + 4 \cdot 14 = 81,$

$x_1 = \frac{5+9}{2} = 7, y_1 = 7-2=5, (7; 5), x_2 = -2, y_2 = -2-2=-4, (-2; -4).$

Проверка: $(7; 5) \begin{cases} 7^2 - 5 \cdot 5 - 24 = 0 \\ 5 = 7 - 2 \end{cases}$ — верно,

$(-2; -4) \begin{cases} (-2)^2 - 5 \cdot (-4) - 24 = 0 \\ -4 = -2 - 2 \end{cases}$ — верно.

Ответ: $(7; 5), (-2; -4).$

3. 1) а) $\begin{cases} x^2 - 2y = 54 \\ y = x - 3 \end{cases};$

$x^2 - 2(x - 3) = 54,$
 $x^2 - 2x - 48 = 0$

$D = 4 + 4 \cdot 48 = 196, x_1 = \frac{-2+14}{2} = 8, x_2 = -6, y_1 = 8-3=5, y_2 = -6-3=-9.$

Ответ: $(8; 5), (-6; -9).$

б) $\begin{cases} x = y + 3 \\ xy - y = 7 \end{cases}, y(y + 3) - y = 7, y^2 + 2y - 7 = 0, D = 4 + 4 \cdot 7 = 32,$

$y_{1,2} = \frac{-2 \pm 4\sqrt{2}}{2} = -1 \pm 2\sqrt{2},$

$x_{1,2} = -1 \pm 2\sqrt{2} + 3 = 2 \pm 2\sqrt{2}.$ Ответ: $(2 \pm 2\sqrt{2}; -1 \pm 2\sqrt{2}).$

в) $\begin{cases} xy + x^2 = 4 \\ y = x + 2 \end{cases}, x(x + 2) + x^2 = 4; 2x^2 + 2x - 4 = 0; x^2 + x - 2 = 0, D = 9,$

$x_1 = \frac{-1+3}{2} = 1, x_2 = -2, y_1 = 1+2=3, y_2 = -2+2=0.$ Ответ: $(1; 3), (-2; 0).$

2) а) $\begin{cases} 4y + x = 0 \\ x^2 + y^2 = 17 \end{cases} \left| \begin{array}{l} x = -4y \\ 16y^2 + y^2 = 17, 17y^2 = 17, y_{1,2} = \pm 1, x_{1,2} = \mp 4. \end{array} \right.$

Ответ: $(\pm 4; \mp 1)$

б) $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 2x + y^2 = -1 \end{cases} \left| \begin{array}{l} x = 1 - 2y \\ 2 - 4y + y^2 = -1 \end{array} \right.$

$$y^2 - 4y + 3 = 0, \quad D=4, \quad y_1 = \frac{4+2}{2} = 3, \quad y_2 = 1, \quad x_1 = 1 - 2 \cdot 3 = -5, \quad x_2 = 1 - 2 \cdot 1 = -1.$$

Ответ: $(-5; 3), (-1; 1)$.

$$\text{в) } \begin{cases} xy + y^2 = 24 \\ x - 2y = 7 \end{cases} \quad \left| \begin{array}{l} y(7+2y) + y^2 = 24 \\ x = 7+2y \end{array} \right.,$$

$$3y^2 + 7y - 24 = 0, \quad D=49+4 \cdot 3 \cdot 24=337, \quad y_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{337}}{6},$$

$$x_{1,2} = 7 + \frac{-7 \pm \sqrt{337}}{3} = \frac{14 \pm \sqrt{337}}{3}. \quad \text{Ответ: } \left(\frac{14 \pm \sqrt{337}}{3}; \frac{-7 \pm \sqrt{337}}{6} \right).$$

$$\text{3) а) } \begin{cases} (x-2)(y+1) = 36 \\ x-2y = 6 \end{cases} \quad \left| \begin{array}{l} (4+2y)(y+1) = 36 \\ x = 6+2y \end{array} \right., \quad 2y^2 + 6y - 32 = 0,$$

$$y^2 + 3y - 16 = 0, \quad D=9+4 \cdot 16=73, \quad y_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{73}}{2}, \quad x_{1,2} = 6 - 3 \pm \sqrt{73} = 3 \pm \sqrt{73}.$$

$$\text{Ответ: } \left(3 \pm \sqrt{73}; \frac{-3 \pm \sqrt{73}}{2} \right).$$

$$\text{б) } \begin{cases} x^2 + xy - y^2 = 4 \\ 3x + y = 10 \end{cases} \quad \left| \begin{array}{l} x^2 + x(10-3x) - (10-3x)^2 = 4 \\ y = 10-3x \end{array} \right.,$$

$$x^2 + 10x - 3x^2 - 100 + 60x - 9x^2 = 4, \quad 11x^2 - 70x + 104 = 0, \quad D=4900 - 4 \cdot 11 \cdot 104 = 324,$$

$$x_1 = \frac{70+18}{22} = 4, \quad x_2 = \frac{26}{11}, \quad y_1 = 10 - 3 \cdot 4 = -2, \quad y_2 = 10 - 3 \cdot \frac{26}{11} = \frac{32}{11}.$$

$$\text{Ответ: } (4; -2), \left(\frac{26}{11}; \frac{32}{11} \right).$$

$$\text{4. } \begin{cases} 5x + 3y = 14 \\ 2x - 5y = 18 \\ x^2 + y^2 + 2xy - x = 0 \end{cases} \quad \left| \begin{array}{l} x = \frac{14-3y}{5} \\ 28-6y \\ \frac{28-6y}{5} - 5y = 18 \end{array} \right., \quad 28-6y-25y=90, \quad 31y=-62,$$

$$y=-2, \quad x=4, \quad 4^2 + (-2)^2 + 2 \cdot 4 \cdot (-2) - 4 = 0 \text{ — верно.} \quad \text{Ответ: } (4; -2).$$

$$\text{5. а) } \begin{cases} x^2 + y^2 = 18 \\ xy = 8 \end{cases} \quad \left| \begin{array}{l} x^2 + \frac{64}{x^2} = 18 \\ \frac{8}{x} \end{array} \right., \quad x^4 - 18x^2 + 64 = 0,$$

$$D=324 - 4 \cdot 64 = 68, \quad x^2_{1,2} = \frac{18 \pm 2\sqrt{17}}{2} = 9 \pm \sqrt{17}, \quad x_{1,2} = \pm \sqrt{9 + \sqrt{17}},$$

$$x_{3,4} = \pm \sqrt{9 - \sqrt{17}}, \quad y_{1,2} = \pm \frac{8}{\sqrt{9 + \sqrt{17}}}, \quad y_{3,4} = \pm \frac{8}{\sqrt{9 - \sqrt{17}}},$$

$$\text{б)} \begin{cases} 2x^2 - y^2 = 41 \\ 2x^2 + y^2 = 59 \end{cases}, 4x^2=100, x^2=25, x_{1,2}=\pm 5, y^2=50-41=9, y_{1,2}=\pm 3.$$

Ответ: $(\pm 5; 3), (\pm 5; -3)$.

$$\text{в)} \begin{cases} x^2 - 3x - 2y = 4 \\ x^2 + x - 3y = 18 \end{cases} \left| \begin{array}{l} y = \frac{x^2 - 3x - 4}{2} \\ x^2 + x - \frac{3x^2 - 9x - 12}{2} = 18 \end{array} \right., 2x^2 + 2x - 3x^2 + 9x + 12 = 36,$$

$$x^2 - 11x + 24 = 0, D = 121 - 4 \cdot 24 = 25, x_1 = \frac{11 + 5}{2} = 8, x_2 = 3,$$

$$y_1 = \frac{64 - 24 - 4}{2} = 18, y_2 = \frac{9 - 9 - 4}{2} = -2. \quad \text{Ответ: } (8; 18), (3; -2).$$

$$6. x^2 + (x^2 - 10 - 1)^2 = 13, x^2 + (x^2 - 11)^2 = 13, x^2 + x^4 - 22x^2 + 121 = 13,$$

$$x^4 - 21x^2 + 108 = 0, D = 9, x_1^2 = \frac{21 + 3}{2} = 12, x_2^2 = 9, x_{1,2} = \pm 2\sqrt{3}, x_{3,4} = \pm 3,$$

$$y_{1,2} = 12 - 10 = 2, y_{3,4} = 9 - 10 = -1. \quad \text{Ответ: } (\pm 2\sqrt{3}; 2); (\pm 3; -1).$$

$$7. \begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{12} \\ 2x - y = 2 \end{cases} \left| \begin{array}{l} \frac{1}{x} - \frac{1}{2x-2} = \frac{1}{12} \\ 12(2x-2) - 12x - x(2x-2) = 0 \end{array} \right., 12(2x-2) - 12x - x(2x-2) = 0,$$

$$6(2x-2) - 6x - x(x-1) = 0, 12x - 12 - 6x - x^2 + x = 0, x^2 - 7x + 12 = 0, D = 1,$$

$$x_1 = \frac{7 + 1}{2} = 4, x_2 = 3, y_1 = 6, y_2 = 4. \quad \text{Ответ: } (4; 6), (3; 4).$$

$$\text{б)} \begin{cases} \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{10}{3} \\ x - y = 6 \end{cases} \left| \begin{array}{l} \frac{6+y}{y} + \frac{y}{6+y} - \frac{10}{3} = 0 \\ x = 6 + y \end{array} \right.,$$

$$3(6+y)^2 + 3y^2 - 10y(6+y) = 0, 3(36 + 12y + y^2) + 3y^2 - 60y - 10y^2 = 0,$$

$$108 + 36y + 3y^2 + 3y^2 - 60y - 10y^2 = 0, 4y^2 + 24y - 108 = 0, y^2 + 6y - 27 = 0,$$

$$D = 36 + 4 \cdot 27 = 144, y_1 = \frac{-6 + 12}{2} = 3, y_2 = -9, x_1 = 9, x_2 = -3. \quad \text{Ответ: } (9; 3), (-3; -9).$$

C-16

$$1. \text{ Пусть } x\text{--первое число, } y\text{--второе число, тогда } \begin{cases} x + y = 25 \\ xy = 144 \end{cases} \left| \begin{array}{l} y = 25 - x \\ x(25 - x) = 144 \end{array} \right.,$$

$$x^2 - 25x + 144 = 0, D = 49, x_1 = \frac{25 + 7}{2} = 16, x_2 = 9, y_1 = 9, y_2 = 16.$$

Ответ: 16, 9.

2. Пусть x см--один катет, тогда $(x+4)$ см--другой катет.

Используя теорему Пифагора, получаем: $x^2 + (x+4)^2 = 400$,

$$2x^2+8x+16-400=0, x^2+4x-192=0, D=28^2, x_1=\frac{-4+28}{2}=12, x_2 < 0.$$

12 см — первый катет, $12+4=16$ (см) — второй катет.

3. Пусть x м, y м — ширина и длина соответственно. Тогда xy м² — площадь или 3250 м², $2(x+y)$ м — периметр или 230 м.

$$\text{Получаем систему: } \begin{cases} xy = 3250 \\ 2(x+y) = 230 \end{cases} \left| \begin{array}{l} y(115-y) = 3250 \\ x = 115-y \end{array} \right.,$$

$$y^2-115y+3250=0, D=225, y_1=\frac{115+15}{2}=65, y_2=50,$$

$$x_1=115-65=50, x_2=115-50=65. \quad \text{Ответ: 50 м, 65 м.}$$

4. Пусть x см, y см — ширина и длина соответственно. Тогда $2(x+y)$ см — периметр или 24 см. (x^2+y^2) см² — сумма площадей квадратов или 148 см²

$$\text{Получаем систему: } \begin{cases} 2(x+y) = 24 \\ x^2+y^2 = 148 \end{cases} \left| \begin{array}{l} x = 12-y \\ (12-y)^2+y^2 = 148 \end{array} \right.,$$

$$144-24y+2y^2=148, 2y^2-24y-4=0, y^2-12y-2=0, D=144+4 \cdot 2=152,$$

$$y_{1,2}=\frac{12 \pm \sqrt{152}}{2}=6 \pm \sqrt{38}, y=6+\sqrt{38}, x=6-\sqrt{38}.$$

$$\text{Ответ: } 6-\sqrt{38} \text{ см, } 6+\sqrt{38} \text{ см.}$$

5. Пусть x — первое число, y — второе число, тогда xy — их произведение, $(x+y)$ — их сумма $3y$ — утроенное второе число.

$$\text{Получаем систему: } \begin{cases} xy = x+y+13 \\ x-3y = 9 \end{cases} \left| \begin{array}{l} y(3y+9) = 3y+9+y+13 \\ x = 3y+9 \end{array} \right.,$$

$$3y^2+9y=4y+22, 3y^2+5y-22=0, D=25-4 \cdot 3 \cdot 22=289, y_1=\frac{-5+17}{6}=2,$$

$$y_2=-\frac{11}{3}, x_1=3 \cdot 2+9=15, x_2=-11+9=-2. \quad \text{Ответ: 15 и 2 или } -2 \text{ и } -\frac{11}{3}.$$

6. Пусть x км/ч — скорость I автомобиля, y км/ч — скорость II автомобиля, $3x$, $3y$ км — прошли за 3 ч соответственно I и II автомобиль. $\frac{360}{x}$ ч, $\frac{360}{y}$ ч — потратили на весь путь I и II автомобиль соответственно.

$$\text{Получаем систему: } \begin{cases} 3x-3y = 30 \\ \frac{360}{x} + \frac{1}{2} = \frac{360}{y} \end{cases} \left| \begin{array}{l} x-y = 10; x = 10+y \\ \frac{360}{10+y} + \frac{1}{2} - \frac{360}{y} = 0 \end{array} \right.,$$

$$720y+y^2+10y-7200-720y=0, y^2+10y-7200=0,$$

$$D=100+4 \cdot 7200=170^2, y_1=\frac{-10+170}{2}=80, y_2 < 0, x_1=10+80=90.$$

90 и 80 км/ч — скорости I и II автомобиля соответственно.

7. Пусть 1—вся работа, x ч — выполняет всю работу I тракторист, тогда $(x+4)$ ч — выполняет всю работу II тракторист. $\frac{1}{x}$ и $\frac{1}{x+4}$ часть работы — производительность I и II. Известно, что за 2 ч 40 мин оба тракториста, работая совместно, сделают всю работу, т.е. $\frac{8}{3}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x+4}\right) = 1$, $\frac{8}{3x} + \frac{8}{3(x+4)} - 1 = 0$, $8x+32+8x-3x^2-12x=0$, $3x^2-4x-32=0$, $D=16+12 \cdot 32=400$, $x_1 = \frac{4+20}{6} = 4$, $x_2 < 0$. 4 ч и 8 ч — потребуется I и II трактористу, чтобы выполнить всю работу.

С-17

1. **а)** 14, 13, 12, 11, 10; **б)** 1, 8, 27, 64, 125; **в)** 7, 12, 17, 22, 27.
2. $x_n = 6n - 1$; **а)** $x_1 = 6 \cdot 1 - 1 = 5$; **б)** $x_4 = 6 \cdot 4 - 1 = 23$;
в) $x_{20} = 6 \cdot 20 - 1 = 119$; **г)** $x_{100} = 6 \cdot 100 - 1 = 599$; **д)** $x_k = 6k - 1$;
е) $x_{k+2} = 6(k+2) - 1 = 6k + 11$.
3. а) $a_n = n - 2$, $a_3 = 3 - 2 = 1$, $a_6 = 6 - 2 = 4$, $a_{20} = 20 - 2 = 18$;
б) $a_n = \frac{3n-1}{2}$, $a_3 = \frac{9-1}{2} = 4$, $a_6 = \frac{18-1}{2} = 8,5$, $a_{20} = \frac{60-1}{2} = 29,5$;
в) $a_n = n^2$, $a_3 = 3^2 = 9$, $a_6 = 6^2 = 36$, $a_{20} = 20^2 = 400$; **г)** $a_n = n(n+1)$,
 $a_3 = 3(3+1) = 12$, $a_6 = 6(6+1) = 42$, $a_{20} = 20(20+1) = 420$;
д) $a_n = -n^2 + 6$, $a_3 = -9 + 6 = -3$, $a_6 = -36 + 6 = -30$, $a_{20} = -400 + 6 = -394$;
е) $a_n = (-1)^n$, $a_3 = (-1)^3 = -1$, $a_6 = (-1)^6 = 1$, $a_{20} = (-1)^{20} = 1$.
4. $25 = 46 - 3n$, $3n = 21$, $n = 7$. Ответ: 7.
5. а) $C_1 = 8$, $C_{n+1} = C_n - 1$, $C_2 = C_1 - 1 = 7$, $C_3 = C_2 - 1 = 6$, $C_4 = C_3 - 1 = 5$,
 $C_5 = C_4 - 1 = 4$; **б)** $C_1 = 32$, $C_{n+1} = 0,5C_n$, $C_2 = 0,5C_1 = 16$, $C_3 = 0,5C_2 = 8$,
 $C_4 = 0,5C_3 = 4$, $C_5 = 0,5C_4 = 2$.
6. 0,2; 0,22; 0,222; 0,2222; 0,22222.
7. $b_n = n^2 - 4n + 9$;
а) $9 = n^2 - 4n + 9$, $n^2 - 4n = 0$, $n_1 = 2$, $n_2 = 4$, значит, $9 = b_4$;
б) $59 = n^2 - 4n + 9$, $n^2 - 4n - 50 = 0$;
 $D = 16 + 4 \cdot 50 = 216$, $n_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{216}}{2} \notin N$, значит, 59 не член $\{b_n\}$;
в) $409 = n^2 - 4n + 9$, $n^2 - 4n - 400 = 0$, $D = 16 + 4 \cdot 400 = 1616$,
 $n_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{1616}}{2} \notin N$, значит, 409 — не член $\{b_n\}$.
8. а) $x_1 = 6$, $x_{n+1} = x_n + 6$, $x_n = 6n$;
б) $x_1 = 1$, $x_{n+1} = 3x_n$, $x_n = 3^{n-1}$.

C-18

1. $a_1=2,8, a_2=-0,4, d=a_2-a_1=-0,4-2,8=-3,2, a_3=a_2+d=-0,4-3,2=-3,6, a_4=a_3+d=-3,6-3,2=-6,8, a_5=a_4+d=-6,8-3,2=-10, a_6=a_5+d=-10-3,2=-13,2.$
 2. $a_1=-1,2, d=3, \mathbf{a)} a_4=a_1+3d=-1,2+9=7,8, \mathbf{б)} a_8=a_1+7d=-1,2+21=19,8, \mathbf{в)} a_{21}=a_1+20d=-1,2+60=58,8, \mathbf{г)} a_{k+2}=a_1+(k-1)d=-1,2+3k-3=-4,2+3k.$

3. $\mathbf{a)} a_1=5, a_8=19, a_8=a_1+7d, d=\frac{a_8-a_1}{7}=\frac{19-5}{7}=2, \mathbf{б)} a_1=2, a_{11}=-5,$

$a_{11}=a_1+10d, d=\frac{a_{11}-a_1}{10}=\frac{-5-2}{10}=-0,7, \mathbf{в)} a_1=-0,3, a_7=1,9,$

$a_7=a_1+6d, d=\frac{a_7-a_1}{6}=\frac{1,9+0,3}{6}=\frac{1,1}{3}=\frac{11}{30}.$

4. $a_1=80, d=17, a_8=a_1+7d=80+7 \cdot 17=199, a_{12}=a_1+11d=80+11 \cdot 17=267.$

5. $b_1=12, d=3, \mathbf{a)} b_n=-6+b_1+d(n-1)=12+3(n-1)=3n+9, 3n=-15, n=-5 \notin N,$ значит, -6 — не член $\{b_n\}; \mathbf{б)} 0=3n+9, n=-3 \notin N,$ значит, 0 — не член $\{b_n\};$
 $\mathbf{в)} 9=3n+9, n=0 \notin N,$ значит, 9 — не член $\{b_n\}.$

6. $a_1=6,5, d=8-6,5=1,5; \mathbf{a)} 13=a_1+d(n-1)=6,5+1,5(n-1)=1,5n+5,$

$8=1,5n; n=\frac{8}{1,5} \notin N,$ значит, 13 не встретится; $\mathbf{б)} 22,5=1,5n+5,$

$1,5n=17,5, n=\frac{17,5}{1,5} \notin N,$ значит, $22,5$ не встретится; $\mathbf{в)} 36=1,5n+5,$

$1,5n=31, n=\frac{31}{1,5} \notin N,$ значит, 36 не встретится.

7. $64, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, 46, a_1=64, a_7=46, a_7=a_1+6d, d=\frac{a_7-a_1}{6}=-3,$

поэтому: $a_2=a_1+d=61, a_3=a_2+d=58, a_4=a_3+d=55, a_5=a_4+d=52, a_6=a_5+d=49.$

8. $x_4=x_1+3d, x_6=x_1+5d, x_4+x_{n-4}=x_1+3d+x_1+(n-4-1)d=2x_1+3d+nd-5d=$
 $=2x_1+nd-2d, x_6+x_{n-6}=x_1+5d+x_1+d(n-6-1)=2x_1+5d+nd-7d=2x_1+nd-2d=x_4+x_{n-4}.$

9. $a_1=47;$ Пусть $a_2=x^2, a_3=(x+1)^2,$ где $x \in N.$ Тогда $a_2-a_1=a_3-a_2.$

Получаем: $x^2-47=(x+1)^2-x^2, x^2-47=2x+1, x^2-2x-48=0, D=4+4 \cdot 48=4 \cdot 49,$

$x_1=\frac{2+2 \cdot 7}{2}=8, x_2 < 0.$ Значит, $a_2=8^2=64, a_3=81.$ Ответ: 64 и $81.$

10. По свойству арифметической прогрессии $\frac{1}{a+c} - \frac{1}{b+c} = \frac{1}{a+b} - \frac{1}{a+c}.$

Нужно доказать, что $b^2 = \frac{a^2+c^2}{2}.$

Докажем это: $\frac{1}{a+c} - \frac{1}{b+c} - \frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+c} = 0, \frac{2}{a+c} - \frac{1}{b+c} - \frac{1}{a+b} = 0,$

$2(a+b)(b+c) - (a+b)(a+c) - (a+c)(b+c) = 0,$

$2ab+2b^2+2ac+2bc-a^2-ab-ac-bc-ab-bc-ac-c^2=0, b^2 = \frac{a^2+c^2}{2},$ ч.т.д.

C-19

1. $a_1=4, a_2=-6, d=a_2-a_1=-10$; а) $S_8 = \frac{2a_1 + d(8-1)}{2} \cdot 8 = \frac{8-10 \cdot 7}{2} \cdot 8 = -62 \cdot 4 = -248$;

б) $S_{18} = \frac{2a_1 + d(18-1)}{2} \cdot 18 = (8-10 \cdot 17) \cdot 9 = -1458$;

в) $S_{35} = \frac{2a_1 + d(35-1)}{2} \cdot 35 = \frac{8-10 \cdot 34}{2} \cdot 35 = -5810$;

г) $S_k = \frac{2a_1 + d(k-1)}{2} \cdot k = \frac{8-10(k-1)}{2} \cdot k = k(4-5k+5) = k(9-5k)$.

2. а) $S_{10} = \frac{2a_1 + d(10-1)}{2} \cdot 10 = \frac{10+3 \cdot 9}{2} \cdot 10 = 185$;

б) $S_{10} = \frac{2a_1 + d(10-1)}{2} \cdot 10 = (-16+4 \cdot 9) \cdot 5 = 100$;

в) $S_{10} = \frac{2a_1 + d(10-1)}{2} \cdot 10 = (37-2,5 \cdot 9) \cdot 5 = 72,5$;

г) $S_{10} = (2a_1+9d) \cdot 5 = (4-2\sqrt{2}+9\sqrt{2}) \cdot 5 = 20+35\sqrt{2}$.

3. $x_n=4n+5, x_1=4+5=9, x_6=4 \cdot 6+5=29, x_{20}=80+5=85, x_k=4k+5$,

$S_6 = \frac{x_1+x_6}{2} \cdot 6 = 38 \cdot 3 = 114, S_{20} = \frac{x_1+x_{20}}{2} \cdot 20 = 940, S_k = \frac{9+4k+5}{2} \cdot k = k(7+2k)$.

4. а) $a_1=1, d=1, a_{50}=50, S_{50} = \frac{1+50}{2} \cdot 50 = 51 \cdot 25 = 1275$; б) $a_1=4, d=4, a_{25}=100$,

$S_{25} = \frac{4+100}{2} \cdot 25 = 1300$; в) $a_1=1, d=2, a_{50}=99, S_{50} = \frac{1+99}{2} \cdot 50 = 2500$.

5. а) $a_1=6, a_{11}=46, d = \frac{a_{11}-a_1}{10} = \frac{40}{10} = 4, S_{12} = \frac{2 \cdot 6 + 4 \cdot 11}{2} \cdot 12 = 28 \cdot 12 = 336$;

б) $a_6=12, a_{16}=100, \begin{cases} 12 = a_1 + 5d \\ 100 = a_1 + 15d \end{cases} \left| \begin{array}{l} a_1 = 12 - 5d \\ a_1 = 100 - 15d \end{array} \right., 12-5d=100-15d,$

$10d=88, d=8,8, a_1=12-5 \cdot 8,8=-32, S_{12} = \frac{-64+8,8 \cdot 11}{2} \cdot 12 = 196,8$.

6. $a_1=12, d=3, S_{1800} = \frac{24+3 \cdot 1799}{2} \cdot 1800 = 4878900$ (м).

7. $S_3=60, S_7=56, \begin{cases} 60 = \frac{2a_1+2d}{2} \cdot 3 \\ 56 = \frac{2a_1+6d}{2} \cdot 7 \end{cases} \left| \begin{array}{l} 20 = a_1 + d \\ 8 = a_1 + 3d \end{array} \right., 20-d=8-3d, 2d=-12,$

$d=-6, a_1=8+3 \cdot 6=26$.

8. Из условия задачи ясно, что за первый час расстояние между автомобилями сократится на $60+45=105$ (км), а за каждый последующий на 5 км больше. Значит, $a_1=105, d=5, S_n=450, n=?$;

$$450 = \frac{210 + 5 \cdot (n-1)}{2} \cdot n, 900 = (205 + 5n) \cdot n, 5n^2 + 205n - 900 = 0,$$

$$n^2 + 41n - 180 = 0, D = 49^2, n_1 = \frac{-41 + 49}{2} = 4, n_2 < 0.$$

Итак, через 4 ч автомобили встретятся.

$$9. \text{ а) } 2+6+10+\dots+x=450, d=4, a_1=2, S_n=450, 450 = \frac{4+4(n-1)}{2} \cdot n,$$

$$450 = (2+2(n-1)) \cdot n, 2n^2=450, n^2=225, n=15, a_{15}=a_1+14d=2+4 \cdot 14=58;$$

$$\text{б) } 30+27+24+\dots+x=162, d=-3, a_1=30, S_n=162, 162 = \frac{60-3(n-1)}{2} \cdot n,$$

$$324 = (63-3n)n, 3n^2-63n+324=0, n^2-21n+108=0, D=441-4 \cdot 108=9,$$

$$n_1 = \frac{21+3}{2} = 12, n_2=9, a_9=a_1+8d=30-24=6, a_{12}=a_1+11d=30-33=-3.$$

$$10. \text{ а) } S_n = n^2 + n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n, n+1 = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} = a_1 + \frac{dn}{2} - \frac{d}{2},$$

$$\begin{cases} 1 = \frac{d}{2}; & d = 2 \\ 1 = a_1 - \frac{d}{2}; & a_1 = 2 \end{cases}, \text{ значит, } \{a_n\} \text{ -- арифметическая прогрессия.}$$

$$\text{б) } S_n = n(n+4) = \frac{2a_1 + d(n+1)}{2} \cdot n, n+4 = a_1 + \frac{dn}{2} - \frac{d}{2}, \begin{cases} \frac{d}{2} = 1; & d = 2 \\ 4 = a_1 - \frac{d}{2}; & a_1 = 5 \end{cases}.$$

Значит, $\{a_n\}$ -- арифметическая прогрессия.

$$\text{в) } S_n = 4n^2 = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n, 4n = a_1 + \frac{dn}{2} - \frac{d}{2}, \begin{cases} \frac{d}{2} = 4, & d = 8 \\ a_1 - \frac{d}{2} = 0, & a_1 = 4 \end{cases}.$$

Значит, $\{a_n\}$ -- арифметическая прогрессия.

С-20

$$1. b_1=1,6; b_2=0,8, q = \frac{b_2}{b_1} = 0,5, b_3=b_2 \cdot q=0,4, b_4=b_3 \cdot q=0,2, b_5=b_4 \cdot q=0,1,$$

$$b_6=b_5 \cdot q=0,05.$$

$$2. a_1=3,2, q = \frac{1}{2}; \text{ а) } a_2=a_1q=1,6; \text{ б) } a_4=a_1q^3=3,2 \cdot \frac{1}{8}=0,4;$$

$$\text{в) } a_7=a_1q^6=3,2 \cdot \frac{1}{64}=0,05; \text{ г) } a_{k+1}=a_1q^k = \frac{3,2}{2^k}.$$

$$3. \text{ а) } b_1=2, q=3, b_6=b_1q^5=2 \cdot 3^5=486; \text{ б) } b_1=16, q = \frac{1}{2},$$

$$b_9 = b_1 q^8 = 16 \cdot \frac{1}{2^8} = \frac{2^4}{2^8} = \frac{1}{16}; \text{ в) } b_1 = 128, q = \frac{1}{4} \quad b_4 = b_1 q^3 = 128 \cdot \frac{1}{64} = 2;$$

$$\text{г) } b_1 = 4, q = \sqrt{3} \quad b_7 = b_1 q^6 = 4(\sqrt{3})^6 = 108.$$

$$4. \text{ а) } a_5 = \frac{1}{64}, q = \frac{1}{2}, a_1 = \frac{a_5}{q^4} = \frac{2^4}{64} = \frac{1}{4}; \text{ б) } a_6 = 243, q = -3, a_1 = \frac{a_6}{q^5} = -\frac{243}{243} = -1.$$

$$5. \text{ а) } b_5 = 11, b_7 = 99, b_7 = b_5 q^2, q = \pm \sqrt{\frac{b_7}{b_5}} = \pm 3; \text{ б) } b_6 = 100, b_8 = 9,$$

$$b_8 = b_6 q^2, q = \pm \sqrt{\frac{b_8}{b_6}} = \pm 0,3.$$

$$6. \frac{1}{16}, b_2, b_3, b_4, 16; b_5 = b_1 \cdot q^4, q = \pm \sqrt[4]{\frac{b_5}{b_1}} = \pm 4, b_2 = b_1 \cdot q = \pm \frac{1}{4}; \quad b_3 = b_2 \cdot q = 1,$$

$$b_4 = b_3 \cdot q = \pm 4.$$

7. а) $a_1=1, a_2=1, a_3=1$ — не геометрическая прогрессия. Для доказательства можно взять, например, $a_n=2^n$. Тогда $a_1=2, a_2=4, a_3=8$, но $a_1-1=1, a_2-1=3, a_3-1=7, \frac{3}{1} \neq \frac{7}{3}$, значит, это уже не геометрическая прогрессия.

б) $4a_1, 4a_2, 4a_3$ — очевидно, геометрическая прогрессия с тем же самым знаменателем. в) $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \frac{1}{a_3}$ — геометрическая прогрессия.

$$8. \begin{cases} b_5 - b_3 = 72 \\ b_4 - b_2 = 36 \end{cases} \left| \begin{array}{l} b_1 q^4 - b_1 q^2 = 72 \\ b_1 q^3 - b_1 q = 36 \end{array} \right. \quad \frac{q^3 - q}{q^2 - 1} = 2; \quad \frac{q(q^2 - 1)}{q^2 - 1} = 2, \quad q = \pm 1 \text{ или } q = 2,$$

$q=1$ — не подходит к условию задачи, т.к. тогда бы $b_1=b_2=b_3=b_4=b_5$, $b_5-b_3=0 \neq 72, q=-1$ — также не подходит по схожим причинам.

$$\text{Если } q=2, \text{ то } b_1 = \frac{36}{q^3 - q} = \frac{36}{6} = 6. \quad \text{Ответ: } b_1=6; q=2.$$

$$9. \begin{cases} b_1 + b_4 = 13 \\ b_2 + b_3 = 4 \end{cases} \left| \begin{array}{l} b_1 + b_1 q^3 = 13 \\ b_1 q + b_1 q^2 = 4 \end{array} \right. \quad \frac{1+q^3}{q+q^2} = \frac{13}{4}, \quad \frac{(1+q)(1-q+q^2)}{q(1+q)} = \frac{13}{4},$$

$$q_1 = -1, 4q^2 - 4q + 4 = 13q, 4q^2 - 17q + 4 = 0, D = 289 - 4 \cdot 4 \cdot 4 = 225,$$

$$q_2 = \frac{17+15}{8} = 4, q_3 = \frac{1}{4}, q = -1 \text{ — не подходит, т.к. тогда бы } b_2 = -b_3,$$

$$b_2 + b_3 = 0 \neq 4. \text{ Если } q=4, \text{ то } b_1 = \frac{13}{1+q^3} = \frac{13}{65} = \frac{1}{5}, b_2 = \frac{4}{5}, b_3 = \frac{16}{5}, b_4 = \frac{64}{5}.$$

$$\text{Если же } q = \frac{1}{4}, \text{ то } b_1 = \frac{13}{1+\frac{1}{64}} = \frac{64}{5}, b_2 = \frac{16}{5}, b_3 = \frac{4}{5}, b_4 = \frac{1}{5}.$$

10. a, b, c, d — геометрическая прогрессия, т.е. $b^2=ac, c^2=bd$.
 Надо доказать, что $(a-d)^2=(a-c)^2+(b-c)^2+(b-d)^2$, т.е., что $a^2-2ad+d^2 =$
 $=a^2-2ac+c^2+b^2-2bc+c^2+b^2-2bd+d^2, 2b^2+2c^2=2ac+2bc+2bd-2ad$,
 Т.к. a, b, c, d — геометрическая прогрессия, то $bc=ad; 2b^2+2c^2=2(ac+bd),$
 $2bc-2ad=0$, т.е. $2b^2+2c^2=2(ac+bd)+2bc-2ad$.
 Видно, что оба данных равенства эквивалентны, значит, требуемое ра-
 венство — тождество. Ч.т.д.

С-21

$$1. \text{ а) } b_1=27, q=\frac{1}{3}, S_6=\frac{b_1(q^6-1)}{q-1}=\frac{27\left(\frac{1}{729}-1\right)}{\frac{1}{3}-1}=\frac{27 \cdot 728 \cdot 3}{729 \cdot 2}=\frac{364}{9};$$

$$\text{б) } b_1=-9, q=2, S_6=\frac{-9(2^6-1)}{2-1}=-567;$$

$$\text{в) } b_1=16, q=-\frac{1}{2}, S_6=\frac{16 \cdot \left(\frac{1}{64}-1\right)}{-\frac{1}{2}-1}=\frac{16 \cdot 63 \cdot 2}{64 \cdot 3}=\frac{21}{2};$$

$$\text{г) } b_1=3\sqrt{2}, q=\sqrt{2}, S_6=\frac{3\sqrt{2}(8-1)}{\sqrt{2}-1}=21\sqrt{2}(\sqrt{2}+1).$$

$$2. \text{ а) } b_1=8, q=\frac{1}{2}, S_5=\frac{b_1(q^5-1)}{q-1}=\frac{8\left(\frac{1}{32}-1\right)}{\frac{1}{2}-1}=\frac{8 \cdot 31 \cdot 2}{32}=15,5;$$

$$\text{б) } b_1=1,5, q=-2, S_5=\frac{1,5(-32-1)}{-2-1}=16,5; \text{ в) } b_1=3, q=3, S_5=\frac{3(3^5-1)}{3-1}=363;$$

$$\text{г) } b_1=\sqrt{2}, q=\sqrt{2}, S_5=\frac{\sqrt{2}(4\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}-1}=\sqrt{2}(4\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)=$$

$$=\sqrt{2}(8-\sqrt{2}+4\sqrt{2}-1)=\sqrt{2}(7+3\sqrt{2}).$$

$$3. \text{ а) } a_1=81, q=\frac{1}{3}, S_6=\frac{81 \cdot \left(\frac{1}{729}-1\right)}{\frac{1}{3}-1}=\frac{364}{3}; \text{ б) } a_1=18, q=-\frac{1}{2},$$

$$S_5=\frac{18\left(-\frac{1}{32}-1\right)}{-\frac{1}{2}-1}=\frac{18 \cdot 33 \cdot 2}{32 \cdot 3}=12,375; \text{ в) } a_1=4, q=-3, S_4=\frac{4(81-1)}{-4}=-80;$$

$$\text{г) } a_1=\sqrt{3}, q=\sqrt{3}, S_8=\frac{\sqrt{3}(81-1)}{\sqrt{3}-1}=\frac{80\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{2}=40\sqrt{3}(\sqrt{3}+1).$$

$$4. \text{ а) } b_4 = \frac{1}{16}, b_5 = \frac{1}{64}, q = \frac{1}{4}, b_1 = \frac{b_4}{q^3} = 4, S_5 = \frac{4\left(\frac{1}{1024} - 1\right)}{\frac{1}{4} - 1} = \frac{4 \cdot 1023 \cdot 4}{1024 \cdot 3} = \frac{341}{64};$$

$$\text{б) } b_2 = 4, b_4 = 36, q = \sqrt{\frac{b_4}{b_2}} = 3, b_1 = \frac{4}{3}, S_5 = \frac{4(243 - 1)}{3 \cdot 2} = \frac{484}{3}.$$

$$5. \text{ а) } q = \frac{2}{3}, S_4 = 65, 65 = \frac{b_1\left(\frac{16}{81} - 1\right)}{\frac{2}{3} - 1} = \frac{b_1 \cdot 65 \cdot 3}{81}, b_1 = 27;$$

$$\text{б) } q = 2, S_8 = 765, 765 = \frac{b_1(256 - 1)}{2 - 1} = 255b_1, b_1 = 3.$$

$$6. \text{ а) } b_n = 4^n, \frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{4^{n+1}}{4^n} = 4, \frac{b_{n+2}}{b_{n+1}} = 4, \text{ т.е. } \frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{b_{n+2}}{b_{n+1}} \text{ для любого } n,$$

значит, $\{b_n\}$ — геометрическая прогрессия;

$$b_1 = 4; q = 4, S_4 = \frac{4(256 - 1)}{3} = \frac{1020}{3} = 340;$$

$$\text{б) } b_n = 2 \cdot 5^n, \frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{b_{n+2}}{b_{n+1}} = 5, \text{ значит, } \{b_n\} \text{ — геометрическая прогрессия;}$$

$$b_1 = 10; q = 5, S_4 = \frac{10(625 - 1)}{4} = 1560;$$

$$\text{в) } x_n = 2^n - 1, \frac{x_{n+1}}{x_n} \neq \frac{x_{n+2}}{x_{n+1}}, \text{ значит, } \{x_n\} \text{ — не геометрическая прогрессия.}$$

$$7. \begin{cases} b_5 - b_3 = 144 \\ b_4 - b_2 = 48 \end{cases} \left| \begin{array}{l} b_1 q^4 - b_1 q^2 = 144 \\ b_1 q^3 - b_1 q = 48 \end{array} \right. , \frac{q^3 - q}{q^2 - 1} = 3, \frac{q(q^2 - 1)}{q^2 - 1} = 3, q_1 = 3,$$

$$q_{2,3} = \pm 1, q = \pm 1 \text{ не подходит, т.к. } b_5 - b_3 \neq 144 \text{ в этом случае } b_1 = \frac{48}{27 - 3} = 2,$$

$$S_6 = \frac{2(729 - 1)}{2} = 728.$$

$$8. \begin{cases} b_1 + b_2 + b_3 = 14 \\ b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = 84 \end{cases}, b_2 = \sqrt{b_1 b_3}, \begin{cases} b_1 + b_3 + \sqrt{b_1 b_3} = 14 \\ b_1^2 + b_1 b_3 + b_3^2 = 84 \end{cases}.$$

С-22

$$1. \text{ а) } b_1 = 49, b_2 = 7, q = \frac{1}{7}, |q| < 1, S = \frac{b_1}{1 - q} = \frac{49 \cdot 7}{6} = \frac{343}{6};$$

$$\text{б) } b_1 = 1, q = \frac{1}{3}, |q| < 1, S = \frac{1 \cdot 3}{2} = 1,5;$$

в) $b_1=0,4$; $q=\frac{0,04}{0,4}=-0,1$ $|q|<1$, $S=\frac{0,4}{1+0,1}=\frac{4}{11}$;

г) $b_1=\sqrt{5}$, $q=\frac{1}{\sqrt{5}}$, $|q|<1$, $S=\frac{\sqrt{5}}{1-\frac{1}{\sqrt{5}}}=\frac{5}{\sqrt{5}-1}=\frac{5(\sqrt{5}+1)}{4}$;

д) $b_1=4\sqrt{2}$, $q=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $|q|<1$, $S=\frac{4\sqrt{2}}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}=\frac{8}{\sqrt{2}-1}=8(\sqrt{2}+1)$;

е) $b_1=\frac{1}{2+\sqrt{2}}$, $q=\frac{2+\sqrt{2}}{2}>1$.

2. а) $S=16$, $q=\frac{1}{4}$, $16=\frac{4b_1}{3}$, $b_1=12$; **б)** $S_1=81$, $q=-\frac{1}{9}$, $81=\frac{9b_1}{10}$ $b_1=90$;

в) $S=4\sqrt{2}+4$, $q=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $4\sqrt{2}+4=\frac{b_1}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}=\frac{\sqrt{2}b_1}{\sqrt{2}-1}$, $4=\sqrt{2}b_1$, $b_1=2\sqrt{2}$;

г) $S=3(\sqrt{3}-1)$, $q=\frac{1}{\sqrt{3}}$, $3(\sqrt{3}-1)=\frac{b_1}{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}=\frac{\sqrt{3}b_1}{\sqrt{3}-1}$,
 $3(3+1-2\sqrt{3})=\sqrt{3}b_1$; $b_1=\sqrt{3}(4-2\sqrt{3})$.

3. а) $0,(7)=0,777\dots=0,7+0,07+0,007+\dots=\frac{0,7}{1-0,1}=\frac{7}{9}$;

б) $0,(28)=0,2828\dots=0,28+0,0028+\dots=\frac{0,28}{1-0,01}=\frac{28}{99}$;

в) $3,(1)=3,111\dots=3+0,1+0,01+\dots=3+\frac{0,1}{1-0,1}=3+\frac{1}{9}=\frac{28}{9}$;

г) $2,(13)=2,1313\dots=2+0,13+0,0013+\dots=2+\frac{0,13}{1-0,01}=2+\frac{13}{99}=\frac{211}{99}$;

д) $0,6(3)=0,633\dots=0,6+0,03+0,003+\dots=0,6+\frac{0,03}{1-0,1}=0,6+\frac{1}{30}=\frac{6}{10}+\frac{1}{30}=\frac{19}{30}$;

е) $0,5(14)=0,51414\dots=0,5+0,014+0,00014+\dots=0,5+\frac{0,014}{1-0,01}=\frac{1}{2}+\frac{14}{990}=\frac{509}{990}$.

4. $q=\frac{\sqrt{2}}{4}$, $S=\frac{16(4+\sqrt{2})}{7}$, $\frac{16(4+\sqrt{2})}{7}=\frac{b_1}{1-\frac{\sqrt{2}}{4}}=\frac{4b_1}{4-\sqrt{2}}$, $b_1=\frac{4\cdot 14}{7}=8$,
 $b_3=b_1q^2=8\cdot\frac{2}{16}=1$.

5. Сторона I треугольника 16 см, второго — 8 см, третьего — 4 см и т.д. Периметр I треугольника 48 см, II-го — 24 см, III-го — 12 см и т.д. Т.е. периметры образуют геометрическую прогрессию.

$$b_1=48, \quad q=\frac{1}{2}, \quad S=\frac{48}{\frac{1}{2}}=96. \quad \text{Ответ: } 96 \text{ см.}$$

$$6. \quad b_2=36, \quad S=144, \quad |q|<1, \quad S=b_1+\frac{b_2}{1-q}=\frac{b_2}{q}+\frac{b_2}{1-q}=b_2 \cdot \frac{1}{q(1-q)},$$

$$144=36 \cdot \frac{1}{q(1-q)}, \quad 4q(1-q)=1, \quad 4q^2-4q+1=0, \quad (2q-1)^2=0, \quad q=\frac{1}{2}, \quad b_1=\frac{b_2}{q}=72.$$

C-23

1. 1) а) $\sqrt{x}=4, \quad x=16$; б) $\sqrt{x}=\frac{1}{3}, \quad x=\frac{1}{9}$; в) $6\sqrt{x}=0, \quad x=0$;

2) а) $\sqrt{x+1}=3, \quad x+1=9, \quad x=8$; б) $\sqrt{3x-1}=1,2, \quad 3x-1=1,44,$
 $x=\frac{2,44}{3}=\frac{244}{300}=\frac{61}{75}$; в) $\sqrt{2+x}=0, \quad 2+x=0, \quad x=-2$;

3) а) $\sqrt{6-x}=x, \quad x \geq 0, \quad 6-x=x^2, \quad x^2+x-6=0, \quad D=1+46=25,$

$$x_1=\frac{-1+5}{2}=2, \quad x_2=-3 < 0. \quad \text{Ответ: } 2.$$

б) $\sqrt{2x+3}=x, \quad x \geq 0, \quad 2x+3=x^2, \quad x^2-2x-3=0, \quad D=4+4 \cdot 3=16,$

$$x_1=\frac{2+4}{2}=3, \quad x_2=-1 < 0. \quad \text{Ответ: } 3.$$

в) $\sqrt{x^2+27}=2x, \quad x \geq 0, \quad x^2+27=4x^2, \quad 3x^2=27, \quad x=\pm 3.$ Ответ: 3.

2. а) $\sqrt{x}+1=0, \quad \sqrt{x}=-1$ — нет корней, т.к. $E(\sqrt{x})=[0;+\infty)$;

б) $\sqrt{-3x}=0, \quad x=0$ — корень; в) $\sqrt{2x+3}=-\sqrt{3}$ — нет корней, т.к.

$E(\sqrt{x})=[0;+\infty)$; г) $\sqrt{-4x^2-16}=2$ — нет корней, т.к. $D(\sqrt{x})=[0;+\infty)$;

д) $\sqrt{2x^2+4}+\sqrt{5x}=-\frac{1}{2}$ — нет корней, т.к. $E(\sqrt{x})=[0;+\infty)$;

е) $\sqrt{x+1}=5$ — есть корни.

3. 1) а) $\sqrt{6x^2+3x-2}=\sqrt{3x^2-8x+2}, \quad 6x^2+3x-2=3x^2-8x+2, \quad 3x^2+11x-4=0,$

$$D=121+4 \cdot 3 \cdot 4=169, \quad x_1=\frac{-11+13}{6}=\frac{1}{3}, \quad x_2=-4.$$

Проверка: $x=\frac{1}{3}, \quad \sqrt{\frac{6}{9}+1-2}=\sqrt{\frac{3}{9}-\frac{8}{3}+2}$ — ложно.

$x=-4, \quad \sqrt{96-12-2}=\sqrt{48+32+2}$ — верно. Ответ: -4.

б) $x+1=\sqrt{8-4x}, \quad x^2+2x+1=8-4x, \quad x^2+6x-7=0, \quad D=36+4 \cdot 7=64,$

$$x_1 = \frac{-6+8}{2} = 1; \quad x_2 = -7. \text{ Проверка: } x=1 \quad 1+1 = \sqrt{8-4} \text{ — верно.}$$

$$x=-7, \quad -6 = \sqrt{8+4 \cdot 7} \text{ — ложно.} \quad \text{Ответ: 1.}$$

$$2) \text{ а) } \sqrt{4x^2 - 9x + 2} = x - 2, \quad 4x^2 - 9x + 2 = x^2 - 4x + 4, \quad 3x^2 - 5x - 2 = 0,$$

$$D = 25 + 4 \cdot 3 \cdot 2 = 49, \quad x_1 = \frac{5+7}{6} = 2, \quad x_2 = -\frac{1}{3}.$$

$$\text{Проверка: } x=2, \quad \sqrt{4 \cdot 4 - 9 \cdot 2 + 2} = 2 - 2 \text{ — верно.}$$

$$x = -\frac{1}{3}, \quad \sqrt{\frac{4}{9} + 3 + 2} = -\frac{1}{3} - 2 \text{ — ложно.} \quad \text{Ответ: 2.}$$

$$\text{б) } \sqrt{7x^2 + 3x} = 2x - 2, \quad 7x^2 + 3x = 4x^2 + 4 - 8x, \quad 3x^2 + 11x - 4 = 0,$$

$$D = 121 + 4 \cdot 4 \cdot 3 = 169, \quad x_1 = \frac{-11+13}{6} = \frac{1}{3}, \quad x_2 = -4.$$

$$\text{Проверка: } x = \frac{1}{3}, \quad \sqrt{\frac{7}{9} + 1} = \frac{2}{3} - 2 \text{ — ложно.}$$

$$x = -4, \quad \sqrt{7 \cdot 16 - 12} = -8 - 2 \text{ — ложно.} \quad \text{Ответ: нет корней.}$$

$$4. \text{ а) } \sqrt{x-3} = 2,4 \text{ — нет корней, т.к. } E(\sqrt{x}) = [0; +\infty);$$

$$\text{б) } \sqrt{2x} + \sqrt{x-3} = -1 \text{ — нет корней, т.к. } E(\sqrt{x}) = [0; +\infty);$$

$$\text{в) } \sqrt{-3-x^2} = 9 \text{ — нет корней, т.к. } D(\sqrt{x}) = [0; +\infty);$$

$$\text{г) } \sqrt{-x^2 + 3x - 4} = 6, \quad -x^2 + 3x - 4 \geq 0, \text{ т.к. } D(\sqrt{x}) = [0; +\infty), \quad x^2 - 3x + 4 \leq 0,$$

$D = 9 - 4 \cdot 4 < 0$, значит, у неравенства нет корней, следовательно нет корней и у уравнения.

$$5. 1) \text{ а) } \sqrt{x+17} - \sqrt{x+1} = 2, \quad \sqrt{x+17} = 2 + \sqrt{x+1}, \quad x+17 = 4 + 4\sqrt{x+1} + x+1,$$

$$4\sqrt{x+1} = 12, \quad \sqrt{x+1} = 3, \quad x+1 = 9, \quad x = 8.$$

$$\text{Проверка: } x=8, \quad \sqrt{8+17} - \sqrt{8+1} = 2 \text{ — верно.} \quad \text{Ответ: 8.}$$

$$\text{б) } \sqrt{1-2x} - \sqrt{13+x} = \sqrt{x+4}, \quad 1-2x+13+x-2\sqrt{(1-2x)(13+x)} = x+4,$$

$$2\sqrt{(1-2x)(13+x)} = 10-2x, \quad \sqrt{\quad} = 5-x, \quad (1-2x)(13+x) = 25+x^2-10x,$$

$$13-25x-2x^2 = 25+x^2-10x, \quad 3x^2+15x+12=0, \quad x^2+5x+4=0, \quad D=25-16=9,$$

$$x_1 = \frac{-5+3}{2} = -1, \quad x_2 = -4.$$

$$\text{Проверка: } x_1 = -1, \quad \sqrt{1+2} - \sqrt{13-1} = \sqrt{4-1} \text{ — ложно.}$$

$$x_2 = -4, \quad \sqrt{1+8} - \sqrt{13-4} = 0 \text{ — верно.} \quad \text{Ответ: } -1.$$

$$2) \text{ а) } \sqrt{3-x} \cdot \sqrt{x+4} = \sqrt{6}, \quad (3-x)(x+4) = 6, \quad -x^2 - x + 12 = 6, \quad x^2 + x - 6 = 0, \quad D = 25,$$

$$x_1 = \frac{-1+5}{2} = 2, \quad x_2 = -3. \text{ Проверка: } x=2 \quad \sqrt{3-2} \cdot \sqrt{2+4} = \sqrt{6} \text{ — верно. } x=-3,$$

$$\sqrt{6} \cdot \sqrt{1} = \sqrt{6} \text{ — верно.}$$

Ответ: -3; 2.

б) $\sqrt{4-x} \cdot \sqrt{4+x} = x$, $16-x^2=x^2$, $2x^2=16$, $x=\pm 2\sqrt{2}$.

Проверка: $x=2\sqrt{2}$, $\sqrt{4-2\sqrt{2}} \cdot \sqrt{4+2\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$ — верно.

$x=-2\sqrt{2}$, $\sqrt{4-2\sqrt{2}} \cdot \sqrt{4+2\sqrt{2}} = -2\sqrt{2}$ — ложно. Ответ: $2\sqrt{2}$

3) а) $\sqrt{5+\sqrt{x-1}} = 3$, $5+\sqrt{x-1}=9$, $\sqrt{x-1}=4$, $x-1=16$, $x=17$.

Проверка: $\sqrt{5+4} = 3$ — верно. Ответ: 17.

б) $\sqrt{\sqrt{x+13}} = \sqrt{17-3\sqrt{x}}$, $\sqrt{x+13} = 17-3\sqrt{x}$, $x+13=289+9x-102\sqrt{x}$,
 $8x-102\sqrt{x}+276=0$, $4x-51\sqrt{x}+138=0$, $\sqrt{x}=y \geq 0$, $4y^2-51y+138=0$,
 $y = \frac{51 \pm \sqrt{393}}{8}$, значит, $\sqrt{x} = \frac{51 \pm \sqrt{393}}{8}$; $x = \frac{(51 \pm \sqrt{393})^2}{64}$.

Проверка: $x_1 = \frac{(51 + \sqrt{393})^2}{64}$; $\sqrt{\sqrt{\frac{(51 + \sqrt{393})^2}{64} + 13}} = \sqrt{17 - 3 \left(\frac{51 + \sqrt{393}}{8} \right)}$ —

ложно; $x_2 = \frac{(51 - \sqrt{393})^2}{64}$; $\sqrt{\sqrt{\frac{(51 - \sqrt{393})^2}{64} + 13}} = \sqrt{17 - 3 \left(\frac{51 - \sqrt{393}}{8} \right)}$ —

верно. Ответ: $\frac{(51 \pm \sqrt{393})^2}{64}$.

C-24

1. 1) а) $g(-x)=(-x)^8=x^8=g(x)$, значит, $g(x)$ — четная;

б) $g(-x)=(-x)^4-5(-x)^2=x^4-5x^2=g(x)$, значит, $g(x)$ — четная;

в) $f(-x)=2|-x|=2|x|=f(x)$, значит, $f(x)$ — четная;

2) а) $f(-x)=(-x)^6-3(-x)^4=x^6-3x^4=f(x)$, значит, $f(x)$ — четная;

б) $f(-x)=(-x-5)(-x+7)+2x=(x+5)(x-7)+2x=x^2-35$

$f(x)=(x-5)(x+7)-2x=x^2-35=f(-x)$, значит, $f(x)$ — четная;

в) $f(-x)=\frac{1}{(-x)^4-(-x)^2+3}=\frac{1}{x^4-x^2+3}=f(x)$, значит, $f(x)$ — четная.

2. 1) а) $g(-x)=(-x)^9=-x^9=-g(x)$, значит, $g(x)$ — нечетная;

б) $g(-x)=-\frac{23}{x}=\frac{23}{-x}=-g(x)$, значит, $g(x)$ — нечетная;

в) $g(-x)=(-x)^5+x=-x^5+x=-g(x)$, значит, $g(x)$ — нечетная;

2) а) $f(-x)=(-x)^7-\frac{1}{(-x)^3}=-x^7+\frac{1}{x^3}=-f(x)$, значит, $f(x)$ — нечетная;

б) $f(-x)=(-x-3)^2-(-x+3)^2=(x+3)^2-(x-3)^2=-f(x)$, значит, $f(x)$ — нечетная;

в) $f(-x)=\frac{1}{-x+(-x)^5}=-\frac{1}{x+x^5}=-f(x)$, значит, $f(x)$ — нечетная.

3. $g(-5)=27$; а) $g(5)=g(-5)=27$; б) $g(5)=-g(-5)=-27$.

4. 1) а) $y(-x) = \frac{6}{(-x)^6} = \frac{6}{x^6} = y(x)$, значит, y — четная;

б) $y(-x) = \frac{8}{(-x)^7} = -\frac{8}{x^7} = -y(x)$, значит, y — нечетная;

в) $y(-x) = \frac{1}{(-x)^3 + 1} = \frac{1}{-x^3 + 1} \neq \pm y(x)$, значит, y — ни четная, ни нечетная;

г) $y(-x) = \frac{1}{(-x)^8 + 1} = \frac{1}{x^8 + 1} = y(x)$, значит, y — четная;

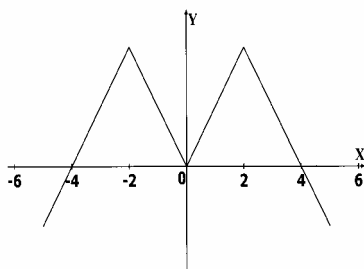
2) а) $y = \frac{x^5}{2x} = \frac{x^4}{2}$, $y(-x) = \frac{(-x)^4}{2} = \frac{x^4}{2} = y(x)$, значит, y — четная;

б) $y = \frac{3x}{x^4} = \frac{3}{x^3}$, $y(-x) = \frac{3}{(-x)^3} = -\frac{3}{x^3} = -y(x)$, значит, y — нечетная;

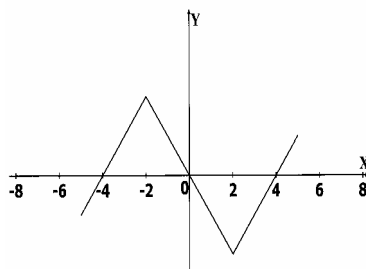
в) $y = \frac{3x^2 - x^3}{6 - 2x} = \frac{x^2(3 - x)}{2(3 - x)} = \frac{x^2}{2}$, $y(-x) = \frac{(-x)^2}{2} = \frac{x^2}{2} = y(x)$, значит, y — четная;

г) $y = \frac{2x + 8}{x^2 + 4x} = \frac{2(x + 4)}{x(x + 4)} = \frac{2}{x}$, $y(-x) = \frac{2}{-x} = -y(x)$, значит, y — нечетная.

5. а)

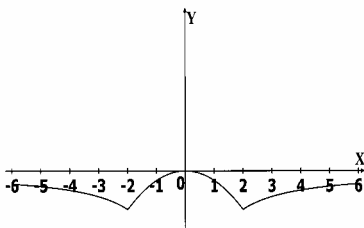


б)

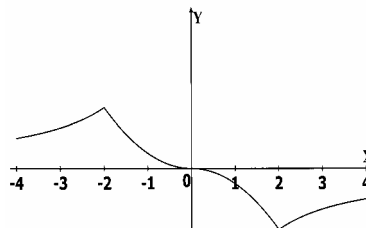


6. $f(x) = \begin{cases} -0,5x^2, & 0 \leq x \leq 2 \\ -\frac{4}{x}, & x > 2 \end{cases}$;

а)



б)

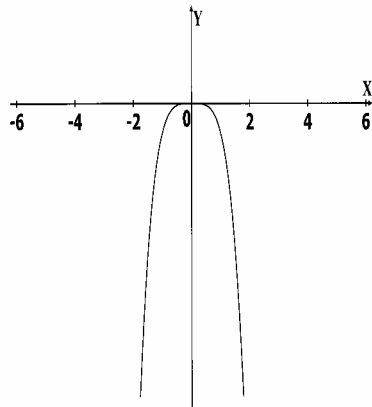


7. а) $g(-x) = |-x+8| - |-x-8| = |x-8| - |x+8| = -g(x)$, значит, $g(x)$ — нечетная;
 б) $g(-x) = |-x+8| + |-x-8| = |x-8| + |x+8| = g(x)$, значит, $g(x)$ — четная;
 в) $g(-x) = \frac{7(-x)^2}{(-x)^2 - 16} = \frac{7x^2}{x^2 - 16} = g(x)$, значит, $g(x)$ — четная;
 г) $g(-x) = \frac{9(-x)^3}{(-x)^2 - 25} = \frac{-9x^3}{x^2 - 25} = -g(x)$, значит, $g(x)$ — нечетная;
 д) $g(-x) = \frac{5(-x)^3}{(-x-3)^2} = -\frac{5x^3}{(x+3)^2} \neq \pm g(x)$, значит, $g(x)$ — ни четная, ни нечетная;
 е) $g(x) = \frac{x(x-2)(x-4)}{(x-2)(x-4)} = x$, $g(-x) = -x = -g(x)$, значит, $g(x)$ — нечетная.

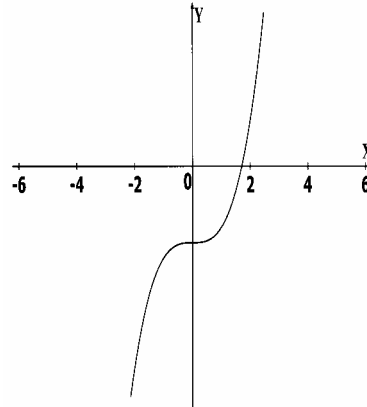
С-25

1. $g(x) = x^{80}$; а) $g(1,423) > g(1,327)$, т.к. $|1,423| > |1,327|$;
 б) $g(-80,3) > g(-78,2)$, т.к. $|-80,3| > |-78,2|$;
 в) $g(-23,1) > g(18,7)$, т.к. $|-23,1| > |18,7|$;
 г) $g(-42,8) = g(42,8)$, т.к. $|-42,8| = |42,8|$;
 2) а) $g\left(\frac{5}{8}\right) < g\left(\frac{2}{3}\right)$, т.к. $\left|\frac{5}{8}\right| < \left|\frac{2}{3}\right|$; б) $g\left(-\frac{4}{9}\right) < g\left(-\frac{1}{2}\right)$, т.к. $\left|-\frac{4}{9}\right| < \left|-\frac{1}{2}\right|$;
 в) $g\left(-\frac{17}{20}\right) = g(0,85)$, т.к. $\left|-\frac{17}{20}\right| = |0,85|$;
 г) $g(-0,72) > g\left(-\frac{5}{7}\right)$, т.к. $|-0,72| > \left|-\frac{5}{7}\right|$.
 2. $f(x) = x^{95}$; а) $f(23,4) > f(21,8)$, т.к. $23,4 > 21,8$;
 б) $f(-3,9) < f(-3,7)$, т.к. $-3,9 < -3,7$; в) $f(-52,3) < f(52,3)$, т.к. $-52,3 < 52,3$;
 г) $f(-47,2) < f(45,8)$, т.к. $-47,2 < 45,8$;
 2) а) $f\left(\frac{3}{7}\right) < f\left(\frac{4}{9}\right)$, т.к. $\frac{3}{7} < \frac{4}{9}$; б) $f(-0,4) < f\left(\frac{6}{13}\right)$, т.к. $-0,4 < \frac{6}{13}$;
 в) $f\left(-\frac{3}{8}\right) = -f(0,375)$, т.к. $-\frac{3}{8} = -0,375$; г) $f(-27,4) < f(27,4)$, т.к. $-27,4 < 27,4$.
 3. $x^n = 450$; а) 2 корня; б) 1 корень.
 4. а) $x^4 = 441$, $x = \pm \sqrt[4]{441}$; б) $x^4 = -36$, нет корней, т.к. $E(x^4) = [0; +\infty)$;
 в) $x^3 = -64$, $x = -4$; г) $x^3 = \frac{27}{125}$, $x = \frac{3}{5}$.

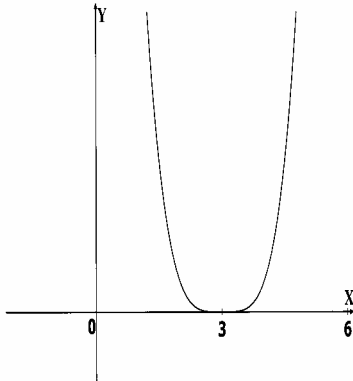
5. а)



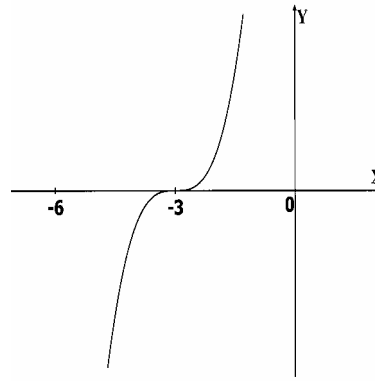
б)



в)



г)



6. а) $x^3=23x+7$ три корня; б) $x^3=0,25x-4$ один корень;

в) $x^4=23x+7$ два корня; г) $x^4=0,25x-4$ нет корней.

7. а) $y=x^7$, $549,827=(-3,7)^7$ — ложно, значит, точка M не принадлежит графику. $-12,749=(-0,89)^7$ — ложно, значит, точка K не принадлежит графику.

б) $y=x^6$, $1,0487=1,3^6$ — ложно, значит, точка P не принадлежит графику. $1,8724=(-0,8)^6$ — ложно, значит, точка Q не принадлежит графику.

С-26.

1. 1) а) $\sqrt{0,25}=0,5$; б) $\sqrt[3]{343}=7$; в) $\sqrt[4]{0,0016}=0,2$; г) $\sqrt[5]{-\frac{1}{243}}=-\frac{1}{3}$;

2) а) $5\sqrt[3]{0,216}=5 \cdot 0,6=3$; б) $0,3 \cdot \sqrt[3]{64}=0,3 \cdot 4=1,2$;

в) $6 \cdot \sqrt[3]{-3 \frac{3}{8}} = 6 \cdot \sqrt[3]{-\frac{27}{8}} = 6 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) = -9$; **г)** $12 \cdot \sqrt[4]{7 \frac{58}{81}} = 12 \cdot \sqrt[4]{\frac{625}{81}} = 12 \cdot \frac{5}{3} = 20$.

2. 1) а) $\sqrt[4]{\frac{81}{625}} + \sqrt[3]{-\frac{1}{27}} = \frac{3}{5} - \frac{1}{3} = \frac{4}{15}$; **б)** $\sqrt[5]{0,00001} - \sqrt[3]{-0,064} = 0,1 + 0,4 = 0,5$;

в) $2,5 \sqrt[5]{\frac{1}{32}} - \sqrt[3]{15 \frac{5}{8}} = 2,5 \cdot 0,5 - \frac{5}{2} = 2,5 \cdot 0,5 - 2,5 = -1,25$;

2) а) $\sqrt[6]{\frac{64}{729}} - \sqrt[4]{\frac{16}{625}} = \frac{2}{3} - \frac{2}{5} = \frac{4}{15}$; **б)** $\sqrt[3]{0,343} - \sqrt[5]{-0,00243} = 0,7 + 0,3 = 1$;

в) $\sqrt[4]{7 \frac{58}{81}} - \sqrt[3]{0,125} = \frac{5}{3} - 0,5 = \frac{5}{3} - \frac{1}{2} = \frac{7}{6}$.

3. а) $3 = \sqrt{9} < \sqrt{13} < \sqrt{16} = 4$; **б)** $3 = \sqrt[3]{27} < \sqrt[3]{57} < \sqrt[3]{64} = 4$; **в)** $0 < \sqrt[4]{0,6} < 1$;

г) $2 < \sqrt[5]{32} < \sqrt[5]{48} < \sqrt[5]{243} = 3$.

4. 1) а) $(\sqrt{15})^2 = 15$; **б)** $(\sqrt[3]{9})^3 = 9$; **в)** $(-\sqrt[4]{17})^4 = 17$; **г)** $-\sqrt[4]{17^4} = -17$;

д) $(-\sqrt[7]{3})^7 = -3$;

2) а) $(3 \cdot \sqrt[3]{2})^3 = 27 \cdot 2 = 54$; **б)** $(-2 \cdot \sqrt[4]{7})^4 = 16 \cdot 7 = 112$; **в)** $(-\sqrt[5]{26})^5 = -26$;

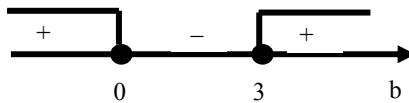
г) $-3 \cdot \sqrt[5]{6^5} = -3 \cdot 6 = -18$; **д)** $(-\sqrt[8]{3})^8 = 3$.

5. а) $x^4=7$, $x=\pm\sqrt[4]{7}$; **б)** $x^5=30$, $x=\sqrt[5]{30}$; **в)** $\frac{1}{32}x^6-2=0$, $x^6=64$, $x=\pm 2$;

г) $\frac{1}{4}x^5+7=0$, $x^5=-28$, $x=-\sqrt[5]{28}$.

6. а) $\sqrt[8]{x+8}$, $x+8 \geq 0$, $x \geq -8$; **б)** $\sqrt[7]{y-2}$, y — любое;

в) $\sqrt[4]{b(b-3)}$, $b(b-3) \geq 0$;

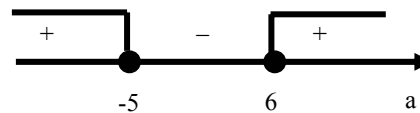


$b \in (-\infty; 0] \cup [3; +\infty)$.

г) $\sqrt[6]{a^2-a-30}$, $a^2-a-30 \geq 0$,

$D=1+4 \cdot 30=121$,

$a_1 = \frac{1+11}{2} = 6$, $a_2 = -5$;



$a \in (-\infty; -5] \cup [6; +\infty)$.

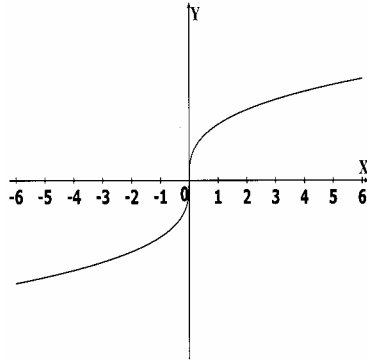
7. а) $x^8-15x^4-16=0$, $x^4=y \geq 0$, тогда $y^2-15y-16=0$, $D=289$, $y_1 = \frac{15+17}{2} = 16$,

$y_2 < 0$, $x^4=16$, $x_{1,2} = \pm 2$.

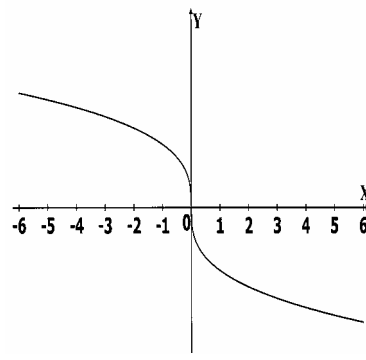
Ответ: ± 2 .

б) $x^4 - 10x^2 + 27 = 0$, $x^2 = y \geq 0$, тогда $y^2 - 10y + 27 = 0$, $D < 0$ нет корней.
 в) $x^6 - 7x^3 - 8 = 0$, $x^3 = y$, тогда $y^2 - 7y - 8 = 0$, $D = 81$, $y_1 = \frac{7+9}{2} = 8$, $y_2 = -1$,
 $x^3 = 8$, $x = 2$, $x^3 = -1$, $x = -1$. Ответ: -1; 2.

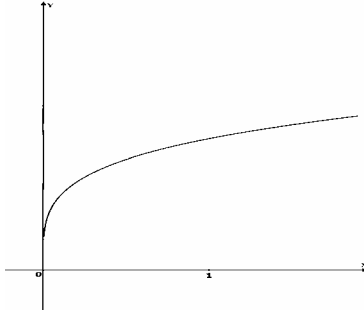
8. а)



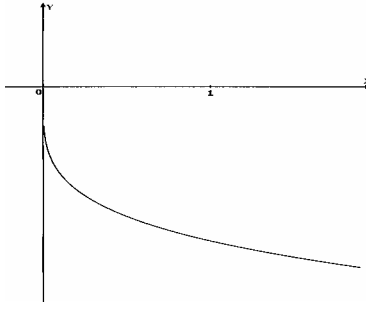
б)



в)



г)



C-27

1. а) $\sqrt[3]{27 \cdot 64} = 3 \cdot 4 = 12$; б) $\sqrt[4]{3^8 \cdot 2^4} = 3^2 \cdot 2 = 18$;
 в) $\sqrt[4]{0,0081 \cdot 6^8} = 0,3 \cdot 6^2 = 10,8$; г) $\sqrt[7]{\frac{5^7}{2^{14}}} = \frac{5}{2^2} = \frac{5}{4}$; д) $\sqrt[3]{\frac{3^9}{0,125}} = \frac{3^3}{0,5} = 54$;
 е) $\sqrt[8]{\frac{2^8 \cdot 3^{24}}{5^{16}}} = \frac{2 \cdot 3^3}{5^2} = \frac{54}{25}$.
 2. а) $\sqrt[4]{8} \cdot \sqrt[4]{2} = \sqrt[4]{8 \cdot 2} = 2$; б) $\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{25} = \sqrt[3]{125} = 5$;

в) $\sqrt[4]{135} \cdot \sqrt[4]{375} = \sqrt[4]{135 \cdot 375} = 15$; **г)** $\frac{\sqrt[5]{32}}{\sqrt[3]{243}} = \frac{2}{3}$;
д) $\sqrt[7]{3^7 \cdot 5^4} \cdot \sqrt[7]{5^3} = 3 \cdot \sqrt[7]{5^7} = 3 \cdot 5 = 15$;
е) $\sqrt[6]{2^{11}} \cdot \sqrt[6]{3^{12}} \cdot 2^7 = \sqrt[6]{2^{18} \cdot 3^{12}} = 2^3 \cdot 3^2 = 72$.
3. а) $\sqrt{49a^2} = 7a$; **б)** $\sqrt[3]{8b^6} = 2b^2$; **в)** $\sqrt[4]{625a^8b^4} = 5a^2b$;
г) $\sqrt[5]{\frac{243a^{10}b^{15}}{32}} = \frac{3}{2}a^2b^3$.
4. а) $\sqrt{25x} = 5\sqrt{x}$; **б)** $\sqrt{72y^3} = \sqrt{36 \cdot 2y^2 \cdot y} = 6y\sqrt{2y}$;
в) $\sqrt[3]{54x^8} = \sqrt[3]{27 \cdot 2x^6 \cdot x^2} = 3x^2 \cdot \sqrt[3]{2x^2}$;
г) $\sqrt[4]{162y^9} = \sqrt[4]{81 \cdot 2y^8 \cdot y} = 3y^2 \cdot \sqrt[4]{2y}$.
5. а) $5\sqrt{2a} = \sqrt{50a}$; **б)** $3\sqrt[3]{2b} = \sqrt[3]{54b}$; **в)** $x\sqrt[4]{5} = \sqrt[4]{x^4 \cdot 5}$; **г)** $y \cdot \sqrt[5]{8y^4} = \sqrt[5]{8y^9}$.
6. а) $\sqrt{6-\sqrt{11}} \cdot \sqrt{6+\sqrt{11}} = \sqrt{(6-\sqrt{11})(6+\sqrt{11})} = \sqrt{36-11} = 5$;
б) $\sqrt[3]{5+\sqrt{17}} \cdot \sqrt[3]{5-\sqrt{17}} = \sqrt[3]{(5+\sqrt{17})(5-\sqrt{17})} = \sqrt[3]{25-17} = 2$;
в) $\sqrt[4]{10+\sqrt{19}} \cdot \sqrt[4]{10-\sqrt{19}} = \sqrt[4]{(10+\sqrt{19})(10-\sqrt{19})} = \sqrt[4]{100-19} = 3$.
7. а) $\sqrt[4]{x^4y} = x\sqrt[4]{y}$, $x, y \geq 0$; **б)** $\sqrt[4]{x^4y} = -x\sqrt[4]{y}$, $x \leq 0, y \geq 0$;
в) $\sqrt[4]{x^5y^5} = xy\sqrt[4]{xy}$, $xy \geq 0$, т.е. $x, y \geq 0$ или $x, y \leq 0$.
8. а) $\sqrt[4]{625a^4b} = 5a \cdot \sqrt[4]{b}$; **б)** $\sqrt{-98c^7} = \sqrt{-49 \cdot 2 \cdot c^6 \cdot c} = -7c^3\sqrt{-2c}$;
в) $\sqrt[4]{x^5y^5} = xy\sqrt[4]{xy}$.
9. а) $x \cdot \sqrt[5]{\frac{3}{y^4}} = \sqrt[5]{\frac{3x^5}{y^4}}$; **б)** $bc \cdot \sqrt[4]{\frac{3}{b^3c^3}} = \sqrt[4]{\frac{3b^4c^4}{b^3c^3}} = \sqrt[4]{3bc}$;
в) $ax \cdot \sqrt[6]{\frac{5}{a^4x^5}} = \sqrt[6]{\frac{5a^6x^6}{a^4x^5}} = \sqrt[6]{5a^2x}$.
10. $5a \cdot \sqrt[4]{2a^{-5}} - \sqrt[4]{162a} - a^2 \cdot \sqrt[4]{2a^{-7}} = 5a \cdot \sqrt[4]{\frac{2}{a^5}} - 3 \cdot \sqrt[4]{2a} - a^2 \cdot \sqrt[4]{\frac{2}{a^7}} =$
 $= 5 \cdot \sqrt[4]{\frac{2a^4}{a^5}} - 3 \cdot \sqrt[4]{2a} - \sqrt[4]{\frac{2a^8}{a^7}} = 5 \cdot \frac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt[4]{a}} - 3 \cdot \sqrt[4]{2a} - \sqrt[4]{2a} =$
 $= 5 \cdot \frac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt[4]{a}} - 4 \cdot \sqrt[4]{2a} = \frac{5 \cdot \sqrt[4]{2} - 4 \cdot \sqrt[4]{2a^2}}{\sqrt[4]{a}}$.

C-28.

1. а) $\sqrt{\frac{2}{9}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$; б) $\sqrt[3]{\frac{7}{8}} = \frac{\sqrt[3]{7}}{2}$; в) $\sqrt[4]{\frac{1}{b^4}} = \frac{1}{b}$; г) $\sqrt[5]{\frac{10}{a^{15}}} = \frac{\sqrt[5]{10}}{a^3}$.

2. а) $\frac{7}{\sqrt{14}} = \frac{7\sqrt{14}}{14} = \frac{7}{14}\sqrt{14}$; б) $\frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{4}{5}\sqrt{5}$; в) $\frac{5}{\sqrt[3]{9}} = \frac{5 \cdot \sqrt[3]{9^2}}{9} = \frac{5}{9} \cdot \sqrt[3]{81}$;

г) $\frac{9}{\sqrt[4]{8}} = \frac{9 \cdot \sqrt[4]{8^3}}{8} = \frac{9}{8} \cdot \sqrt[4]{512}$; д) $\frac{12}{\sqrt[3]{81}} = \frac{12 \cdot \sqrt[3]{81^4}}{81} = \frac{4}{27} \cdot \sqrt[3]{43046721}$.

3. а) $\sqrt[3]{3} = \sqrt[6]{3}$; б) $\sqrt[4]{5} = \sqrt[8]{5}$; в) $\sqrt[8]{3^4} = \sqrt{3}$; г) $\sqrt[3]{4 \cdot 27} = \sqrt[3]{4 \cdot 27} = 4\sqrt{3}$;

д) $\sqrt[10]{x^5} = \sqrt{x}$; е) $\sqrt{b\sqrt{b}} = \sqrt{\sqrt{b^3}} = \sqrt[4]{b^3}$; ж) $\sqrt[5]{a \cdot \sqrt[3]{a}} = \sqrt[5]{\sqrt[3]{a^4}} = \sqrt[15]{a^4}$;

з) $\sqrt[8]{y^2} \cdot \sqrt[3]{y^2} = \sqrt[8 \cdot 3]{y^{2 \cdot 3}} = \sqrt[24]{y^6} = \sqrt[4]{y}$.

4. а) $\sqrt[3]{5} > \sqrt[6]{24}$, $\sqrt[6]{25} > \sqrt[6]{24}$; б) $\sqrt[6]{2} < \sqrt[18]{10}$, $\sqrt[18]{8} < \sqrt[18]{10}$;

в) $\sqrt[4]{4} = \sqrt[6]{8}$, $\sqrt[12]{64} = \sqrt[12]{64}$; г) $\sqrt[10]{6} < \sqrt[5]{2\sqrt[3]{2}}$, $\sqrt[10]{6} < \sqrt[5]{\sqrt[3]{2^4}}$,
 $\sqrt[10]{6} < \sqrt[15]{16}$, $\sqrt[30]{216} < \sqrt[30]{256}$.

5. $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{4}$, $\sqrt[4]{5}$, $\sqrt[12]{3^6}$, $\sqrt[12]{4^4}$, $\sqrt[12]{5^3}$, $\sqrt[12]{729}$, $\sqrt[12]{256}$, $\sqrt[12]{125}$, значит,
 $\sqrt[4]{5} < \sqrt[3]{4} < \sqrt{3}$.

6. а) $\frac{\sqrt{x} - \sqrt{4xy}}{\sqrt{4xy} - \sqrt{y}} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} - \sqrt{4y})}{\sqrt{y}(\sqrt{4x} - \sqrt{4y})} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$; б) $\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt[3]{a} - \sqrt[6]{ab} + \sqrt[3]{b}} = \frac{(\sqrt[6]{a})^3 + (\sqrt[6]{b})^3}{\sqrt[3]{a} - \sqrt[6]{ab} + \sqrt[3]{b}} =$
 $= \frac{(\sqrt[6]{a} + \sqrt[6]{b}) \cdot (\sqrt[6]{a} - \sqrt[6]{ab} + \sqrt[6]{b})}{\sqrt[3]{a} - \sqrt[6]{ab} + \sqrt[3]{b}} = \sqrt[6]{a} + \sqrt[6]{b}$;

в) $\frac{1}{\sqrt[3]{x} + \sqrt[6]{xy}} + \frac{1}{\sqrt[6]{xy} + \sqrt[3]{y}} = \frac{1}{\sqrt[6]{x}(\sqrt[6]{x} + \sqrt[6]{y})} + \frac{1}{\sqrt[6]{y}(\sqrt[6]{x} + \sqrt[6]{y})} =$
 $= \frac{\sqrt[6]{x} + \sqrt[6]{y}}{\sqrt[6]{xy}(\sqrt[6]{x} + \sqrt[6]{y})} = \frac{1}{\sqrt[6]{xy}}$.

7. а) $\sqrt{x} - 8\sqrt[4]{x} = 0$, $\sqrt[4]{x}(\sqrt{x} - 8) = 0$, $\sqrt[4]{x} = 0$, $x_1 = 0$, $\sqrt[4]{x} = 8$, $x_2 = 4096$;

б) $\sqrt[4]{x} + 3\sqrt[8]{x} = 0$, $\sqrt[8]{x}(\sqrt[4]{x} + 3) = 0$, $\sqrt[8]{x} = 0$, $x = 0$, $\sqrt[8]{x} = -3$ — нет корней.

Ответ: 0.

в) $\sqrt[5]{x} - 3\sqrt[10]{x} + 2 = 0$, $\sqrt[10]{x} = y \geq 0$, тогда $y^2 - 3y + 2 = 0$, $D = 1$,

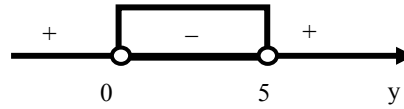
$y_1 = \frac{3+1}{2} = 2$, $y_2 = 1$, $\sqrt[10]{x} = 2$ $x = 2^{10}$, $x = 1024$, $\sqrt[10]{x} = 1$, $x = 1$.

Ответ: 1; 1024.

г) $\sqrt{x} + 3\sqrt[4]{x} - 4 = 0$, $\sqrt[4]{x} = y \geq 0$, тогда $y^2 + 3y - 4 = 0$, $D = 9 + 4 \cdot 4 = 25$,
 $y_1 = \frac{-3+5}{2} = 1$, $y_2 < 0$, $\sqrt[4]{x} = 1$, $x = 1$. Ответ: 1.

8. а) $x - 5\sqrt{x} < 0$, $\sqrt{x} = y$, $y^2 - 5y < 0$, $y(y-5) < 0$, $0 < y < 5$,
 $0 < \sqrt{x} < 5$, $0 < x < 25$.

Ответ: (0; 25).

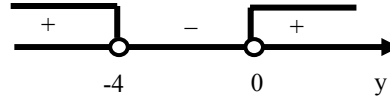


б) $x + 4\sqrt{x} > 0$, $\sqrt{x} = y$, $y^2 + 4y > 0$, $y(y+4) > 0$,

$y < -4$, $\sqrt{x} < -4$ — нет решений,

$y > 0$, $\sqrt{x} > 0$, $x > 0$.

Ответ: (0; +∞).



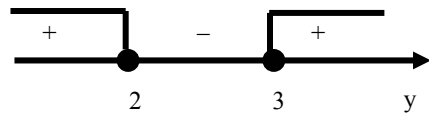
в) $\sqrt[4]{x} - 5\sqrt[8]{x} + 6 \geq 0$, $\sqrt[8]{x} = y$, $y^2 - 5y + 6 \geq 0$, $D = 1$,

$y_1 = \frac{5+1}{2} = 3$, $y_2 = 2$,

$y \leq 2$, $\sqrt[8]{x} \leq 2$, $0 \leq x \leq 256$,

$y \geq 3$, $\sqrt[8]{x} \geq 3$, $x \geq 6561$.

Ответ: $[0; 256] \cup [6561; +\infty)$.

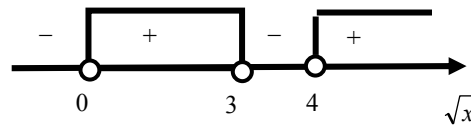


г) $\sqrt{x}(\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} - 4) > 0$,

$0 < \sqrt{x} < 3$, $\sqrt{x} > 4$,

$0 < x < 9$, $x > 16$.

Ответ: $(0; 9) \cup (16; +\infty)$.



C-29

1. а) $2^{-6} = \frac{1}{2^6} = \frac{1}{64}$; б) $12^{-1} = \frac{1}{12}$; в) $c^{-7} = \frac{1}{c^7}$; г) $2ab^{-3} = \frac{2a}{b^3}$;

д) $10^{-3} = \frac{1}{10^3} = \frac{1}{1000} = 0,001$.

2. 1) а) $\frac{1}{6^5} = 6^{-5}$; б) $\frac{1}{a^3} = a^{-3}$; в) $\frac{1}{7} = 7^{-1}$; г) $\frac{1}{1000} = 10^{-3}$; д) $0,00001 = 10^{-5}$;

2) а) $\left(\frac{1}{18}\right)^3 = 18^{-3}$; б) $\frac{1}{x^2 y^2} = (xy)^{-2}$;

в) $\frac{1}{(a-b)(a^2+ab+b^2)} = \frac{1}{a^3-b^3} = (a^3-b^3)^{-1}$; г) $\frac{1}{(x-y)(x-y)} = (x-y)^{-2}$.

3. а) $\left(\frac{7}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{7}\right)^2 < 1$; б) $12,3^{\circ}=1$; в) $10^{-5} = \frac{1}{10^5} < 1$;
г) $\left(-3\frac{2}{3}\right)^{-2} = \left(-\frac{11}{3}\right)^{-2} = \left(-\frac{3}{11}\right)^2 = \left(\frac{3}{11}\right)^2 < 1$.

4. 1) а) $(1,1)^{-2} = \frac{1}{1,1^2} = \frac{1}{1,21}$; б) $(-3)^{-2} = \frac{1}{(-3)^2} = \frac{1}{9}$; в) $(-12,7)^{\circ}=1$; г) $1^{-13}=1$;
д) $-12,7^{\circ}=-1$;

2) а) $(-2)^{-3} = \frac{1}{(-2)^3} = -\frac{1}{8}$; б) $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-2} = (-3)^2 = 9$; в) $\left(\frac{7}{3}\right)^{-1} = \frac{3}{7}$;
г) $\left(2\frac{2}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{8}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{8}\right)^2 = \frac{9}{64}$;

3) а) $7^{-5} \cdot 7^{13} \cdot 7^{-5} = 7^{-5+13-5} = 7^3 = 343$; б) $2^{-5} : 2^{-9} = 2^{-5-(-9)} = 2^4 = 16$;
в) $(0,2)^3 : (0,2)^{-3} = 0,2^{3-(-3)} = 0,2^6 = 0,000064$;

г) $\left(\frac{2}{5}\right)^{-6} : \left(\frac{2}{5}\right)^{-3} = \left(\frac{2}{5}\right)^{-6-(-3)} = \left(\frac{2}{5}\right)^{-3} = \left(\frac{5}{2}\right)^3 = \frac{125}{8}$;

4) а) $(-2)^{-2} + 3^{-1} = \frac{1}{(-2)^2} + \frac{1}{3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{7}{12}$;
б) $\left(\frac{4}{5}\right)^{-2} - 2^{-4} = \left(\frac{5}{4}\right)^2 - \frac{1}{2^4} = \frac{25}{16} - \frac{1}{16} = 1,5$;
в) $(-0,1)^{-3} + (-0,2)^{-3} = \frac{1}{(-0,1)^3} + \frac{1}{(-0,2)^3} = \frac{1}{-0,001} + \frac{1}{-0,008} = -1000 - 125 = -1125$;
г) $(0,2)^{-3} + (0,5)^{-3} = \left(\frac{1}{5}\right)^{-3} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 125 + 8 = 133$;

5) а) $\left(\frac{1}{7}\right)^{-2} - 7^{-2} : 7^{-4} = 49 - 7^2 = 0$; б) $5^{-3} : 5^{-5} - \left(\frac{1}{5}\right)^{-4} = 5^2 - 5^4 = -600$;
в) $10^{-5} \cdot 3,1 \cdot 10^5 \cdot 3 = 9,3$.

5. а) $(b^{-3} - b^{-2})^2 + \frac{2}{b^5} = \left(\frac{1}{b^3} - \frac{1}{b^2}\right)^2 + \frac{2}{b^5} = \left(\frac{1-b}{b^3}\right)^2 + \frac{2}{b^5} =$
 $= \frac{1-2b+b^2+2b}{b^6} = \frac{1+b^2}{b^6}$;

б) $(a+a^{-1})^3 = \left(a + \frac{1}{a}\right)^3 = \left(\frac{a^2+1}{a}\right)^3 = \frac{(a^2+1)^3}{a^3}$;

в) $(a^{-2} - b^{-2}) : (a^{-1} + b^{-1}) = \frac{(a^{-1} + b^{-1})(a^{-1} - b^{-1})}{a^{-1} + b^{-1}} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{b-a}{ab}$.

C-30.

1. a) $(a-1)^{-2} = \frac{1}{(a-1)^2}$; **б)** $(3bc)^{-3} = \frac{1}{(3bc)^3} = \frac{1}{27b^3c^3}$; **в)** $a^{-1}+1 = \frac{1}{a}+1 = \frac{1+a}{a}$;

г) $x^{-3}-x^{-1} = \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x} = \frac{1-x^2}{x^3}$; **д)** $a^{-2}-b^{-2} = \frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} = \frac{b^2-a^2}{a^2b^2}$.

2. a) $(a^3)^{-2} = a^{-6} = \frac{1}{a^6}$; **б)** $(xy^{-1})^{-3} = x^{-3} \cdot y^3 = \frac{y^3}{x^3}$; **в)** $(-5c^{-4})^2 = 25c^{-8} = \frac{25}{c^8}$;

г) $\left(\frac{a^2}{b^3}\right)^{-1} = \frac{b^3}{a^2}$; **д)** $\left(\frac{x^{-3}}{3y^2}\right)^{-2} = \frac{9x^6}{y^{-4}} = 9x^6y^4$.

3. a) $8^{-3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = (2^3)^{-3} \cdot 2^{-9} = 2^{-9-3} = \frac{1}{2^{12}} = \frac{1}{4096}$;

б) $25^{-3} \cdot 15^4 = \frac{(5 \cdot 3)^4}{25^3} = \frac{5^4 \cdot 3^4}{5^6} = \frac{3^4}{5^2} = \frac{81}{25}$; **в)** $6^{-4} \cdot 3^{-6} = \frac{3^6}{6^4} = \frac{3^6}{2^4 \cdot 3^4} = \frac{3^2}{2^4} = \frac{9}{16}$;

г) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-5} : \left(-\frac{4}{3}\right)^8 = \frac{4^5 \cdot 3^8}{3^5 \cdot 4^8} = \frac{3^3}{4^3} = \frac{27}{64}$; **д)** $\frac{2^{-5} \cdot 16^2}{8^4} = \frac{2^{-5} \cdot 2^8}{2^{12}} = \frac{1}{2^9} = \frac{1}{512}$.

4. a) $a^3b^3(a^{-3}+b^{-3}) = a^3b^3\left(\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3}\right) = b^3 + a^3$;

б) $(x-y)^{-2} \cdot \frac{1}{(y-x)^{-1}} = \frac{1}{(x-y)^2} \cdot (y-x) = \frac{y-x}{(y-x)^2} = \frac{1}{y-x}$;

в) $a^9(a^{-3}-a^{-5})(a^4+a^5)^{-1} = \left(\frac{1}{a^3} - \frac{1}{a^5}\right) \cdot \frac{1}{a^4+a^5} \cdot a^9 =$

$= \frac{a^2-1}{a^5} \cdot \frac{1}{a^4(1+a)} \cdot a^9 = \frac{(a-1)(a+1)}{a+1} = a-1$.

5. $((ab^{-1})^{-2}-a^0b^2) : \frac{a^2-b^4}{b} = \left(\frac{a^2}{b^2} - b^2\right) \cdot \frac{b}{a^2-b^4} = \frac{(a^2-b^4) \cdot b}{b^2(a^2-b^4)} = \frac{1}{b} = \frac{1}{17}$.

6. 1) a) $100^3 = (10^2)^3 = 10^6$; **б)** $0,0003^2 = (3 \cdot 10^{-4})^2 = 9 \cdot 10^{-8}$;

в) $1000^{-2} = (10^3)^{-2} = 10^{-6}$; **г)** $(0,0001)^{-4} = (10^{-4})^{-4} = 10^{16}$;

2) a) $0,0000016 = 1,6 \cdot 10^{-6}$; **б)** $0,00007142 = 7,142 \cdot 10^{-5}$;

в) $\frac{1}{16} = 0,0625 = 6,25 \cdot 10^{-2}$; **г)** $\frac{1}{32} = 0,03125 = 3,125 \cdot 10^{-2}$.

7. a) $(2x^{-2}-y)(y+2x^{-2}) = (2x^{-2})^2 - y^2 = 4x^{-4} - y^2 = \frac{4}{x^4} - y^2 = \frac{4-x^4y^2}{x^4}$;

б) $(a^{-2}-b^{-2})(a^{-4}+(ab)^{-2}+b^{-4}) = (a^{-2})^3 - (b^{-2})^3 = a^{-6} - b^{-6} = \frac{1}{a^6} - \frac{1}{b^6} = \frac{b^6-a^6}{a^6b^6}$;

в) $(a^{-1}+4)(a^{-2}-(0,25a)^{-1}+16) = (a^{-1})^3 + 4^3 = \frac{1}{a^3} + 64 = \frac{1+64a^3}{a^3}$.

C-31

1. 1) a) $6^{1/2} = \sqrt{6}$; $5^{3/4} = \sqrt[4]{5^3}$; $12^{-1/3} = \sqrt[3]{12^{-1}}$; $23^{-4/5} = \sqrt[5]{23^{-4}}$;

б) $a^{0,5} = \sqrt{a}$; $b^{2,5} = b^{5/2} = \sqrt{b^5}$; $x^{-0,5} = \sqrt{x^{-1}}$; $y^{-1,5} = \sqrt{y^{-3}}$;

2) a) $3a^{1/3} = 3 \cdot \sqrt[3]{a}$; $-5b^{3/4} = -5 \cdot \sqrt[4]{b^3}$; $(3x)^{0,5} = \sqrt{3x}$; $(4y)^{-1,5} = \sqrt{(4y)^{-3}}$;

б) $(x-a)^{2/3} = \sqrt[3]{(x-a)^2}$; $y^{3/5} - b^{3/5} = \sqrt[5]{y^3} - \sqrt[5]{b^3}$; $ab^{0,5} + xy^{0,5} = a\sqrt{b} + x\sqrt{y}$.

2. 1) a) $\sqrt{5} = 5^{1/2}$; $\sqrt[3]{7} = 7^{1/3}$; $\sqrt[9]{3} = 3^{1/9}$; $\sqrt[7]{4^2} = 4^{2/7}$;

б) $\sqrt[5]{x^3} = x^{3/5}$; $\sqrt[7]{y^4} = y^{4/7}$; $\sqrt[10]{4a} = (4a)^{1/10}$; $\sqrt[8]{16b^4} = (16b^4)^{1/8}$;

2) a) $\sqrt[3]{5^{-1}} = 5^{-1/3}$; $\sqrt[4]{8} = 8^{1/4}$; $\sqrt[10]{25^3} = 25^{0,3}$;

б) $\sqrt[6]{a^{-2}} = a^{-1/3}$; $\sqrt[7]{(x+y)^3} = (x+y)^{3/7}$; $\sqrt[3]{x^2 + y^2} = (x^2 + y^2)^{1/3}$.

3. 1) a) $16^{1/2} = 4$; б) $25^{-1/2} = \frac{1}{25^{1/2}} = \frac{1}{5}$; в) $7 \cdot 81^{-1/4} = 7 \cdot 3 = 21$;

г) $-5 \cdot 0,001^{-2/3} = -5 \cdot (10^{-3})^{-2/3} = -5 \cdot 10^2 = -500$;

2) a) $0,0625^{-1/4} = \frac{1}{0,0625^{1/4}} = \frac{1}{0,5} = 2$; б) $0,0049^{0,5} = 0,07$;

в) $\left(3\frac{3}{8}\right)^{-4/3} = \left(\frac{27}{8}\right)^{-4/3} = \left(\left(\frac{3}{2}\right)^3\right)^{-4/3} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-4} = \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{16}{81}$;

г) $\left(4\frac{17}{27}\right)^{-1/6} = \left(\frac{27}{125}\right)^{1/6} = \left(\left(\frac{3}{5}\right)^3\right)^{1/6} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$.

4. a) $0 \leq y \leq 0,00032$, $0 \leq y^{0,6} \leq (0,2^5)^{3/5}$, $0 \leq y^{0,6} \leq 0,008$;

б) $1 \leq y \leq 243$, $1 \leq y^{0,6} \leq (3^5)^{3/5}$, $1 \leq y^{0,6} \leq 27$;

в) $0,00001 \leq y \leq 1$, $(10^{-5})^{3/5} \leq y \leq 1$, $0,001 \leq y \leq 1$;

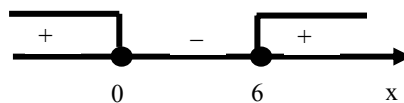
г) $32 \leq y \leq 1024$, $(2^5)^{3/5} \leq y^{0,6} \leq (2^{10})^{3/5}$, $8 \leq y^{0,6} \leq 64$.

5. a) $y = x^{4/9} = \sqrt[9]{x^4}$, $D(y) = R$; б) $y = x^{-0,7} = \frac{1}{x^{0,7}} = \frac{1}{x^{7/10}} = \frac{1}{\sqrt[10]{x^7}}$, $D(y) = (0; +\infty)$;

в) $y = (x+5)^{-0,1} = \frac{1}{(x+5)^{0,1}} = \frac{1}{\sqrt[10]{x+5}}$, $x+5 > 0$ $x > -5$, $D(y) = (-5; +\infty)$;

г) $y = (x^2 - 6x)^{3/4} = \sqrt[4]{(x^2 - 6x)^3}$, $x^2 - 6x \geq 0$ $x(x-6) \geq 0$;

$D(y) = (-\infty; 0] \cup [6; +\infty)$.

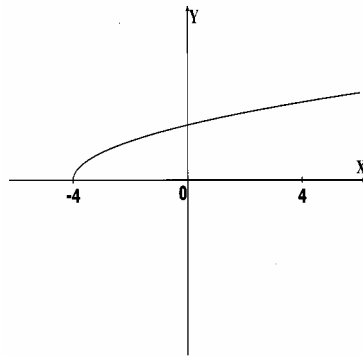


6. а) $x^{1/2}=5, x=25$; б) $x^{1/3}=3, x=27$; в) $(x-2)^{0,5}=7, x-2=49, x=51$;
 г) $(x+3)^{1/4}=0, x+3=0, x=-3$; д) $(x^2-16)^{0,5}=3, x^2-16=9, x^2=25, x_{1,2}=\pm 5$;
 е) $(x^2+7x)^{1/3}=2, x^2+7x=8, x^2+7x-8=0, D=49+4 \cdot 8=81, x_1=\frac{-7+9}{2}=1, x_2=-8$.

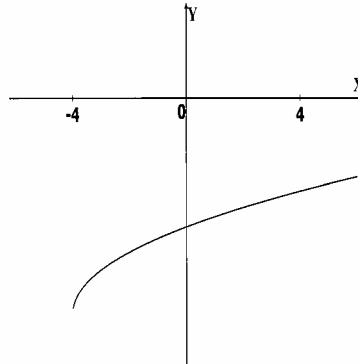
C-32

1. 1) а) $a^{1/2} \cdot a^{1/5}=a^{1/2+1/5}=a^{0,7}$; б) $(a^{1/2})^{1/5}=a^{1/10}$; в) $a^{1/2} : a^{1/5}=a^{1/2-1/5}=a^{0,3}$;
 г) $a : a^{3/5}=a^{1-3/5}=a^{2/5}$; д) $a^{2/3} a^{1/6} a^{-1/2}=a^{4/6+1/6-3/6}=a^{1/3}$;
 2) а) $(b^{0,6})^{0,3} \cdot b^{0,32}=b^{0,18} \cdot b^{0,32}=b^{0,5}$; б) $(b^{3/8})^{1,6} \cdot (b^{-2/7})^{1,4}=b^{0,6} \cdot b^{-0,4}=b^{0,2}$;
 в) $\frac{b^{5/8} \cdot b^{1/4}}{b^{-0,125}}=b^{3/8+1/8}=b^{0,5}$; г) $\frac{b^{4,7} \cdot b^{-3,9}}{b^{-2,1} \cdot b^{1,9}}=b$.
 3. $x^8=(x^4)^2; x^{-4}=(x^{-2})^2; x^5=(x^{5/2})^2; x=(\sqrt{x})^2; x^{1/4}=(x^{1/8})^2; x^{1/5}=(x^{1/10})^2; x^{4/9}=(x^{4/18})^2$.
 4. $y^9=(y^3)^3; y^{-6}=(y^{-2})^3; y^2=(y^{2/3})^3; y=(\sqrt[3]{y})^3; y^{1/3}=(y^{1/9})^3; y^{3/5}=(y^{1/5})^3$.
 5. а) $(a^{1/2}-2) \cdot 3a^{1/2}+6a^{1/2}=3a-6a^{1/2}+6a^{1/2}=3a$; б) $(a^{0,5}+b^{0,5})(a^{0,5}-b^{0,5})=a-b$;
 в) $(1+a^{0,5})^2+2a^{0,5}=1+2a^{0,5}+a+2a^{0,5}=1+4a^{0,5}+a$;
 г) $(b^{1/3}+1)(b^{2/3}-b^{1/3}+1)=(b^{1/3})^3+1=b+1$.
 6. а) $x=a^{0,49}, y=a^{-0,49}, x \cdot y=a^{0,49} \cdot a^{-0,49}=a^0=1$, т.е. $xy=1$;
 б) $x=a^{1/2}, y=a^{1/4}, x \cdot y^{-2}=a^{1/2} \cdot a^{-1/2}=1$, т.е. $xy^{-2}=1, x=y^2$;
 в) $x=a^{1/6}, y=\sqrt{1-a^{1/3}}, x^2+y^2=(a^{1/6})^2+(\sqrt{1-a^{1/3}})^2=a^{1/3}+1-a^{1/3}=1$, т.е. $x^2+y^2=1$;
 г) $x=\sqrt[4]{a}, y=\sqrt[4]{a-5}, x^4-y^4=(\sqrt[4]{a})^4-(\sqrt[4]{a-5})^4=a-(a-5)=5$, т.е. $x^4-y^4=5$.

7. а)



б)



C-33

1. 1) а) $a-4a^{1/2}=a^{1/2}(a^{1/2}-4)=a^{1/2}(a^{1/4}-2)(a^{1/4}+2)$; б) $b^{1/2}+3b^{1/4}=b^{1/4}(b^{1/4}+3)$;

в) $(x^{1/2})^2-9=(x^{1/2}-3)(x^{1/2}+3)$; г) $(y^{1/3})^3-27=(y^{1/3}-3)(y^{2/3}+3y^{1/3}+9)$;

д) $a^2-b^{2/3}=(a^{1/3}-b^{1/3})(a^{1/3}+b^{1/3})$; е) $x^{3/2}+y^{3/2}=(x^{1/2}+y^{1/2})(x-x^{1/2}y^{1/2}+y)$;

2) а) $x^{1/2}+10x^{1/4}=x^{1/4}(x^{1/4}+10)$; б) $y^{3/4}-2y^{1/2}=y^{1/4}(y^{1/4}-2)$;

в) $cd^{1/10}+cd^{1/5}=cd^{1/10}(1+d^{1/10})$; г) $p^{2/9}-p^{1/9}=p^{1/9}(p^{1/9}-1)$;

д) $b-25=(\sqrt{b}-5)(\sqrt{b}+5)$; е) $a-125=(a^{1/3}-5)(a^{2/3}+5a^{1/3}+25)$.

2. 1) а) $\frac{a+6a^{1/2}}{a^{1/2}+6}=\frac{a^{1/2}(a^{1/2}+6)}{a^{1/2}+6}=a^{1/2}$;

б) $\frac{5b^{1/2}}{b^{1/2}+3b^{1/4}}=\frac{5b^{1/2}}{b^{1/4}(b^{1/4}+3)}=\frac{5b^{1/4}}{b^{1/4}+3}$;

в) $\frac{x-y}{x^{0,5}+y^{0,5}}=\frac{(x^{0,5}+y^{0,5})(x^{0,5}-y^{0,5})}{x^{0,5}+y^{0,5}}=x^{0,5}-y^{0,5}$;

г) $\frac{x^{1,5}y+xy^{1,5}}{xy^{0,5}+x^{0,5}y}=\frac{xy(x^{0,5}+y^{0,5})}{x^{0,5}y^{0,5}(x^{0,5}+y^{0,5})}=x^{0,5}y^{0,5}$;

д) $\frac{a^{3/2}+b^{3/2}}{a-a^{1/2}b^{1/2}+b}=\frac{(a^{1/2}+b^{1/2})(a-a^{1/2}b^{1/2}+b)}{a-a^{1/2}b^{1/2}+b}=a^{1/2}+b^{1/2}$;

е) $\frac{p-q}{p^{1/3}-q^{1/3}}=\frac{(p^{1/3}-q^{1/3})(p^{2/3}+p^{1/3}q^{1/3}+q^{2/3})}{p^{1/3}-q^{1/3}}=p^{2/3}+p^{1/3}q^{1/3}+q^{2/3}$;

2) а) $\frac{x-3x^{1/2}}{x^{3/2}-3x}=\frac{x^{1/2}(x^{1/2}-3)}{x(x^{1/2}-3)}=\frac{1}{x^{1/2}}$; б) $\frac{y^{1/3}+y^{5/6}}{y^{1/3}-y^{5/6}}=\frac{y^{1/3}(1+y^{1/2})}{y^{1/3}(1-y^{1/2})}=\frac{1+y^{1/2}}{1-y^{1/2}}$;

в) $\frac{9a-b}{3a-a^{0,5}b^{0,5}}=\frac{(3a^{0,5}-b^{0,5})(3a^{0,5}+b^{0,5})}{a^{0,5}(3a^{0,5}-b^{0,5})}=\frac{3a^{0,5}+b^{0,5}}{a^{0,5}}$;

г) $\frac{p^{2/5}-q^{2/5}}{p+p^{4/5}q^{1/5}}=\frac{(p^{1/5}-q^{1/5})(p^{1/5}+q^{1/5})}{p^{4/5}(p^{1/5}+q^{1/5})}=\frac{p^{1/5}-q^{1/5}}{p^{4/5}}$;

д) $\frac{a^{3/2}b^{1/2}-ab+a^{1/2}b^{3/2}}{a+b}=\frac{a^{3/2}b^{1/2}-ab+a^{1/2}b^{3/2}}{a^{1/3}}$;

е) $\frac{x^{0,3}-y^{0,3}}{x^{0,1}-y^{0,1}}=\frac{(x^{0,1}-y^{0,1})(x^{0,2}+x^{0,1}y^{0,1}+y^{0,2})}{x^{0,1}-y^{0,1}}=x^{0,2}+x^{0,1}y^{0,1}+y^{0,2}$.

3. $\frac{y-49y^{0,5}}{y^{0,75}-7y^{0,5}}=\frac{y^{0,5}(y^{0,5}-49)}{y^{0,5}(y^{0,25}-7)}=\frac{(y^{0,25}-7)(y^{0,25}+7)}{y^{0,25}-7}=y^{0,25}+7=$

$= (2,25)^{0,25}+7=\sqrt{1,5}+7$.

4. а) $\frac{b}{81-b}-\frac{9}{b^{0,5}+9}+\frac{b^{0,5}}{b^{0,5}-9}=\frac{b}{(9-b^{0,5})(9+b^{0,5})}-\frac{9}{9+b^{0,5}}-\frac{b^{0,5}}{9-b^{0,5}}=$

$$= \frac{b-9(9-b^{0,5})-b^{0,5}(9+b^{0,5})}{(9-b^{0,5})(9+b^{0,5})} = -\frac{81}{81-b} = \frac{81}{b-81};$$

$$\begin{aligned} \text{б)} \left(\frac{6x^{0,5}+1}{x^{0,5}-3} + \frac{6x^{0,5}-1}{x^{0,5}+3} \right) \cdot \frac{x-9}{2x+1} &= \frac{(6x^{0,5}+1)(x^{0,5}+3) + (6x^{0,5}-1)(x^{0,5}-3)}{x-9} \cdot \frac{x-9}{2x+1} = \\ &= \frac{6x+19x^{0,5}+3+6x-19x^{0,5}+3}{2x+1} = \frac{12x+6}{2x+1} = 6. \end{aligned}$$

С-34

1. а) $\frac{\pi}{2} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$; б) $\frac{3}{2}\pi = 3 \cdot \frac{\pi}{2} = 3 \cdot 90^\circ = 270^\circ$; в) $\frac{2}{3}\pi = \frac{2}{3} \cdot 180^\circ = 120^\circ$;

г) $\frac{4}{5}\pi = \frac{4}{5} \cdot 180^\circ = 144^\circ$; д) $2\pi = 2 \cdot 180^\circ = 360^\circ$.

2. а) $75^\circ = 75 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{5\pi}{12}$; б) $50^\circ = 50 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{5\pi}{18}$; в) $720^\circ = 720 \cdot \frac{\pi}{180} = 4\pi$;

г) $15^\circ = 15 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{12}$; д) $10^\circ = 10 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{18}$.

3.

Градусы	60°	30°	120°	150°	100°	72°	108°	135°	20°	450°
Рadiany	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{9}$	$\frac{2\pi}{5}$	$\frac{3\pi}{5}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\pi}{9}$	$2,5\pi$

$$\frac{5\pi}{9} = \frac{5}{9} \cdot 180^\circ = 100^\circ.$$

4. а) $\frac{\pi}{4} \approx 0,79$; б) $\frac{\pi}{6} \approx 0,52$; в) $\frac{\pi}{3} \approx 1,05$; г) $\pi \approx 3,14$; д) $\frac{3\pi}{2} \approx 4,71$.

5. а) $\frac{\pi}{4} > 0, (7)$; б) $\frac{\pi}{6} < -\frac{1}{2}$; в) $\frac{3}{2}\pi < 4,8$.

6. Длина окружности равна $2\pi R \approx 21,35$ (см). За 10 мин. конец стрелки пройдет одну шестую длины, т.е. 3,56 см. Ответ: 3,56 см.

7. Пусть x — коэффициент пропорциональности. Тогда $2x$, $3x$, и $5x$ — углы треугольника. Их сумма равна π , т.е. $2x+3x+5x=\pi$, $10x=\pi$, $x=\frac{\pi}{10}$,

$$\frac{\pi}{5}, \frac{3\pi}{10}, \frac{\pi}{2} \text{ — углы треугольника. Ответ: } \frac{\pi}{5}, \frac{3\pi}{10}, \frac{\pi}{2}.$$

8. Пусть x — угол, $\pi \cdot 4,5^2$ (см²) — площадь круга, $\frac{\pi \cdot 4,5^2}{2\pi} \cdot x = \frac{4,5^2 \cdot x}{2}$ см²

— площадь сектора или 20,25 см². Получаем: $\frac{4,5^2 \cdot x}{2} = 20,25$; $x=2$.

9. $45^\circ = \frac{\pi}{4}$ — угол при вершине; $\frac{\pi - \frac{\pi}{4}}{2} = \frac{3\pi}{8}$ — II и III углы.

10. Внутренний угол правильного n -угольника равен $\pi \left(1 - \frac{2}{n}\right)$.

Внешний равен $\pi - \pi \left(1 - \frac{2}{n}\right) = \pi \left(1 - 1 + \frac{2}{n}\right) = \frac{2\pi}{n}$. Получаем: $\frac{2\pi}{n} = \frac{\pi}{6}$, $n=12$.

C-35

1. 1) а) (-1; 0); б) (0; 1); в) (0; -1); г) (-1; 0); д) (1; 0);

2) а) (1; 0); б) (0; -1); в) (-1; 0); г) (1; 0); д) (0; -1).

2. а) III; б) III; в) I; г) IV; д) III.

3. а) $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; б) $2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; в) $-\frac{\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

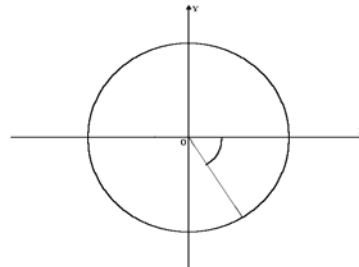
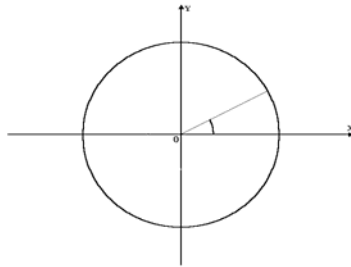
4. а) (0; -1); б) (0; -1); в) (-1; 0).

5. а) $\frac{5\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{4\pi}{3} + 2\pi l$, $l \in \mathbb{Z}$.

C-36

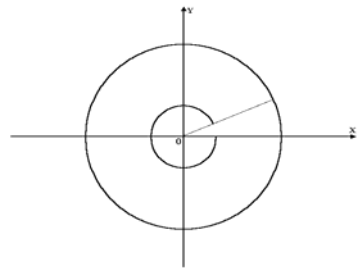
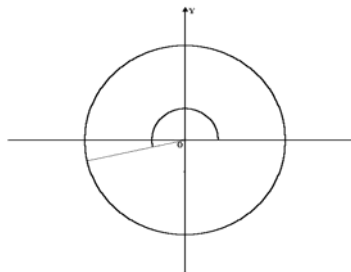
1. а) 30° ;

б) -60° ;

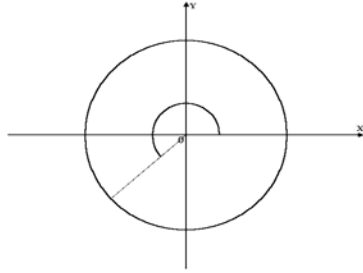


в) 210° ;

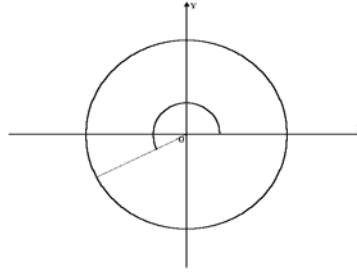
г) -320° .



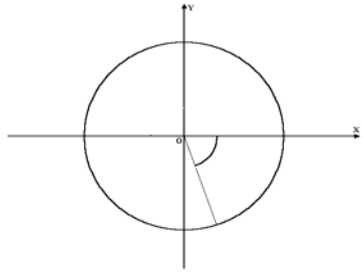
2. а) 225°;



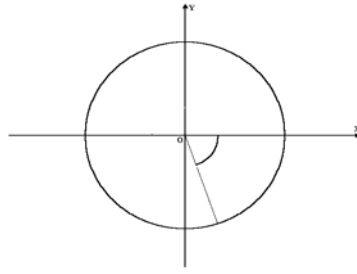
б) 585°;



в) -75°;



г) -435°.



2. 1) а) III; б) II; в) II; г) III;

2) а) III; б) II; в) I; г) IV.

3.

α	0°	90°	180°	270°	360°
$\sin\alpha$	0	1	0	-1	0
$\cos\alpha$	1	0	-1	0	1
$\operatorname{tg}\alpha$	0	-	0	-	0
$\operatorname{ctg}\alpha$	-	0	-	0	-

4. 1) а) $\varphi=180^\circ$; б) $\varphi=450^\circ$; в) $\varphi=270^\circ$;

2) а) $\varphi=270^\circ$; б) $\varphi=360^\circ$; в) $\varphi=180^\circ$;

5. а) $-1 \leq \sin \alpha \leq 1$, $4-1 \leq 4+\sin \alpha \leq 4+1$, $3 \leq 4+\sin \alpha \leq 5$;

б) $-1 \leq \sin \alpha \leq 1$, $-1 \leq -\sin \alpha \leq 1$, $3 \leq 4-\sin \alpha \leq 5$;

в) $-1 \leq \cos \alpha \leq 1$, $6-1 \leq 6+\cos \alpha \leq 6+1$, $5 \leq 6+\cos \alpha \leq 7$;

г) $-1 \leq \cos \alpha \leq 1$, $-1 \leq -\cos \alpha \leq 1$, $5 \leq 6-\cos \alpha \leq 7$.

6. а) нет, т.к. $-1 \leq \sin \alpha \leq 1$, а $\frac{\sqrt{10}}{3} > 1$;

б) нет, т.к. $-1 \leq \cos \alpha \leq 1$, а $\frac{\sqrt{10}}{3} > 1$; в) да; г) да.

7. **1) а)** $\cos 180^\circ + 5\sin 90^\circ = -1 + 5 = 4$; **б)** $\sin 180^\circ - 3\cos 0^\circ = 0 - 3 = -3$;
в) $5\operatorname{ctg} 90^\circ - 7\operatorname{tg} 180^\circ = 5 \cdot 0 - 7 \cdot 0 = 0$; **г)** $\operatorname{tg} 360^\circ - 2\operatorname{ctg} 270^\circ + 3 = 0 - 2 \cdot 0 + 3 = 3$;
- 2) **а)** $\sin 60^\circ + \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$; **б)** $\sin 30^\circ - \cos 60^\circ = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$;
в) $\sin 45^\circ - \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$; **г)** $\operatorname{tg} 45^\circ + \operatorname{ctg} 30^\circ = 1 + \sqrt{3}$.
8. **а)** $\sin x = 0$, $x = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; **б)** $\sin x = -1$, $x = -\frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$;
в) $\sin x = 1$, $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; **г)** $\cos x = 0$, $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$;
д) $\cos x = -1$, $x = \pi + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; **е)** $\cos x = 1$, $x = 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.
9. **а)** $\sin^2 30^\circ + \cos^2 60^\circ = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$;
б) $\operatorname{tg}^2 45^\circ + \cos^2 45^\circ = 1^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = 1,5$;
в) $\sin 45^\circ \cdot \cos 30^\circ \cdot \operatorname{tg} 180^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 0 = 0$.
10. $0^\circ < \alpha < 90^\circ$, $\sin \alpha > 0$, $\sin \alpha < 2$, значит, $\sin^2 \alpha < 2\sin \alpha$.
11. $\alpha = 30^\circ$; **а)** $\sin 2\alpha = \sin(2 \cdot 30^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$;
б) $2\sin \alpha = 2\sin 30^\circ = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$;
в) $\cos 3\alpha = \cos(3 \cdot 30^\circ) = \cos 90^\circ = 0$, $3\cos \alpha = 3\cos 30^\circ = 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

C-37

1. **а)** $\sin 13^\circ > 0$, $\sin 103^\circ > 0$, $\sin 218^\circ < 0$, $\sin 302^\circ < 0$;
б) $\cos 41^\circ > 0$, $\cos 179^\circ < 0$, $\cos 273^\circ > 0$, $\cos 354^\circ > 0$;
в) $\operatorname{tg} 14^\circ > 0$, $\operatorname{tg} 86^\circ > 0$, $\operatorname{tg} 191^\circ > 0$, $\operatorname{tg} 311^\circ < 0$;
г) $\operatorname{ctg} 67^\circ > 0$, $\operatorname{ctg} 98^\circ < 0$, $\operatorname{ctg} 195^\circ > 0$, $\operatorname{ctg} 279^\circ < 0$.
2. **1) а)** $\sin 169^\circ > 0$; **б)** $\cos 110^\circ < 0$; **в)** $\operatorname{tg} 203^\circ > 0$; **г)** $\operatorname{ctg} 288^\circ < 0$;
2) а) $\sin 409^\circ > 0$; **б)** $\cos 372^\circ > 0$; **в)** $\operatorname{tg} 540^\circ = 0$; **г)** $\operatorname{ctg} 364^\circ > 0$;
3) а) $\sin(-88^\circ) < 0$; **б)** $\cos(-12^\circ) > 0$; **в)** $\operatorname{tg}(-72^\circ) < 0$; **г)** $\operatorname{ctg}(-110^\circ) > 0$.
- 3.

α	116°	208°	367°	-43°	-105°
$\sin \alpha$	+	-	+	-	-
$\cos \alpha$	-	-	+	+	-
$\operatorname{tg} \alpha$	-	+	+	-	+
$\operatorname{ctg} \alpha$	-	+	+	-	+

4. а) $\sin 16^\circ \cdot \cos 206^\circ = \langle + \rangle \cdot \langle - \rangle < 0$; б) $\sin 108^\circ \cdot \cos 300^\circ = \langle + \rangle \cdot \langle + \rangle > 0$;
 в) $\frac{\sin 267^\circ}{\cos 167^\circ} = \frac{\langle - \rangle}{\langle + \rangle} < 0$; г) $\frac{\cos 140^\circ}{\cos 14^\circ} = \frac{\langle - \rangle}{\langle + \rangle} < 0$;
 д) $\sin 160^\circ \cdot \cos 205^\circ \cdot \operatorname{tg} 97^\circ = \langle + \rangle \cdot \langle - \rangle \cdot \langle - \rangle > 0$;
 е) $\cos 155^\circ \cdot \sin 88^\circ \cdot \operatorname{tg} 105^\circ = \langle - \rangle \cdot \langle + \rangle \cdot \langle - \rangle > 0$.
 5. а) $\sin \alpha > 0$ и $\operatorname{tg} \alpha < 0$; I или II, II или IV, значит, II четверть;
 б) $\cos \alpha < 0$ и $\operatorname{tg} \alpha > 0$; II или III, I или III, значит, III четверть.
 6. 1) а) $\sin(-45^\circ) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\cos(-60^\circ) = \frac{1}{2}$; в) $\operatorname{tg}(-30^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$;
 г) $\operatorname{ctg}(-45^\circ) = -1$;
 2) а) $\sin(-60^\circ) + \sin 0^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2} + 0 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;
 б) $\sin(-30^\circ) + \cos(-60^\circ) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$; в) $\sin(-90^\circ) + \cos(-90^\circ) = -1 + 0 = -1$;
 г) $\cos(-60^\circ) \cdot \operatorname{tg}(-45^\circ) = \frac{1}{2} \cdot (-1) = -\frac{1}{2}$.
 7. а) $\sin 420^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\cos 390^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$; в) $\operatorname{tg} 405^\circ = 1$; г) $\operatorname{ctg} 390^\circ = \sqrt{3}$;
 д) $\sin 750^\circ = \frac{1}{2}$; е) $\cos 720^\circ = 1$.
 8. $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$; а) $\sin \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha = \langle - \rangle \cdot \langle + \rangle < 0$; б) $\frac{\cos^2 \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\langle + \rangle}{\langle - \rangle} < 0$;
 в) $\frac{\sin^3 \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\langle - \rangle}{\langle - \rangle} > 0$; г) $\sin \alpha + \cos \alpha = \langle - \rangle + \langle - \rangle < 0$.
 9. $\cos \alpha = a$; а) $1 + \cos \alpha = 1 + a$; б) $1 - \cos(-\alpha) = 1 - a$; в) $\cos(\alpha + 720^\circ) = a$;
 г) $\cos(\alpha - 720^\circ) = \cos(720^\circ - \alpha) = a$; д) $\cos(360^\circ + \alpha) = a$; е) $\cos(360^\circ - \alpha) = a$.
 10. $\sin \alpha + \cos \alpha = -1,03$ III четверти.
 11. $\varphi \in$ III четверти;
 а) $|\sin \varphi| + \sin \varphi = -\sin \varphi + \sin \varphi = 0$; б) $\cos \varphi - |\cos \varphi| = \cos \varphi + \cos \varphi = 2\cos \varphi$;
 в) $\operatorname{tg} \varphi + |\operatorname{tg} \varphi| = \operatorname{tg} \varphi + \operatorname{tg} \varphi = 2\operatorname{tg} \varphi$; г) $|\sin \varphi| - |\operatorname{tg} \varphi| = -\sin \varphi - \operatorname{tg} \varphi$.

С-38

1. 1) а) $3\cos 60^\circ - 2\sin 30^\circ + 6\operatorname{ctg} 60^\circ - 2\operatorname{ctg} 30^\circ = \frac{3}{2} - 2 \cdot \frac{1}{2} + 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} - 2\sqrt{3} = \frac{1}{2}$;
 б) $\sin(-30^\circ) + \cos(-60^\circ) - 2\operatorname{tg}(-30^\circ) \cdot \operatorname{ctg}(-60^\circ) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{2}{3}$;

$$\begin{aligned} \text{в)} \quad & 5\sin(-45^\circ) + 5\cos(-45^\circ) - \sqrt{3}\operatorname{tg}(-30^\circ) + \sin(-30^\circ) = \\ & = -\frac{5\sqrt{2}}{2} + \frac{5\sqrt{2}}{2} + \sqrt{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}; \end{aligned}$$

$$\text{2) а)} \quad 3\cos\frac{\pi}{3} - 2\sin\frac{\pi}{6} + 3\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} - \operatorname{ctg}\frac{\pi}{4} = 3 \cdot \frac{1}{2} - 2 \cdot \frac{1}{2} + 3 - 1 = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2};$$

$$\text{б)} \quad \sin(-\pi) + 2\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) - 3\sin\frac{\pi}{4} + 3\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 0 + 2 \cdot 0 - \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2} = 0;$$

$$\text{в)} \quad 6\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right) \cdot \operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) - 5\cos(-\pi) = 6\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} - 1 + 5 = 22.$$

$$\text{2. а)} \quad \sin 0 - \cos 0 = -1 + 0 = -1; \quad \sin\frac{\pi}{2} - \cos\frac{\pi}{2} = 1 - 0 = 1; \quad \sin\pi - \cos\pi = 0 - (-1) = 1;$$

$$\sin 2\pi - \cos 2\pi = 0 - 1 = -1; \quad \text{б)} \quad 2\sin 0 + \cos(2 \cdot 0) = 0 + 1 = 1;$$

$$2\sin\frac{\pi}{6} + \cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{6}\right) = 2 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}; \quad 2\sin\frac{\pi}{2} + \cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{2}\right) = 2 \cdot 1 - 1 = 1;$$

$$2\sin\pi + \cos(2\pi) = 2 \cdot 0 + 1 = 1; \quad \text{в)} \quad 3\sin 0 - \cos(3 \cdot 0) = 3 \cdot 0 - 1 = -1;$$

$$3\sin\frac{\pi}{6} - \cos\left(3 \cdot \frac{\pi}{6}\right) = 3 \cdot \frac{1}{2} - 0 = \frac{3}{2}; \quad 3\sin\frac{\pi}{3} - \cos\left(3 \cdot \frac{\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2} - (-1) = \frac{3\sqrt{3} + 2}{2};$$

$$3\sin\frac{\pi}{2} - \cos\left(3 \cdot \frac{\pi}{2}\right) = 3 \cdot 1 - 0 = 3; \quad \text{г)} \quad \sin(3 \cdot 0) + \cos 0 = 0 + 1 = 1;$$

$$\sin\left(3 \cdot \frac{\pi}{6}\right) + \cos\frac{\pi}{6} = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2 + \sqrt{3}}{2}; \quad \sin\left(3 \cdot \frac{\pi}{3}\right) + \cos\frac{\pi}{3} = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2};$$

$$\sin(3 \cdot \pi) + \cos\pi = 0 - 1 = -1.$$

$$\text{3. 1) а)} \quad \sin^2\frac{\pi}{6} - \cos^2\frac{\pi}{3} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 0;$$

$$\text{б)} \quad 2\sin^2\frac{\pi}{4} + 3\cos^2\frac{\pi}{4} = 2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 3 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = 1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2};$$

$$\text{в)} \quad \operatorname{tg}^2\frac{\pi}{3} \cdot \operatorname{ctg}^2\frac{\pi}{6} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{1}{9};$$

$$\text{г)} \quad \sin\frac{\pi}{4} \cdot \cos\frac{\pi}{4} \cdot \operatorname{tg}^2\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{1}{6};$$

$$\text{2) а)} \quad \sin^2\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \cos^2\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = 1;$$

$$\text{б) } 3\cos^2\left(-\frac{\pi}{6}\right) \cdot \operatorname{ctg}^2\left(-\frac{\pi}{3}\right) = 3 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{3}{4};$$

$$\text{в) } \operatorname{tg}^2\left(-\frac{\pi}{6}\right) + \operatorname{ctg}^2\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{2}{3};$$

$$\text{г) } \operatorname{tg}^2\left(-\frac{\pi}{4}\right) \cdot \operatorname{ctg}^2\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 1 \cdot 1 = 1.$$

$$\text{4. а) } \frac{2\sin^2\frac{\pi}{6} - \cos^2\frac{\pi}{6} \cdot \operatorname{ctg}^2\frac{\pi}{6}}{\cos\frac{\pi}{3}} = \frac{2 \cdot \frac{1}{4} - \frac{3}{4} \cdot 3}{\frac{1}{2}} = -3,5;$$

$$\text{б) } \frac{3,5 - \sin^2\left(-\frac{\pi}{4}\right) - \cos^2\left(-\frac{\pi}{4}\right)}{2\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{3,5 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}}{-2} = -\frac{5}{4}.$$

$$\text{5. а) } \frac{\sin 2\alpha - \cos 2\alpha}{\sin(\alpha - 15^\circ) + 2\operatorname{tg}\alpha} = \frac{\sin 90^\circ - \cos 90^\circ}{\sin 30^\circ + 2\operatorname{tg}45^\circ} = \frac{1}{\frac{1}{2} + 2} = \frac{2}{5};$$

$$\text{б) } \frac{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)}{2\sin(\alpha + \beta)} = \frac{\sin 90^\circ + \sin 30^\circ}{2\sin 90^\circ} = \frac{\frac{3}{2}}{2} = \frac{3}{4};$$

$$\text{в) } \frac{\sin 2\alpha - \cos \alpha \cdot \operatorname{tg}\alpha}{\cos \alpha + \sin(-\alpha) + \operatorname{ctg}\alpha} = \frac{\sin\frac{\pi}{2} - \cos\frac{\pi}{4} \cdot \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}{\cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{4} + \operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}} = \frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} + 1} = \frac{2 - \sqrt{2}}{2};$$

$$\text{г) } \frac{3\sin(\alpha + \beta)}{\sin(\alpha - \beta) - 3\cos\alpha} = \frac{3\sin\frac{\pi}{2}}{\sin\frac{\pi}{6} - 3\cos\frac{\pi}{3}} = \frac{3}{\frac{1}{2} - \frac{3}{2}} = -3.$$

$$\text{6. а) } \sin\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} > 1; \text{ б) } \operatorname{tg}\frac{\pi}{6} + \operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}} + \sqrt{3} > 1;$$

$$\text{в) } \sin\frac{\pi}{2} + \sin\frac{\pi}{4} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} < 2; \text{ г) } 2\sin\frac{\pi}{3} + \cos\frac{\pi}{2} = \sqrt{3} + 0 < 2.$$

$$\text{7. } \sin\frac{\pi}{3} \cdot \operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{3} = \frac{3}{2};$$

$$\operatorname{ctg}^2 \frac{\pi}{6} \cdot \left(1 - \sin^2 \frac{\pi}{4}\right) = (\sqrt{3})^2 \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right) = 3 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2},$$

значит, $\sin \frac{\pi}{3} \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi}{6} \left(1 - \sin^2 \frac{\pi}{4}\right)$, что и требовалось доказать.

С-39

1. а) $\sin \alpha = -0,8$, $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$; $\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - 0,8^2} = 0,6$;

$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\frac{4}{3}$; **б)** $\cos \alpha = \frac{-24}{25}$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$;

$\sin \alpha = -\sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{24^2}{25^2}} = -\frac{7}{25}$; $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{7 \cdot 25}{25 \cdot 24} = \frac{7}{24}$;

в) $\sin \alpha = \frac{24}{25}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$; $\cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \frac{24^2}{25^2}} = -\frac{7}{25}$;

$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{24}{7}$; **г)** $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = -\frac{7}{24}$; **р)** $\cos \alpha = \frac{12}{13}$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$;

$\sin \alpha = -\sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \frac{12^2}{13^2}} = -\frac{5}{13}$; $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{5}{12}$; $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{12}{5}$;

д) $\operatorname{tg} \alpha = 2,4$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$; $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = -\frac{1}{\sqrt{1 + 2,4^2}} = -\frac{1}{2,6} = -\frac{5}{13}$;

$\sin \alpha = -\sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{5^2}{13^2}} = -\frac{12}{13}$; **е)** $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{5}{12}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$;

$\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{5^2}{12^2}}} = \frac{12}{13}$; $\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{12^2}{13^2}} = \frac{5}{13}$.

2. а) $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 \neq 1$, значит, данные равенства не могут

выполняться одновременно; **б)** $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1^2 + (-1)^2 \neq 1$, значит, данные равенства не могут выполняться одновременно.

3. а) $\cos^2 \alpha = \frac{1}{4}$, $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{3}$; $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{15}{16}$;

$$\sin^2 \alpha = \frac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha} = \frac{1}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{3}{4}; \frac{15}{16} \neq \frac{3}{4}, \text{ значит, данные равенства не могут}$$

выполняться одновременно; б) $\sin \alpha = 0,7$, $\operatorname{ctg} \alpha = 2\sqrt{2}$;

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - 0,7^2 = 0,51; \cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{8}{9}; 0,51 \neq \frac{8}{9},$$

значит, данные равенства не могут выполняться одновременно.

4. а) $\sin \beta = \frac{40}{41}$, $\frac{\pi}{2} < \beta < \frac{3\pi}{2}$ т.к. $\sin \beta < 0$, то $\pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$;

$$\cos \beta = -\sqrt{1 - \sin^2 \beta} = -\sqrt{1 - \frac{40^2}{41^2}} = -\frac{9}{41}; \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = \frac{40}{9}; \operatorname{ctg} \beta = \frac{9}{40};$$

б) $\cos \beta = \frac{4}{5}$, $0 < \beta < \pi$ т.к. $\cos \beta > 0$, то $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$;

$$\sin \beta = \sqrt{1 - \cos^2 \beta} = \sqrt{1 - \frac{4^2}{5^2}} = \frac{3}{5}; \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = \frac{3}{4}; \operatorname{ctg} \beta = \frac{4}{3};$$

в) $\operatorname{tg} \beta = -1$, $\pi < \beta < 2\pi$; т.к. $\operatorname{tg} \beta < 0$, то $\frac{3\pi}{2} < \beta < 2\pi$;

$$\cos \beta = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \beta}} = \frac{1}{\sqrt{1 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}; \sin \beta = -\sqrt{1 - \cos^2 \beta} = -\frac{1}{\sqrt{2}}; \operatorname{ctg} \beta = -1;$$

г) $\operatorname{ctg} \beta = 2$, $0 < \beta < \pi$; т.к. $\operatorname{ctg} \beta > 0$, то $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$;

$$\sin \beta = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \beta}} = \frac{1}{\sqrt{1 + 4}} = \frac{1}{\sqrt{5}}; \cos \beta = \sqrt{1 - \sin^2 \beta} = \sqrt{1 - \frac{1}{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}; \operatorname{tg} \beta = \frac{1}{2}.$$

5. $\sin \alpha$; $\cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$; $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$; $1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$;

$$\operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1 - \sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha}; \operatorname{ctg} \alpha = \pm \frac{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}{\sin \alpha}; \operatorname{tg} \alpha = \pm \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}.$$

6. $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$, $\cos \alpha = 1 + a$; $\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - (1 + a)^2} = \sqrt{-a^2 - 2a}$;
 $0 \leq \cos \alpha \leq 1$ при $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$; $0 \leq 1 + a \leq 1$; $-1 \leq a \leq 0$.

Ответ: $\sin \alpha = \sqrt{-a^2 - 2a}$, $-1 \leq a \leq 0$.

7. $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \left(\frac{a}{1-a}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{1-2a}}{1-a}\right)^2 = \frac{a^2 + 1 - 2a}{(1-a)^2} = \frac{(a-1)^2}{(a-1)^2} = 1$, значит,

могут.

Ответ: могут.

C-40

1. 1) а) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha = 1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$;

б) $\sin^2\alpha (1 + \operatorname{tg}^2\alpha) = \sin^2\alpha \cdot \frac{1}{\cos^2\alpha} = \operatorname{tg}^2\alpha$;

в) $1 - \frac{1}{\sin^2\alpha} = \frac{\sin^2\alpha - 1}{\sin^2\alpha} = -\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = -\operatorname{ctg}^2\alpha$;

г) $4 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 4 - 1 = 3$;

2) а) $\cos^2\beta - \cos^2\beta \sin^2\beta = \cos^2\beta (1 - \sin^2\beta) = \cos^2\beta \cos^2\beta = \cos^4\beta$;

б) $\sin^4\beta + \sin^2\beta \cos^2\beta = \sin^2\beta (\sin^2\beta + \cos^2\beta) = \sin^2\beta$;

в) $\operatorname{tg}^2\beta \operatorname{ctg}^2\beta - \sin^2\beta = 1 - \sin^2\beta = \cos^2\beta$; г) $\frac{1 - \cos^2\beta}{\sin^2\beta - 1} = -\frac{\sin^2\beta}{\cos^2\beta} = -\operatorname{tg}^2\beta$.

2. 1) а) $\cos\alpha \operatorname{tg}\alpha = \cos\alpha \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \sin\alpha$, ч.т.д.

б) $\frac{\operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha} + 1 = \frac{\cos\alpha \cos\alpha}{\sin\alpha \sin\alpha} + 1 = \operatorname{ctg}^2\alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2\alpha}$, ч.т.д.

2) а) $\frac{\operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha + \left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)} =$

$= \frac{\cos^2\alpha \sin\alpha}{\sin\alpha(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)} = \cos^2\alpha$, ч.т.д.

б) $\frac{1 + \operatorname{ctg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}\alpha} = \frac{1 + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}{1 + \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}} = \frac{(\sin\alpha + \cos\alpha)\cos\alpha}{\sin\alpha(\sin\alpha + \cos\alpha)} = \operatorname{ctg}\alpha$, ч.т.д.

3. 1) а) $(1 - \cos(-\alpha))(1 + \cos(-\alpha)) = (1 - \cos\alpha)(1 + \cos\alpha) = 1 - \cos^2\alpha = \sin^2\alpha$;

б) $\operatorname{tg}\alpha \operatorname{ctg}(-\alpha) + \cos^2(-\alpha) = -1 + \cos^2\alpha = -\sin^2\alpha$;

в) $\sin(-\alpha) - \sin\alpha \operatorname{ctg}^2(-\alpha) = -\sin\alpha - \sin\alpha \operatorname{ctg}^2\alpha =$

$= -\sin\alpha (1 + \operatorname{ctg}^2\alpha) = -\sin\alpha \cdot \frac{1}{\sin^2\alpha} = -\frac{1}{\sin\alpha}$;

2) а) $\frac{1 + \cos(-\beta)}{\sin(-\beta)} - \operatorname{ctg}(-\beta) = -\frac{1 + \cos\beta}{\sin\beta} + \operatorname{ctg}\beta = \frac{-1 - \cos\beta + \cos\beta}{\sin\beta} = -\frac{1}{\sin\beta}$;

б) $\frac{\sin^2(-\beta) - \sin^4(-\beta)}{\cos^2(-\beta)} = \frac{\sin^2\beta - \sin^4\beta}{\cos^2\beta} = \frac{\sin^2\beta(1 - \sin^2\beta)}{1 - \sin^2\beta} = \sin^2\beta$;

в) $\frac{\sin(-\alpha)}{1 - \cos(-\alpha)} - \operatorname{ctg}(-\alpha) = \operatorname{ctg}\alpha - \frac{\sin\alpha}{1 - \cos\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - \frac{\sin\alpha}{1 - \cos\alpha} =$

$= \frac{\cos\alpha - \cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{\sin\alpha(1 - \cos\alpha)} = \frac{\cos\alpha - 1}{\sin\alpha(1 - \cos\alpha)} = -\frac{1}{\sin\alpha}$.

$$4. \frac{1 + \operatorname{ctg} \varphi + \operatorname{ctg}^2 \varphi}{1 + \operatorname{tg} \varphi + \operatorname{tg}^2 \varphi} - \operatorname{ctg}^2 \varphi = \frac{1 + \operatorname{ctg} \varphi + \operatorname{ctg}^2 \varphi}{1 + \frac{1}{\operatorname{ctg} \varphi} + \frac{1}{\operatorname{ctg}^2 \varphi}} - \operatorname{ctg}^2 \varphi =$$

$$= \frac{(1 + \operatorname{ctg} \varphi + \operatorname{ctg}^2 \varphi) \operatorname{ctg}^2 \varphi}{\operatorname{ctg}^2 \varphi + \operatorname{ctg} \varphi + 1} - \operatorname{ctg}^2 \varphi = 0, \text{ т.е. значение выражения не зависит}$$

от φ , ч.т.д.

$$5. \text{ а) } \frac{1 - \cos^4 \beta}{4 \cos \beta + 4 \cos^3 \beta} = \frac{(1 - \cos^2 \beta)(1 + \cos^2 \beta)}{4 \cos \beta (1 + \cos^2 \beta)} = \frac{\sin^2 \beta}{4 \cos \beta};$$

$$\text{б) } \cos^3 \beta \operatorname{tg}^3 \beta + 9 \sin^3 \beta = \cos^3 \beta \frac{\sin^3 \beta}{\cos^3 \beta} + 9 \sin^3 \beta = 10 \sin^3 \beta;$$

$$-1 \leq \sin \beta \leq 1; -1 \leq \sin^3 \beta \leq 1; -10 \leq 10 \sin^3 \beta \leq 10;$$

т.е. наименьшее значение равно -10 .

Ответ: -10 .

$$6. \frac{\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{ctg} \varphi}{\operatorname{tg} \varphi + \operatorname{ctg} \varphi} = \frac{\frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} - \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi}}{\frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} + \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi}} = \frac{\sin^2 \varphi - \cos^2 \varphi}{\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi} = \sin^2 \varphi - \cos^2 \varphi =$$

$$= 1 - \cos^2 \varphi - \cos^2 \varphi = 1 - 2 \cos^2 \varphi = 1 - 2 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 1 - 2 \cdot \frac{9}{25} = \frac{7}{25}.$$

Ответ: $\frac{7}{25}$.

C-41

$$1. \text{ 1) а) } \frac{\cos \alpha + \operatorname{ctg} \alpha}{1 + \sin \alpha} = \frac{\cos \alpha + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}}{1 + \sin \alpha} = \frac{\sin \alpha \cdot \cos \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha (1 + \sin \alpha)} =$$

$$= \frac{\cos \alpha (\sin \alpha + 1)}{\sin \alpha (\sin \alpha + 1)} = \operatorname{ctg} \alpha;$$

$$\text{б) } (1 - \cos^2 \alpha)(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) = \sin^2 \alpha \cdot \frac{1}{\cos^2 \alpha} = \operatorname{tg}^2 \alpha;$$

$$\text{в) } \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} + \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha + 1 + \cos^2 \alpha + 2 \cos \alpha}{\sin \alpha (1 + \cos \alpha)} = \frac{2 + 2 \cos \alpha}{\sin \alpha (1 + \cos \alpha)} = \frac{2}{\sin \alpha};$$

$$\text{г) } \frac{\cos \alpha}{1 + \sin \alpha} - \frac{\cos \alpha}{1 - \sin \alpha} = \frac{\cos \alpha - \sin \alpha \cos \alpha - \cos \alpha - \sin \alpha \cos \alpha}{(1 + \sin \alpha)(1 - \sin \alpha)} =$$

$$= -\frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{\cos^2 \alpha} = -\frac{2 \sin \alpha}{\cos \alpha} = -2 \operatorname{tg} \alpha;$$

$$\begin{aligned}
2) \text{ а) } & \frac{1-2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha} = \frac{\sin^2\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha} = \\
& = \frac{(\sin\alpha-\cos\alpha)^2}{\sin\alpha-\cos\alpha} = \sin\alpha-\cos\alpha; \\
\text{б) } & \sin^4\alpha-\cos^4\alpha+\cos^2\alpha = (\sin^2\alpha-\cos^2\alpha)(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)+\cos^2\alpha = \\
& = \sin^2\alpha-\cos^2\alpha+\cos^2\alpha = \sin^2\alpha; \\
\text{в) } & \frac{1+\operatorname{ctg}^4\alpha}{\operatorname{ctg}^2\alpha+\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{1+\operatorname{ctg}^4\alpha}{\operatorname{ctg}^2\alpha+\frac{1}{\operatorname{ctg}^2\alpha}} = \frac{1+\operatorname{ctg}^4\alpha}{\operatorname{ctg}^4\alpha+1} \cdot \operatorname{ctg}^2\alpha = \operatorname{ctg}^2\alpha; \\
\text{г) } & \frac{\cos^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} - \frac{\sin^2\alpha}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha} = \cos^4\alpha - \sin^4\alpha = (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha. \\
2. \text{ а) } & \operatorname{ctg}^2\alpha - \cos^2\alpha = \frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} - \cos^2\alpha = \frac{\cos^2\alpha - \cos^2\alpha\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \\
& = \frac{\cos^2\alpha\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \operatorname{ctg}^2\alpha\cos^2\alpha, \text{ ч.т.д.} \\
\text{б) } & \frac{\sin^3\alpha - \cos^3\alpha}{1 + \sin\alpha\cos\alpha} = \frac{(\sin\alpha - \cos\alpha)(\sin^2\alpha + \sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha)}{1 + \sin\alpha\cos\alpha} = \\
& = \frac{(\sin\alpha - \cos\alpha)(1 + \sin\alpha\cos\alpha)}{1 + \sin\alpha\cos\alpha} = \sin\alpha - \cos\alpha, \text{ ч.т.д.} \\
3. \operatorname{tg}^2\alpha - \sin^2\alpha & = \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} - \sin^2\alpha = \frac{\sin^2\alpha - \sin^2\alpha\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \\
& = \frac{\sin^2\alpha(1 - \cos^2\alpha)}{\cos^2\alpha} = \frac{(1 - \cos^2\alpha)^2}{\cos^2\alpha} = \frac{\left(1 - \frac{4}{9}\right)^2}{\frac{4}{9}} = \frac{25 \cdot 9}{81 \cdot 4} = \frac{25}{36}. \\
4. \text{ а) } & \frac{\cos^2\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha - \sin^2\alpha} = \frac{\cos^2\alpha}{\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} - \sin^2\alpha} = \frac{\cos^4\alpha}{\sin^2\alpha - \sin^2\alpha\cos^2\alpha} = \\
& = \frac{\cos^4\alpha}{\sin^2\alpha(1 - \cos^2\alpha)} = \frac{\cos^4\alpha}{\sin^4\alpha} = \operatorname{ctg}^4\alpha, \text{ ч.т.д.} \\
\text{б) } & \frac{3\sin^2\alpha + \cos^4\alpha}{1 + \sin^2\alpha + \sin^4\alpha} = \frac{3\sin^2\alpha + (1 - \sin^2\alpha)^2}{1 + \sin^2\alpha + \sin^4\alpha} = \\
& = \frac{3\sin^2\alpha + 1 - 2\sin^2\alpha + \sin^4\alpha}{1 + \sin^2\alpha + \sin^4\alpha} = 1, \text{ ч.т.д.}
\end{aligned}$$

$$5. \frac{\cos^2 \beta - \sin \beta \cos \beta}{\sin^2 \beta - \sin \beta \cos \beta} = \frac{\cos \beta (\cos \beta - \sin \beta)}{\sin \beta (\sin \beta - \cos \beta)} = -\frac{1}{\operatorname{tg} \beta} = \frac{1}{0,25} = 4.$$

$$6. \frac{\sin^2 \varphi \cdot \cos^2 \varphi}{1 - \sin^4 \varphi - \cos^4 \varphi} = \frac{\sin^2 \varphi \cdot \cos^2 \varphi}{(1 - \sin^2 \varphi)(1 + \sin^2 \varphi) - \cos^4 \varphi} =$$

$$= \frac{\sin^2 \varphi \cdot \cos^2 \varphi}{\cos^2 \varphi (1 + \sin^2 \varphi) - \cos^4 \varphi} = \frac{\sin^2 \varphi \cdot \cos^2 \varphi}{\cos^2 \varphi - \cos^4 \varphi + \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi} =$$

$$= \frac{\sin^2 \varphi \cdot \cos^2 \varphi}{\cos^2 \varphi (1 - \cos^2 \varphi) + \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi} = \frac{\sin^2 \varphi \cdot \cos^2 \varphi}{2 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi} = \frac{1}{2}, \text{ ч.т.д.}$$

$$7. y = 4 \cos^2 x - 3 \sin^2 x = 4(1 - \sin^2 x) - 3 \sin^2 x = 4 - 7 \sin^2 x,$$

$$\text{т.к. } 0 \leq \sin^2 x \leq 1, \text{ то } y_{\max} = 4, \quad y_{\min} = -3.$$

$$8. 2 \cos x = \sqrt{3}, \quad \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad x_1 = \frac{\pi}{6}, \quad x_2 = \frac{\pi}{6} + 2\pi = \frac{13\pi}{6}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{\pi}{6}; \quad \frac{13\pi}{6}.$$

C-42

$$1. 1) \text{ а) } \cos 75^\circ = \cos(30^\circ + 45^\circ) = \cos 30^\circ \cdot \cos 45^\circ - \sin 30^\circ \cdot \sin 45^\circ =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1)}{4};$$

$$\text{б) } \cos \frac{5}{4} \pi = \cos \left(\pi + \frac{\pi}{4} \right) = \cos \pi \cdot \cos \frac{\pi}{4} - \sin \pi \cdot \sin \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$2) \text{ а) } \cos 72^\circ \cos 18^\circ - \sin 72^\circ \sin 18^\circ = \cos(72^\circ + 18^\circ) = \cos 90^\circ = 0;$$

$$\text{б) } \cos \frac{8\pi}{3} \cos \frac{7\pi}{3} + \sin \frac{8\pi}{3} \sin \frac{7\pi}{3} = \cos \left(\frac{8\pi}{3} - \frac{7\pi}{3} \right) = \frac{1}{2};$$

$$\text{в) } \cos 15^\circ 30' \cos 29^\circ 30' - \sin 15^\circ 30' \sin 29^\circ 30' =$$

$$= \cos(15^\circ 30' + 29^\circ 30') = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$3) \text{ а) } \cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\sqrt{1 - 0,8^2} = -0,6;$$

$$\cos \left(\alpha - \frac{\pi}{4} \right) = \cos \alpha \cos \frac{\pi}{4} + \sin \alpha \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} (-0,6 + 0,8) = \frac{\sqrt{2}}{10};$$

$$\text{б) } \sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \frac{15^2}{17^2}} = -\frac{8}{17};$$

$$\cos \left(\alpha + \frac{\pi}{3} \right) = \cos \alpha \cos \frac{\pi}{3} - \sin \alpha \sin \frac{\pi}{3} = \frac{15}{17} \cdot \frac{1}{2} + \frac{8}{17} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{15 + 8\sqrt{3}}{34};$$

$$\text{в) } \sin\alpha = -\frac{8}{17}, \cos\beta = -\sqrt{1 - \sin^2\beta} = -\frac{5}{13};$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta = -\frac{15}{17} \cdot \frac{5}{13} + \frac{8}{17} \cdot \frac{12}{13} = \frac{21}{221};$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \frac{171}{221}.$$

$$2. \text{ а) } \cos 2\alpha \cos 3\alpha - \sin 2\alpha \sin 3\alpha = \cos(2\alpha + 3\alpha) = \cos 5\alpha;$$

$$\text{б) } \cos\alpha \cos 2\alpha - \sin(-\alpha) \sin 2\alpha = \cos\alpha \cos 2\alpha + \sin\alpha \sin 2\alpha = \cos(\alpha - 2\alpha) = \cos 2\alpha;$$

$$\text{в) } \cos\left(\frac{3\pi}{4} + \alpha\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) - \sin\left(\frac{3\pi}{4} + \alpha\right) \sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) =$$

$$= \cos\left(\frac{3\pi}{4} + \alpha + \frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \cos\pi = -1;$$

$$\text{г) } \sin\left(\frac{3}{7}\pi - \alpha\right) \sin\left(\frac{4}{7}\pi + \alpha\right) - \cos\left(\frac{3}{7}\pi - \alpha\right) \cos\left(\frac{4}{7}\pi + \alpha\right) =$$

$$= -\cos\left(\frac{3}{7}\pi - \alpha + \frac{4}{7}\pi + \alpha\right) = -\cos\pi = 1;$$

$$\text{д) } \cos(\alpha + \beta) - \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta - \cos\alpha\cos\beta = -\sin\alpha\sin\beta.$$

$$3. \frac{\cos(\alpha + \beta)}{\sin\alpha\sin\beta} = \frac{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\sin\beta} = \operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta - 1, \text{ ч.т.д.}$$

$$4. \text{ а) } \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = \cos\frac{3\pi}{2}\cos\alpha - \sin\frac{3\pi}{2}\sin\alpha = \sin\alpha, \text{ ч.т.д.}$$

$$\text{б) } \cos(\pi - \alpha) = \cos\pi \cdot \cos\alpha + \sin\pi \cdot \sin\alpha = -\cos\alpha, \text{ ч.т.д.}$$

$$5. \text{ а) } \cos\left(\frac{2}{3}\pi - \alpha\right) - \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) =$$

$$= \cos\frac{2}{3}\pi \cdot \cos\alpha + \sin\frac{2}{3}\pi \cdot \sin\alpha - \cos\alpha \cdot \cos\frac{\pi}{3} + \sin\alpha \cdot \sin\frac{\pi}{3} =$$

$$= -\frac{1}{2}\cos\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha - \frac{1}{2}\cos\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha = -\cos\alpha + \sqrt{3}\sin\alpha;$$

$$\text{б) } \frac{\cos(\alpha + \beta) - \cos\alpha\cos\beta}{\cos(\alpha - \beta) - \sin\alpha\sin\beta} = \frac{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta - \cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta - \sin\alpha\sin\beta} = -\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta.$$

C-43

$$1. \text{ 1) а) } \sin 150^\circ = \sin(180^\circ - 30^\circ) = \sin 180^\circ \cdot \cos 30^\circ - \cos 180^\circ \cdot \sin 30^\circ = 0,5;$$

$$\text{б) } \sin\frac{4\pi}{3} = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\pi \cdot \cos\frac{\pi}{3} + \cos\pi \cdot \sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$2) \text{ а) } \sin 33^\circ \cdot \cos 63^\circ - \cos 33^\circ \cdot \sin 63^\circ = \sin(33^\circ - 63^\circ) = -\sin 30^\circ = -0,5;$$

$$\text{б) } \sin \frac{5\pi}{7} \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{5\pi}{7} \sin \frac{2\pi}{7} = \sin \left(\frac{5\pi}{7} + \frac{2\pi}{7} \right) = 0;$$

$$\text{в) } \sin 27^\circ 20' \cdot \cos 32^\circ 40' + \cos 27^\circ 20' \cdot \sin 32^\circ 40' = \\ = \sin(27^\circ 20' + 32^\circ 40') = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$3) \text{ а) } \sin \alpha = -\sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \frac{4}{25}} = -\frac{\sqrt{21}}{5};$$

$$\sin \left(\frac{\pi}{3} + \alpha \right) = \sin \frac{\pi}{3} \cdot \cos \alpha + \cos \frac{\pi}{3} \cdot \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{5} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{21}}{5} = \frac{2\sqrt{3} - \sqrt{21}}{10};$$

$$\text{б) } \cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -0,8;$$

$$\sin \left(\alpha - \frac{\pi}{6} \right) = \sin \alpha \cdot \cos \frac{\pi}{6} - \cos \alpha \cdot \sin \frac{\pi}{6} = 0,6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 0,8 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3\sqrt{3} + 4}{10};$$

$$\text{в) } \cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \frac{3^2}{4^2}} = -\frac{\sqrt{7}}{4}; \quad \cos \beta = \sqrt{1 - \sin^2 \beta} = 0,6 = \frac{3}{5};$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \sin \beta = -\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{5} + \frac{\sqrt{7}}{4} \cdot \frac{4}{5} = \frac{4\sqrt{7} - 6}{20};$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \frac{-6 - 4\sqrt{7}}{20}.$$

$$2. \text{ а) } \sin \alpha \cos 2\alpha - \cos \alpha \sin 2\alpha = \sin(\alpha - 2\alpha) = -\sin \alpha;$$

$$\text{б) } \sin 2\alpha \cdot \cos 3\alpha + \cos 2\alpha \cdot \sin 3\alpha = \sin(2\alpha + 3\alpha) = \sin 5\alpha;$$

$$\text{в) } \sin \left(\frac{3\pi}{5} - \alpha \right) \cos \left(\alpha + \frac{2\pi}{5} \right) + \cos \left(\frac{3\pi}{5} - \alpha \right) \sin \left(\alpha + \frac{2\pi}{5} \right) =$$

$$= \sin \left(\frac{3\pi}{5} - \alpha + \alpha + \frac{2\pi}{5} \right) = \sin \pi = 0;$$

$$\text{г) } \sin(\alpha - \beta) + \sin \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \sin \beta = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta + \cos \alpha \sin \beta = \sin \alpha \cos \beta.$$

$$3. \sin(\alpha - \beta) \sin(\alpha + \beta) = (\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta)(\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta) = \\ = \sin^2 \alpha \cos^2 \beta - \cos^2 \alpha \sin^2 \beta = \cos^2 \beta (1 - \cos^2 \alpha) - \cos^2 \alpha (1 - \cos^2 \beta) = \\ = \cos^2 \beta - \cos^2 \alpha, \quad \text{ч.т.д.}$$

$$4. \operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{(\sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta) \cdot \cos \alpha \cos \beta}{(\cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta) \cdot \cos \alpha \cos \beta} =$$

$$= \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}, \quad \text{ч.т.д.}$$

$$5. \operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta} = \frac{\frac{5}{3} - \frac{4}{3}}{1 + \frac{5}{3} \cdot \frac{4}{3}} = \frac{3 \cdot 3}{29 \cdot 3} = \frac{3}{29}.$$

$$6. \text{ а) } \frac{\operatorname{tg} 73^\circ - \operatorname{tg} 13^\circ}{1 + \operatorname{tg} 73^\circ \operatorname{tg} 13^\circ} = \operatorname{tg}(73^\circ - 13^\circ) = \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3};$$

$$\text{б) } \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{18} + \operatorname{tg} \frac{\pi}{9}}{1 - \operatorname{tg} \frac{\pi}{18} \operatorname{tg} \frac{\pi}{9}} = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{18} + \frac{\pi}{9} \right) = \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

$$7. \text{ а) } \operatorname{ctg} 150^\circ = \operatorname{ctg}(90^\circ + 60^\circ) = \frac{\operatorname{ctg} 30^\circ \cdot \operatorname{ctg} 60^\circ - 1}{\operatorname{ctg} 90^\circ + \operatorname{ctg} 60^\circ} = -\frac{1 \cdot \sqrt{3}}{1} = -\sqrt{3};$$

$$\text{б) } \operatorname{tg} 120^\circ = \operatorname{tg}(180^\circ - 60^\circ) = \frac{\operatorname{tg} 180^\circ - \operatorname{tg} 60^\circ}{1 + \operatorname{tg} 180^\circ \cdot \operatorname{tg} 60^\circ} = -\sqrt{3};$$

$$\text{в) } \operatorname{ctg}(-240^\circ) = -\operatorname{ctg}(270^\circ - 30^\circ) = \frac{\operatorname{ctg} 270^\circ \cdot \operatorname{ctg} 30^\circ + 1}{\operatorname{ctg} 270^\circ - \operatorname{ctg} 30^\circ} = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

C-44

$$1. \text{ 1) а) } 2 \sin 22^\circ 30' \cos 22^\circ 30' = \sin(2 \cdot 22^\circ 30') = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\text{б) } 2 \sin \frac{\pi}{12} \cos \frac{\pi}{12} = \sin \left(2 \cdot \frac{\pi}{12} \right) = 0,5; \text{ в) } \sin \frac{\pi}{8} \cos \frac{\pi}{8} = \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{4};$$

$$\text{г) } (\sin 15^\circ - \cos 15^\circ)^2 = \sin^2 15^\circ - 2 \sin 15^\circ \cos 15^\circ + \cos^2 15^\circ = 1 - \sin 30^\circ = 1 - 0,5 = 0,5;$$

$$\text{д) } (\cos 75^\circ + \sin 75^\circ)^2 = \cos^2 75^\circ + \sin^2 75^\circ + 2 \sin 75^\circ \cos 75^\circ = 1 + \sin 150^\circ = 1,5;$$

$$\text{е) } \cos^2 22^\circ 30' - \sin^2 22^\circ 30' = \cos(2 \cdot 22^\circ 30') = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\text{ж) } \cos^2 \frac{\pi}{12} - \sin^2 \frac{\pi}{12} = \cos \left(2 \cdot \frac{\pi}{12} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\text{з) } 1,5 - (\cos 15^\circ - \sin 15^\circ)^2 = 1,5 - \cos^2 15^\circ + 2 \sin 15^\circ \cos 15^\circ - \sin^2 15^\circ = 1,5 - 1 + \sin 30^\circ = 0,5 + 0,5 = 1;$$

$$2) \text{ а) } \cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}; \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha = 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{4\sqrt{5}}{9};$$

$$\text{б) } \sin \alpha = -\sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = -\frac{3}{5}; \sin 2\alpha = 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{24}{25};$$

$$3) \text{ а) } \cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 1 - 2 \cdot \frac{1}{9} = \frac{7}{9}; \text{ б) } \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 2 \cdot \frac{4}{9} - 1 = \frac{1}{9};$$

$$4) \text{ т.к. } \operatorname{tg} \alpha < 0, \text{ то } \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi; \cos \alpha = -\frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = -\frac{1}{2,6};$$

$$\sin\alpha = -\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{2,4}{2,6}; \quad \cos 2\alpha = \frac{1}{2,6^2} - \frac{2,4^2}{2,6^2} = -\frac{4,76}{6,76} = -\frac{119}{169};$$

$$\sin 2\alpha = -2 \frac{2,4}{2,6^2} = -\frac{2,4}{2,6 \cdot 1,3} = -\frac{24}{26 \cdot 1,3} = -\frac{12}{13 \cdot 1,3} = -\frac{120}{169}.$$

$$2. \text{ a) } \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{2 \cdot 1,1}{1-1,1^2} = -\frac{2,2}{0,21} = -\frac{220}{21};$$

$$\text{б) } \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}; \quad \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \cdot \sqrt{5}}{3\left(1-\frac{5}{9}\right)} = \frac{2\sqrt{5} \cdot 9}{3 \cdot 4} = -\frac{3\sqrt{5}}{2};$$

$$2) \sin\alpha = -\sqrt{1-\cos^2\alpha} = -\frac{12}{13}; \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{12}{5}; \quad \cos 2\alpha = \frac{25}{169} - \frac{144}{169} = -\frac{119}{169};$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{24}{5\left(1-\frac{144}{25}\right)} = -\frac{24 \cdot 25}{5 \cdot 119} = -\frac{100}{119}.$$

$$3. \text{ a) } \frac{4\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{12}} = 2\operatorname{tg}\left(2 \cdot \frac{\pi}{12}\right) = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}};$$

$$\text{б) } \frac{2\sin 15^\circ \cos 15^\circ}{\cos^2 67,5^\circ - \sin^2 67,5^\circ} = \frac{\sin 30^\circ}{\cos 135^\circ} = -\frac{1 \cdot \sqrt{2}}{2 \cdot 1} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$4. \text{ a) } \sin\alpha + \cos\alpha = \frac{1}{3}; \quad (\sin\alpha + \cos\alpha)^2 = \frac{1}{9}; \quad \sin^2\alpha + \cos^2\alpha + \sin 2\alpha = \frac{1}{9};$$

$$\sin 2\alpha = -\frac{8}{9};$$

$$\text{б) } \sin \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{\alpha}{2} = -\frac{1}{3};$$

$$\left(\sin \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{\alpha}{2}\right)^2 = \frac{1}{9};$$

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} + \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin\alpha = \frac{1}{9}; \quad \sin\alpha = \frac{8}{9}.$$

C-45.

$$1. \text{ a) } 2\sin\alpha \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = 2\sin\alpha \cos\alpha = \sin 2\alpha;$$

$$\text{б) } 1 + \cos 2\alpha = 1 + 2\cos^2\alpha - 1 = 2\cos^2\alpha;$$

$$\begin{aligned}
\text{в)} \quad & \frac{\cos 2\alpha + 1}{\sin 2\alpha} = \frac{1 + 2\cos^2 \alpha - 1}{\sin 2\alpha} = \frac{2\cos^2 \alpha}{2\sin \alpha \cos \alpha} = \operatorname{ctg} \alpha ; \\
\text{г)} \quad & \frac{\cos \alpha \sin 2\alpha}{2\operatorname{tg} \alpha} = \frac{2\cos \alpha \sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \cos \alpha}{2\sin \alpha} = \cos^3 \alpha ; \\
\text{д)} \quad & 2\cos^2 \alpha - \cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 2\cos^2 \alpha + 1 = 1 ; \\
\text{е)} \quad & \frac{\sin 2\alpha}{2\cos^2 \alpha} = \frac{2\sin \alpha \cos \alpha}{2\cos^2 \alpha} = \operatorname{tg} \alpha ; \\
\text{ж)} \quad & \frac{1 - \sin 2\alpha}{(\sin \alpha - \cos \alpha)^2} = \frac{\sin^2 \alpha - 2\sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha}{(\sin \alpha - \cos \alpha)^2} = \frac{(\sin \alpha - \cos \alpha)^2}{(\sin \alpha - \cos \alpha)^2} = 1 ; \\
\text{з)} \quad & \cos 2\alpha + 2\sin^2(-\alpha) = 1 - 2\sin^2 \alpha + 2\sin^2 \alpha = 1 ; \\
\text{и)} \quad & \operatorname{ctg}^2 \alpha (1 - \cos 2\alpha)^2 = \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} (1 - 1 + 2\sin^2 \alpha)^2 = \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} \cdot 4\sin^4 \alpha = \\
& = 4\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = \sin^2 2\alpha ; \\
\text{к)} \quad & \frac{\cos 2\alpha - \sin 2\alpha - 2\cos^2 \alpha}{\cos \alpha + \sin \alpha} = \frac{2\cos^2 \alpha - 1 - 2\sin \alpha \cos \alpha - 2\cos^2 \alpha}{\cos \alpha + \sin \alpha} = \\
& = -\frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + 2\sin \alpha \cos \alpha}{\cos \alpha + \sin \alpha} = -(\sin \alpha + \cos \alpha) . \\
\text{2. а)} \quad & \frac{\sin 2\alpha - \sin \alpha}{1 - \cos \alpha + \cos 2\alpha} = \frac{2\sin \alpha \cos \alpha - \sin \alpha}{1 - \cos \alpha + 2\cos^2 \alpha - 1} = \\
& = \frac{\sin \alpha (2\cos \alpha - 1)}{\cos \alpha (2\cos \alpha - 1)} = \operatorname{tg} \alpha , \text{ ч.т.д.} \\
\text{б)} \quad & \frac{1 + \cos 2\alpha}{1 - \cos 2\alpha} = \frac{1 + 2\cos^2 \alpha - 1}{1 - 1 + 2\sin^2 \alpha} = \operatorname{ctg}^2 2\alpha , \text{ ч.т.д.} \\
\text{3. а)} \quad & \cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha ; \\
\text{б)} \quad & \cos \alpha = 1 - 2\sin^2 \frac{\alpha}{2} . \\
\text{4. а)} \quad & \frac{\cos(90^\circ - \alpha)}{\cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin \alpha}{\cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{2\sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} = 2\sin \frac{\alpha}{2} ; \\
\text{б)} \quad & \cos 20^\circ \cdot \cos 70^\circ = \cos 20^\circ \cdot \cos(90^\circ - 20^\circ) = \sin 20^\circ \cdot \cos 20^\circ = \frac{1}{2} \sin 40^\circ ; \\
\text{в)} \quad & \cos \alpha \cos(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha ; \\
\text{г)} \quad & \frac{\cos 160^\circ}{\cos^4 10^\circ - \sin^4 10^\circ} = \frac{\cos(180^\circ - 20^\circ)}{(\cos^2 10^\circ + \sin^2 10^\circ)(\cos^2 10^\circ - \sin^2 10^\circ)} = -\frac{\cos 20^\circ}{\cos 20^\circ} = -1 ;
\end{aligned}$$

$$д) \frac{1 - \operatorname{ctg}^2 15^\circ}{2 \operatorname{ctg} 15^\circ} = -\operatorname{ctg} 30^\circ = -\sqrt{3}.$$

5. а) $\frac{1 - \cos \alpha + \sin 2\alpha}{\sin 2\alpha - \sin \alpha}$ в задаче допущена опечатка, данный пример сле-

$$\text{дует читать как: } \frac{1 - \cos \alpha + \sin 2\alpha}{\sin 2\alpha - \sin \alpha} = \frac{1 - \cos \alpha + 2 \cos^2 \alpha - 1}{2 \sin \alpha \cos \alpha - \sin \alpha} =$$

$$= \frac{\cos \alpha (2 \cos \alpha - 1)}{\sin \alpha (2 \cos \alpha - 1)} = \operatorname{ctg} \alpha;$$

$$б) \frac{\operatorname{ctg}^2(45^\circ + \alpha) - 1}{\operatorname{ctg}^2(45^\circ + \alpha) + 1} = \frac{\frac{\cos^2(45^\circ + \alpha) - \sin^2(45^\circ + \alpha)}{\sin^2(45^\circ + \alpha)} - 1}{\frac{\cos^2(45^\circ + \alpha) - \sin^2(45^\circ + \alpha)}{\sin^2(45^\circ + \alpha)} + 1} =$$

$$= \cos(2(45^\circ + \alpha)) = \cos(90^\circ + 2\alpha) = -\sin 2\alpha, \text{ ч.т.д.}$$

6. а) $\sin 36^\circ \cdot \cos 72^\circ =$

Опечатка.

$$б) 8 \cos \frac{\pi}{9} \cos \frac{2\pi}{9} \cos \frac{4\pi}{9} = \frac{8 \cos \frac{\pi}{9} \sin \frac{\pi}{9} \cos \frac{2\pi}{9} \cos \frac{4\pi}{9}}{\sin \frac{\pi}{9}} =$$

$$= \frac{4 \sin \frac{2\pi}{9} \cos \frac{2\pi}{9} \cos \frac{4\pi}{9}}{\sin \frac{\pi}{9}} = \frac{2 \sin \frac{4\pi}{9} \cos \frac{4\pi}{9}}{\sin \frac{\pi}{9}} = \frac{\sin \frac{8\pi}{9}}{\sin \frac{\pi}{9}} = \frac{\sin \frac{\pi}{9}}{\sin \frac{\pi}{9}} = 1, \text{ ч.т.д.}$$

C-46

1. а) $\sin 570^\circ = \sin(540^\circ + 30^\circ) = -\sin 30^\circ = -0,5;$

б) $\cos 210^\circ = \cos(180^\circ + 30^\circ) = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2};$

в) $\operatorname{tg} 135^\circ = \operatorname{tg}(180^\circ - 45^\circ) = -\operatorname{tg} 45^\circ = -1;$ г) $\operatorname{ctg} 315^\circ = \operatorname{ctg}(270^\circ + 45^\circ) = -\operatorname{tg} 45^\circ = -1;$

д) $\sin \frac{13\pi}{6} = \sin\left(2\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \sin \frac{\pi}{6} = 0,5;$ е) $\cos \frac{5\pi}{4} = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = -\cos \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2};$

ж) $\operatorname{tg} \frac{7\pi}{6} = \operatorname{tg}\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}};$ з) $\operatorname{ctg} \frac{5\pi}{3} = \operatorname{ctg}\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\operatorname{ctg} \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{\sqrt{3}};$

и) $\sin(-630^\circ) = -\sin 630^\circ = -\sin(720^\circ - 90^\circ) = 1;$

к) $\cos\left(-\frac{5\pi}{3}\right) = \cos \frac{5\pi}{3} = \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \cos \frac{\pi}{3} = 0,5;$

$$\text{л) } \operatorname{tg}\left(-\frac{11\pi}{6}\right) = -\operatorname{tg}\frac{11\pi}{6} = -\operatorname{tg}\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \operatorname{tg}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}};$$

$$\text{м) } \operatorname{ctg}(-945^\circ) = -\operatorname{ctg}945^\circ = -\operatorname{ctg}(1080^\circ - 135^\circ) = \operatorname{ctg}135^\circ = \operatorname{ctg}(90^\circ + 45^\circ) = -1.$$

$$\begin{aligned} \text{2. а) } & \cos(-225^\circ) + \sin 945^\circ - \operatorname{tg} 1125^\circ = \\ & = \cos(180^\circ + 45^\circ) + \sin(1080^\circ - 135^\circ) - \operatorname{tg}(1080^\circ + 45^\circ) = \\ & = -\cos 45^\circ - \sin 135^\circ - \operatorname{tg} 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 = -1 - \sqrt{2}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{б) } & \operatorname{ctg} 570^\circ + \sqrt{3} (\sin 300^\circ - \cos 3630^\circ) = \\ & = \operatorname{ctg}(360^\circ + 210^\circ) + \sqrt{3} (\sin(360^\circ - 60^\circ) - \cos(3600^\circ + 30^\circ)) = \\ & = \operatorname{ctg}(180^\circ + 30^\circ) + \sqrt{3} (-\sin 60^\circ - \cos 30^\circ) = \\ & = \operatorname{ctg} 30^\circ + \sqrt{3} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3} - \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{3} - 3; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{в) } & \cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) - 0,5 \sin \frac{11\pi}{6} - \operatorname{tg} \frac{21\pi}{4} = \\ & = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) - 0,5 \sin\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) - \operatorname{tg}\left(5\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \\ & = -\cos \frac{\pi}{3} + 0,5 \sin \frac{\pi}{6} - \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - 1 = -\frac{5}{4}. \end{aligned}$$

$$\text{3. а) } 1 + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cos(\pi - \alpha) = 1 + \cos \alpha \cdot (-\cos \alpha) = 1 - \cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha;$$

$$\text{б) } \sin(2\pi + \alpha) \sin(\pi - \alpha) + \sin^2 \alpha = \sin \alpha \cdot \sin \alpha + \sin^2 \alpha = 2\sin^2 \alpha;$$

$$\text{в) } \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = -\cos \alpha;$$

$$\text{г) } \cos(\alpha - \pi) = \cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha;$$

$$\text{д) } \operatorname{tg}(\alpha - \pi) = \operatorname{tg}(\pi - \alpha) = \operatorname{tg} \alpha;$$

$$\text{е) } \frac{2\operatorname{tg}(\pi - \alpha)}{\cos(\pi - \alpha) \sin(-2\alpha)} = \frac{-2\operatorname{tg} \alpha}{\cos \alpha \cdot \sin 2\alpha} = -2 \cdot \frac{\sin \alpha}{\cos^2 \alpha \cdot 2 \sin \alpha} = -\frac{1}{\cos^3 \alpha};$$

$$\text{ж) } \cos(\pi - \alpha) \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \sin^2(-\alpha) = -\cos \alpha \cos \alpha - \sin^2 \alpha = -1;$$

$$\text{з) } \sin^2\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \sin^2(\pi - \alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos 2\alpha.$$

$$\text{4. а) } \frac{\cos(2\pi - x) \cos^2(1,5\pi + x)}{\operatorname{tg}(x - \pi) \sin(0,5\pi + x)} = \frac{\cos x \cdot \sin^2 x}{\operatorname{tg} x \cdot \cos x} = \frac{\sin^2 x \cdot \cos x}{\sin x} = 0,5 \sin 2x,$$

ч.т.д.

$$\begin{aligned} \text{б)} \sin\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right) - \cos\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) &= \sin\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right)\right) - \cos\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) = \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) - \cos\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) = 0, \text{ ч.т.д.} \end{aligned}$$

$$\text{в)} \frac{\operatorname{tg}(2\pi - \alpha) \cos(\pi - \alpha)}{\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)} = -\frac{\operatorname{tg}\alpha \cdot \cos\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha \cdot \sin\alpha} = -\operatorname{tg}\alpha, \text{ ч.т.д.}$$

$$\text{5. а)} \frac{\operatorname{tg}(\alpha - \pi) \cos(\alpha + \pi)}{\operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) \operatorname{tg}\left(\alpha + \frac{3\pi}{2}\right)} = \frac{\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha} = \operatorname{tg}^4 \alpha;$$

$$\text{б)} \frac{\sin^2\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right) + \cos^2\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right)}{\operatorname{ctg}^2(\alpha - \pi) \cdot \operatorname{tg}^2(\alpha - 3\pi)} = \frac{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}{\operatorname{ctg}^2 \alpha \cdot \operatorname{tg}^2 \alpha} = 1.$$

$$\text{6. } A+B+C=180^\circ;$$

$$C=180^\circ-(A+B);$$

$$\sin C = \sin(180^\circ - (A+B)) = \sin(A+B), \text{ ч.т.д.}$$

$$\text{7. Пусть } \beta \text{ — смежный угол, тогда } \beta = 180^\circ - \alpha; \sin \beta = \sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha = 0,6; \cos \beta = \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha = \mp \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \mp 0,8.$$

C-47

$$\text{1. а)} \sin 48^\circ + \sin 36^\circ = 2 \sin \frac{48^\circ + 36^\circ}{2} \cos \frac{48^\circ - 36^\circ}{2} = 2 \sin 42^\circ \cos 6^\circ;$$

$$\text{б)} \sin 12^\circ + \sin 7^\circ = 2 \sin \frac{12^\circ + 7^\circ}{2} \cos \frac{12^\circ - 7^\circ}{2} = 2 \sin 9,5^\circ \cos 2,5^\circ;$$

$$\text{в)} \sin 10^\circ + \sin 88^\circ = 2 \sin \frac{10^\circ + 88^\circ}{2} \cos \frac{10^\circ - 88^\circ}{2} = 2 \sin 49^\circ \cos 39^\circ;$$

$$\text{г)} \sin \frac{3\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{4} = 2 \sin \frac{\frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{4}}{2} \cos \frac{\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4}}{2} = 2 \sin \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{4} = \sqrt{2};$$

$$\text{2) а)} \sin 66^\circ - \sin 56^\circ = 2 \sin \frac{66^\circ - 56^\circ}{2} \cos \frac{66^\circ + 56^\circ}{2} = 2 \sin 5^\circ \cos 61^\circ;$$

$$\text{б)} \sin 18^\circ - \sin 9^\circ = 2 \sin \frac{18^\circ - 9^\circ}{2} \cos \frac{18^\circ + 9^\circ}{2} = 2 \sin 4,5^\circ \cos 13,5^\circ;$$

$$\text{в)} \sin 14^\circ - \sin 36^\circ = 2 \sin \frac{14^\circ - 36^\circ}{2} \cos \frac{14^\circ + 36^\circ}{2} = -2 \sin 11^\circ \cos 25^\circ;$$

$$\text{r) } \sin \frac{2\pi}{5} - \sin \frac{\pi}{5} = 2 \sin \frac{2\frac{\pi}{5} - \frac{\pi}{5}}{2} \cos \frac{2\frac{\pi}{5} + \frac{\pi}{5}}{2} = 2 \sin \frac{\pi}{10} \cos \frac{3\pi}{10};$$

$$\text{3) a) } \cos 38^\circ + \cos 18^\circ = 2 \cos \frac{38^\circ + 18^\circ}{2} \cos \frac{38^\circ - 18^\circ}{2} = 2 \cos 28^\circ \cos 10^\circ;$$

$$\text{б) } \cos 16^\circ + \cos 9^\circ = 2 \cos \frac{16^\circ + 9^\circ}{2} \cos \frac{16^\circ - 9^\circ}{2} = 2 \cos 12,5^\circ \cos 3,5^\circ;$$

$$\text{в) } \cos 34^\circ + \cos 74^\circ = 2 \cos \frac{34^\circ + 74^\circ}{2} \cos \frac{34^\circ - 74^\circ}{2} = 2 \cos 54^\circ \cos 20^\circ;$$

$$\text{r) } \cos \frac{3\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{8} = 2 \cos \frac{\frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{8}}{2} \cos \frac{\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{8}}{2} = 2 \cos \frac{7\pi}{16} \cos \frac{5\pi}{16};$$

$$\text{4) a) } \cos 44^\circ - \cos 38^\circ = -2 \sin \frac{44^\circ + 38^\circ}{2} \sin \frac{44^\circ - 38^\circ}{2} = -2 \sin 41^\circ \sin 3^\circ;$$

$$\text{б) } \cos 4^\circ - \cos 16^\circ = -2 \sin \frac{4^\circ + 16^\circ}{2} \sin \frac{4^\circ - 16^\circ}{2} = -2 \sin 10^\circ \sin 6^\circ;$$

$$\text{в) } \cos 15^\circ - \cos 8^\circ = -2 \sin \frac{15^\circ + 8^\circ}{2} \sin \frac{15^\circ - 8^\circ}{2} = -2 \sin 11,5^\circ \sin 3,5^\circ;$$

$$\text{r) } \cos \frac{\pi}{6} - \cos \frac{\pi}{3} = -2 \sin \frac{\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}}{2} \sin \frac{\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3}}{2} = 2 \sin \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{12};$$

$$\text{2. 1) a) } \sin 9\alpha + \sin \alpha = 2 \sin 5\alpha \cos 4\alpha; \text{ б) } \sin 6\alpha - \sin 2\alpha = 2 \sin 2\alpha \cos 4\alpha;$$

$$\text{в) } \cos 5\alpha + \cos 9\alpha = 2 \cos 7\alpha \cos 2\alpha; \text{ r) } \cos 6\alpha - \cos \alpha = -2 \sin \frac{5\alpha}{2} \sin \frac{7\alpha}{2};$$

$$\text{2) a) } \sin(\alpha + 12^\circ) + \sin(\alpha - 12^\circ) = 2 \sin \frac{2\alpha}{2} \cos \frac{24^\circ}{2} = 2 \sin \alpha \cos 12^\circ;$$

$$\text{б) } \sin(20^\circ - \alpha) - \sin(20^\circ + \alpha) = \\ = 2 \sin \frac{20^\circ - \alpha - 20^\circ - \alpha}{2} \cos \frac{20^\circ - \alpha + 20^\circ + \alpha}{2} = -2 \sin \alpha \cos 20^\circ;$$

$$\text{в) } \cos(23^\circ + \beta) + \cos(23^\circ - \beta) = \\ = 2 \cos \frac{23^\circ + \beta + 23^\circ - \beta}{2} \cos \frac{23^\circ + \beta - 23^\circ + \beta}{2} = 2 \cos 23^\circ \cos \beta;$$

$$\text{r) } \cos(23^\circ + \beta) - \cos(23^\circ - \beta) = \\ = -2 \sin \frac{23^\circ + \beta - 23^\circ + \beta}{2} \sin \frac{23^\circ + \beta + 23^\circ - \beta}{2} = -2 \sin \beta \cdot \sin 23^\circ;$$

$$\text{д) } \sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin \frac{\alpha + \beta - \alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta + \alpha - \beta}{2} = 2 \sin \beta \cos \alpha;$$

$$\text{e) } \cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)=-2\cos\frac{\alpha+\beta+\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta-\alpha+\beta}{2}=2\cos\alpha\cdot\cos\beta.$$

$$3. \text{ a) } \frac{\sin 8\alpha + \sin 2\alpha}{\cos 8\alpha + \cos 2\alpha} = \frac{2\sin 5\alpha \cos 3\alpha}{2\cos 5\alpha \cos 3\alpha} = \text{tg}5\alpha;$$

$$\text{б) } \frac{\cos \alpha + \cos 7\alpha}{\cos 6\alpha + \cos 2\alpha} = \frac{2\cos 4\alpha \cos 3\alpha}{2\cos 4\alpha \cos 2\alpha} = \frac{\cos 3\alpha}{\cos 2\alpha};$$

$$\text{в) } \frac{\sin 5\alpha - \sin \alpha}{\cos 5\alpha - \cos \alpha} = \frac{2\sin 2\alpha \cos 3\alpha}{-2\sin 2\alpha \sin 3\alpha} = -\text{ctg}3\alpha;$$

$$\text{г) } \frac{\cos 9\alpha - \cos 5\alpha}{\sin 9\alpha + \sin 5\alpha} = \frac{-2\sin 2\alpha \sin 7\alpha}{2\sin 7\alpha \cos 2\alpha} = -\text{tg}2\alpha.$$

$$4. \text{ а) } \sin^2 42^\circ - \sin^2 12^\circ = (\sin 42^\circ - \sin 12^\circ)(\sin 42^\circ + \sin 12^\circ) =$$

$$= 2\sin 15^\circ \cos 27^\circ \cdot 2\sin 27^\circ \cos 15^\circ = \sin 30^\circ \cdot \sin 54^\circ;$$

$$\text{б) } \cos^2 53^\circ - \cos^2 33^\circ = (\cos 53^\circ - \cos 33^\circ)(\cos 53^\circ + \cos 33^\circ) =$$

$$= -2\sin 10^\circ \sin 43^\circ \cdot 2\cos 10^\circ \cos 43^\circ = -\sin 20^\circ \cdot \sin 86^\circ.$$

$$5. \text{ а) } \frac{\sin 44^\circ + \sin 26^\circ}{\cos 44^\circ + \cos 26^\circ} = \frac{2\sin 35^\circ \cos 9^\circ}{2\cos 35^\circ \cos 9^\circ} = \text{tg}35^\circ = \text{ctg}55^\circ, \text{ т.е. равенство верно.}$$

$$\text{б) } \frac{\sin 84^\circ - \sin 54^\circ}{\cos 84^\circ + \cos 54^\circ} = \frac{2\sin 15^\circ \cos \frac{84^\circ + 54^\circ}{2}}{2\cos 15^\circ \cos \frac{84^\circ + 54^\circ}{2}} = \text{tg}15^\circ = \text{ctg}75^\circ, \text{ т.е. равенство верно.}$$

$$6. \text{ а) } \frac{\cos 5\alpha + \cos 9\alpha}{\sin 5\alpha + \sin 9\alpha} = \frac{2\cos 7\alpha \cdot \cos 2\alpha}{2\sin 7\alpha \cdot \cos 2\alpha} = \text{ctg}7\alpha = \text{tg}\left(\frac{\pi}{2} - 7\alpha\right), \text{ ч.т.д.}$$

$$\text{б) } \frac{\cos \alpha + \cos 5\alpha + \cos 9\alpha + \cos 13\alpha}{\sin \alpha + \sin 5\alpha + \sin 9\alpha + \sin 13\alpha} = \frac{2\cos 3\alpha \cos 2\alpha + 2\cos 2\alpha \cos 11\alpha}{2\sin 3\alpha \cos 2\alpha + 2\sin 11\alpha \cos 2\alpha} =$$

$$= \frac{\cos 3\alpha + \cos 11\alpha}{\sin 3\alpha + \sin 11\alpha} = \frac{2\cos 4\alpha \cos 7\alpha}{2\sin 7\alpha \cos 4\alpha} = \text{ctg}7\alpha, \text{ ч.т.д.}$$

$$\text{в) } \text{ctg}(45^\circ + \alpha) = \frac{\text{ctg}45^\circ \text{ctg}\alpha - 1}{\text{ctg}45^\circ + \text{ctg}\alpha} = \frac{\text{ctg}\alpha - 1}{\text{ctg}\alpha + 1} = \frac{\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - 1}{\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + 1} =$$

$$= \frac{\cos \alpha - \sin \alpha}{\cos \alpha + \sin \alpha}, \text{ ч.т.д.}$$

$$\text{д) } \sin^2(\alpha+\beta) - \sin^2(\alpha-\beta) = (\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta))(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)) =$$

$$= 2\sin\beta \cdot \cos\alpha \cdot 2\sin\alpha \cdot \cos\beta = \sin 2\alpha \cdot \sin 2\beta, \text{ ч.т.д.}$$

C-48.

$$1. \text{ а) } \alpha=45^\circ, \alpha=60^\circ, \alpha=30^\circ; \text{ б) } \alpha=30^\circ, \alpha=45^\circ, \alpha=60^\circ.$$

$$2. \cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}; \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{12}\right) = \cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}; 2\pi - \frac{\pi}{12} = \frac{23\pi}{12}.$$

$$3. a_n = \pi(n-1), b_n = -\pi n; \sin a_n = \sin(\pi n - \pi) = -\sin(\pi - \pi n) = -\sin \pi n = 0;$$

$\sin b_n = \sin(-\pi n) = -\sin \pi n = 0$, значит, любое число, являющееся членом (a_n) или (b_n) — корень данного уравнения, ч.т.д.

4. 1) **а)** $\cos x = 0$, $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; **б)** $\sin x = 1$, $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; **в)** $\operatorname{tg} x = 1$,

$x = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; **2) а)** $\cos x - 1 = 0$, $\cos x = 1$, $x = 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; **б)** $\sin x + 1 = 0$,

$\sin x = -1$, $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; **в)** $3 \operatorname{tg} x = 0$, $\operatorname{tg} x = 0$, $x = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

5. Т.к. φ — угол четырехугольника, то $0 < \varphi < \pi$; **а)** $\cos \varphi = \frac{1}{2}$, $\varphi = \frac{\pi}{3}$;

б) $\sin \varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\varphi_1 = \frac{\pi}{4}$, $\varphi_2 = \frac{3\pi}{4}$.

6. 1) **а)** $\sin 2x = 0$ $2x = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; $x = \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$;

б) $\cos 3x = 1$ $3x = 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; $x = \frac{2\pi n}{3}$, $n \in \mathbb{Z}$;

2) а) $\cos^2 x - \cos x = 0$, $\cos x(\cos x - 1) = 0$; $\cos x = 0$, $\cos x = 1$;

$x_1 = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; $x_2 = 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$;

б) $\sin^2 x + \sin x = 0$, $\sin x(\sin x + 1) = 0$, $\sin x = 0$, $\sin x = -1$,

$x_1 = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, $x_2 = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$;

3) а) $\cos x \cos 2x - \sin x \sin 2x = 0$, $\cos(x + 2x) = 0$, $\cos 3x = 0$,

$3x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}$, $n \in \mathbb{Z}$;

б) $\sin 2x \cos x + \cos 2x \sin x = 0$, $\sin(2x + x) = 0$, $\sin 3x = 0$, $3x = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$;

$x = \frac{\pi n}{3}$, $n \in \mathbb{Z}$;

4) а) $\sin^2 x = -\cos 2x$, $\sin^2 x = 2\sin^2 x - 1$, $\sin^2 x = 1$, $\sin x = \pm 1$, $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$;

б) $\sin 2x = 2\cos x$, $2\sin x \cdot \cos x = 2\cos x$, $\cos x = 0$, $\sin x = 1$, $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

7. а) $\sin x \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 1$, $2\sin x \cdot \cos x = 2$, $\sin 2x = 2$ — нет корней, т.к.

$-1 \leq \sin \alpha \leq 1$ для любого α ;

Б) $\frac{\cos 2x}{1-2\sin^2 x} = 0, \frac{1-2\sin^2 x}{1-2\sin^2 x} = 0, 1=0$ — **НЕТ КОРНЕЙ.**

КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ

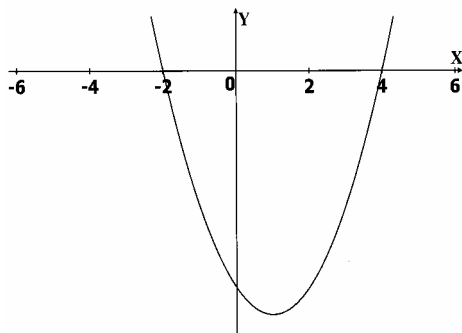
К-1. Вариант 1.

1. а) $x^2-14x+45=0; D=196-4\cdot 45=16; x_1=\frac{14+4}{2}=9; x_2=5;$

$x^2-14x+45=(x-9)(x-5);$ б) $3y^2+7y-6=0; D=49+4\cdot 3\cdot 6=121; y_1=\frac{-7+11}{6}=\frac{2}{3};$

$y_2=-3; 3y^2+7y-6=3(y+3)(y-\frac{2}{3})=(y+3)(3y-2).$

2.



$y=x^2-2x-8=x^2-2x+1-9=(x-1)^2-9;$

а) $y(-1,5)=-2,75;$ б) $(x-1)^2-9=3; (x-1)^2=12; x-1=\pm 2\sqrt{3}; x=1\pm 2\sqrt{3};$

в) $(x-1)^2-9=0; (x-1)^2=9; x-1=3; x_1=4; x-1=-3; x_2=-2;$

$y > 0$ при $x \in (-\infty; -2) \cup (4; +\infty); y < 0$ при $x \in (-2; 4);$

г) функция возрастает при $x \in [1; +\infty).$

3. $\frac{3p^2+p-2}{4-9p^2} = \frac{3\left(p-\frac{2}{3}\right)(p+1)}{(2-3p)(2+3p)} = -\frac{(3p-2)(p+1)}{(3p-2)(2+3p)} = -\frac{p+1}{3p+2};$

$3p^2+p-2=0; D=1+4\cdot 3\cdot 2=25; p_1=\frac{-1+5}{6}=\frac{2}{3}; p_2=-1.$

4. $x^2-6x+11=y(x); m=-\frac{b}{2a}=\frac{6}{2}=3, n=y(3)=3^2-6\cdot 3+11=2.$

5. $\frac{1}{3}x^2=6x-15, \frac{1}{3}x^2-6x+15=0, x^2-18x+45=0; D=324-4\cdot 45=144;$

$$x_1 = \frac{18+12}{2} = 15; \quad x_2 = 3; \quad y_1 = \frac{1}{3} \cdot 15^2 = 75; \quad y_2 = \frac{1}{3} \cdot 3^2 = 3.$$

Ответ: пересекаются в 2-х точках (15; 75) и (3; 3).

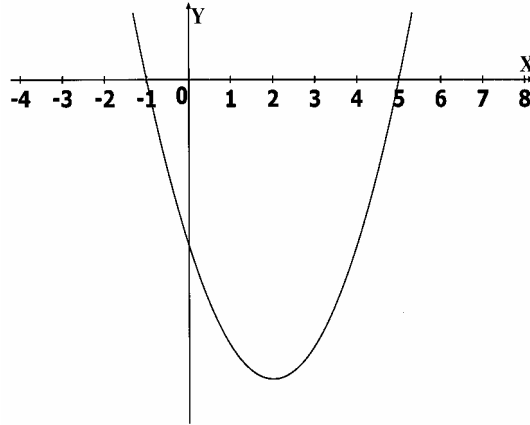
Вариант 2.

1. а) $x^2 - 10x + 21 = 0; D = 100 - 4 \cdot 21 = 16; x_1 = \frac{10+4}{2} = 7; x_2 = 3;$

$x^2 - 10x + 21 = (x-3)(x-7);$ б) $5y^2 + 9y - 2 = 0; D = 81 + 4 \cdot 5 \cdot 2 = 121; y_1 = \frac{-9+11}{10} = \frac{1}{5};$

$y_2 = -2; 5y^2 + 9y - 2 = 5(y - \frac{1}{5})(y+2) = (5y-1)(y+2).$

2.



$$y = x^2 - 4x - 5 = x^2 - 4x + 4 - 9 = (x-2)^2 - 9;$$

а) $y(0,5) = -6,75;$ б) $(x-2)^2 - 9 = 3; (x-2)^2 = 12; x-2 = \pm 2\sqrt{3}; x = 2 \pm 2\sqrt{3};$

в) $(x-2)^2 - 9 = 0; x-2 = 3, x_1 = 5; x-2 = -3, x_2 = -1;$

$y > 0$ при $x \in (-\infty; -1) \cup (5; +\infty); y < 0$ при $x \in (-1; 5);$

г) функция убывает при $x \in (-\infty; 2].$

$$3. \frac{4c^2 + 7c - 2}{1 - 16c^2} = \frac{4\left(c - \frac{1}{4}\right)(c+2)}{(1-4c)(1+4c)} = -\frac{(4c-1)(c+2)}{(4c-1)(4c+1)} = -\frac{c+2}{4c+1};$$

$$4c^2 + 7c - 2 = 0; D = 49 + 4 \cdot 4 \cdot 2 = 81; c_1 = \frac{-7+9}{8} = \frac{1}{4}, c_2 = -2.$$

4. $y(x) = -x^2 + 4x + 3; m = -\frac{b}{2a} = \frac{4}{2} = 2, \quad n = f(2) = -4 + 4 \cdot 2 + 3 = 7.$

5. $\frac{1}{2}x^2=12-x$, $\frac{1}{2}x^2-12+x=0$, $x^2+2x-24=0$; $D=4+4\cdot24=100$;
 $x_1=\frac{-2+10}{2}=4$; $x_2=-6$; $y_1=\frac{1}{2}\cdot4^2=8$; $y_2=\frac{1}{2}\cdot36=18$.
 Ответ: пересекаются в 2-х точках (4; 8) и (-6; 18).

Вариант 3.

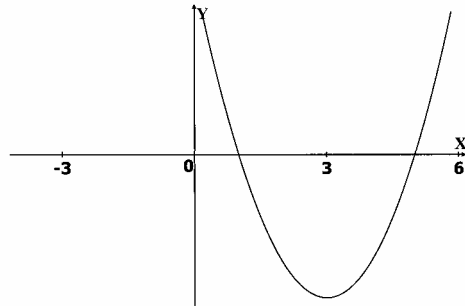
1. а) $x^2-12x+35=0$; $D=144-4\cdot35=4$; $x_1=\frac{12+2}{2}=7$, $x_2=5$;

$x^2-12x+35=(x-5)(x-7)$;

б) $7y^2+19y-6=0$; $D=361+4\cdot7\cdot6=529$; $y_1=\frac{-19+23}{14}=\frac{2}{7}$, $y_2=-3$;

$7y^2+19y-6=7(y-\frac{2}{7})(y+3)=(7y-2)(y+3)$.

2.



$y=x^2-6x+5=x^2-6x+9-4=(x-3)^2-4$;

а) $y(0,5)=2,25$; б) $(x-3)^2-4=-1$; $(x-3)^2=3$; $x=3\pm\sqrt{3}$; в) $(x-3)^2-4=0$; $x-3=2$,
 $x_1=5$; $x-3=-2$, $x_2=1$; $y > 0$ при $x \in (-\infty; 1) \cup (5; +\infty)$; $y < 0$ при $x \in (1; 5)$;
 г) функция возрастает при $x \in [3; +\infty)$.

3. $\frac{5a^2+19a-4}{1-25a^2} = \frac{5\left(a-\frac{1}{5}\right)(a+4)}{(1-5a)(1+5a)} = -\frac{(5a-1)(a+4)}{(5a-1)(5a+1)} = -\frac{a+4}{5a+1}$;

$5a^2+19a-4=0$; $D=361+4\cdot5\cdot4=441$; $a_1=\frac{-19+21}{10}=\frac{1}{5}$, $a_2=-4$.

4. $y(x)=x^2-8x+7$; $m=-\frac{b}{2a}=\frac{8}{2}=4$, $n=f(4)=16-32+7=-9$.

5. $\frac{1}{4}x^2=5x-16$, $\frac{1}{4}x^2-5x+16=0$, $x^2-20x+64=0$; $D=400-4\cdot64=144$;

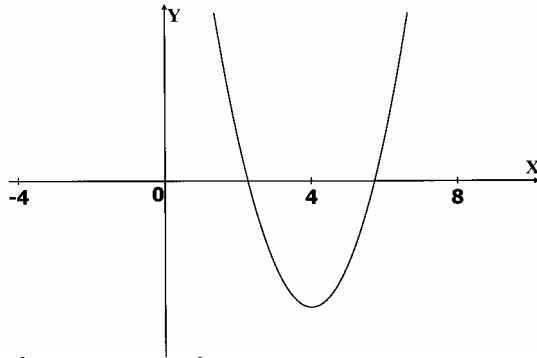
$$x_1 = \frac{20+12}{2} = 16; \quad x_2 = 4; \quad y_1 = \frac{1}{4} \cdot 16^2 = 64; \quad y_2 = \frac{1}{4} \cdot 4^2 = 4.$$

Ответ: пересекаются в 2-х точках (16; 64) и (4; 4).

Вариант 4.

1. а) $x^2 - 18x + 45 = 0; D = 324 - 4 \cdot 45 = 144; x_1 = \frac{18+12}{2} = 15, \quad x_2 = 3;$
 $x^2 - 18x + 45 = (x-15)(x-3);$ б) $9x^2 + 25x - 6 = 0; D = 625 + 4 \cdot 9 \cdot 6 = 841;$
 $x_1 = \frac{-25+29}{18} = \frac{2}{9}, \quad x_2 = -3; 9x^2 + 25x - 6 = 9(x - \frac{2}{9})(x+3) = (9x-2)(x+3).$

2.



$$y = x^2 - 8x + 13 = x^2 - 8x + 16 - 3 = (x-4)^2 - 3;$$

а) $y(1,5) = 3,25;$ б) $(x-4)^2 - 3 = 2; (x-4)^2 = 5; x = 4 \pm \sqrt{5};$ в) $(x-4)^2 - 3 = 0;$
 $(x-4)^2 = 3; x-4 = \pm \sqrt{3}; x_{2,1} = 4 \pm \sqrt{3}; y > 0$ при $x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty); y < 0$
при $x \in (x_1; x_2);$ г) функция возрастает при $x \in [4; +\infty).$

$$3. \frac{7b^2 + 11b - 6}{9 - 49b^2} = \frac{7\left(b - \frac{3}{7}\right)(b+2)}{(3-7b)(3+7b)} = -\frac{(7b-3)(b+2)}{(7b-3)(3+7b)} = -\frac{b+2}{7b+3};$$

$$7b^2 + 11b - 6 = 0; D = 121 + 4 \cdot 7 \cdot 6 = 289; b_1 = \frac{-11+17}{14} = \frac{3}{7}, \quad b_2 = -2.$$

$$4. y(x) = -x^2 + 6x - 4; m = -\frac{b}{2a} = \frac{6}{2} = 3, \quad n = f(3) = -9 + 18 - 4 = 5.$$

$$5. \frac{1}{5}x^2 = 20 - 3x, \quad \frac{1}{5}x^2 + 3x - 20 = 0, \quad x^2 + 15x - 100 = 0; D = 225 + 4 \cdot 100 = 625;$$

$$x_1 = \frac{-15+25}{2} = 5; \quad x_2 = -20; \quad y_1 = \frac{1}{5} \cdot 5^2 = 5; \quad y_2 = \frac{1}{5} \cdot 20^2 = 80.$$

Ответ: пересекаются в 2-х точках (5; 5) и (-20; 80).

К-1А. Вариант 1.

1. а) $2 \cdot 2^{-3} = 2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$; б) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-2} \cdot 4 = 4^2 \cdot 4 = 4^3 = 64$;
в) $\frac{(3^{-2})^3 \cdot 27^2}{3} = \frac{3^{-6} \cdot (3^3)^2}{3} = \frac{3^{-6} \cdot 3^6}{3} = \frac{1}{3}$.
2. а) $5\sqrt[4]{16} - 0,2\sqrt[3]{-0,027} + \sqrt[5]{1} = 5 \cdot 2 - 0,2 \cdot (-0,3) + 1 = 10 + 0,06 + 1 = 11,06$;
б) $\sqrt[5]{32 \cdot 0,00001} = 2 \cdot 0,1 = 0,2$; в) $\frac{\sqrt[4]{243}}{\sqrt[4]{3}} = \sqrt[4]{\frac{243}{3}} = \sqrt[4]{81} = 3$;
г) $\left(\sqrt[3]{5}\right)^{-12} = 5^{-\frac{12}{3}} = 5^{-4} = \frac{1}{5^4} = \frac{1}{625}$.
3. а) $x^4 = 80$; $x_{1,2} = \pm 2\sqrt[4]{5}$, по всей видимости в задании опечатка и ее следует читать как: $x^4 = 81$; $x_{1,2} = \pm 3$; б) $x^6 = -18$; нет корней, т.к. $E(x^6) = [0; +\infty)$; в) $2x^3 - 128 = 0$; $x^3 = 64$; $x = 4$; г) $x^5 + 32 = 0$; $x^5 = -32$; $x = -2$.
4. $2\sqrt[3]{\sqrt{a}} - \sqrt[6]{ab} : \sqrt[6]{b} = 2\sqrt[6]{a} - \sqrt[6]{a} = \sqrt[6]{a}$.
5. $\sqrt[4]{3 + \sqrt{5}} \cdot \sqrt[4]{3 \cdot \sqrt{5}} = \sqrt[4]{(3 + \sqrt{5})(3 - \sqrt{5})} = \sqrt[4]{9 - 5} = \sqrt[4]{4} = \sqrt{2}$.

Вариант 2.

1. а) $5 \cdot 5^{-2} = 5^{-1} = \frac{1}{5}$; б) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} \cdot 4 = 2^3 \cdot 2^2 = 2^5 = 32$;
в) $\frac{(2^{-2})^4 \cdot 16^2}{2^3} = \frac{2^{-8} \cdot (2^4)^2}{2^3} = \frac{2^{-8} \cdot 2^8}{2^3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$.
2. а) $3\sqrt[3]{-27} + 0,1\sqrt[4]{81} - \sqrt{1} = 3 \cdot (-3) + 0,1 \cdot 3 - 1 = -9 + 0,3 - 1 = -9,7$;
б) $\sqrt[4]{16 \cdot 0,0001} = 2 \cdot 0,1 = 0,2$; в) $\frac{\sqrt[4]{243}}{\sqrt[4]{4}} = \sqrt[4]{\frac{243}{4}} = \sqrt[4]{81} = 3$;
г) $\left(\sqrt[3]{5}\right)^{-8} = 5^{-\frac{8}{3}} = 5^{-4} = \frac{1}{5^4} = \frac{1}{625}$.

3. $x^4 = 20$; $x_{1,2} = \pm\sqrt[4]{20}$; б) $x^8 = -36$; нет корней, т.к. $E(x^8) = [0; +\infty)$;

в) $64x^3 = 1$; $x^3 = \frac{1}{64}$; $x = \frac{1}{4}$; г) $x^3 + 8 = 0$; $x^3 = -8$; $x = -2$.

4. $\sqrt[4]{ab} \cdot \sqrt[4]{b} + 2\sqrt{\sqrt{a}} = \sqrt[4]{a} + 2\sqrt[4]{a} = 3\sqrt[4]{a}$.

5. $\sqrt[3]{2-\sqrt{3}} \cdot \sqrt[3]{2+\sqrt{3}} = \sqrt[3]{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})} = \sqrt[3]{2-3} = \sqrt[3]{-1} = -1$.

Вариант 3.

1. а) $5 \cdot 5^{-5} = 5^{-4} = \frac{1}{5^4} = \frac{1}{625}$; б) $3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = 3 \cdot 3^2 = 3^3 = 27$;

в) $\frac{4^{-3} \cdot 2^6}{8} = \frac{(2^2)^{-3} \cdot 2^6}{2^3} = \frac{2^{-6} \cdot 2^6}{2^3} = \frac{1}{8}$.

2. а) $0,2\sqrt[5]{-32} + \sqrt[4]{81} - \sqrt[6]{1} = 0,2 \cdot (-2) + 3 - 1 = -0,4 + 2 = 1,6$;

б) $\sqrt[3]{0,001 \cdot 64} = 0,1 \cdot 4 = 0,4$; в) $\frac{\sqrt{216}}{\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{216}{6}} = \sqrt{36} = 6$;

г) $(\sqrt[4]{3})^{-12} = 3^{-\frac{12}{4}} = 3^{-3} = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27}$.

3. а) $x^6 = 64$, $x_{1,2} = \pm 2$; б) $x^4 = -20$; нет корней, т.к. $E(x^4) = [0; +\infty)$;

в) $8x^3 = 1$, $x^3 = \frac{1}{8}$, $x = 0,5$; г) $27 + x^3 = 0$; $x^3 = -27$ $x = -3$.

4. $3\sqrt[4]{\sqrt{a}} + \sqrt[8]{ab} \cdot \sqrt[8]{b} = 3\sqrt[8]{a} + \sqrt[8]{a} = 4\sqrt[8]{a}$.

5. $\sqrt[5]{2-\sqrt{5}} \cdot \sqrt[5]{2+\sqrt{5}} = \sqrt[5]{(2-\sqrt{5})(2+\sqrt{5})} = \sqrt[5]{4-5} = \sqrt[5]{-1} = -1$.

Вариант 4.

1. а) $3^{-5} \cdot 3 = 3^{-4} = \frac{1}{3^4} = \frac{1}{81}$; б) $\left(\frac{1}{5}\right)^{-2} \cdot 5 = 5^2 \cdot 5 = 5^3 = 625$;

в) $\frac{(7^{-3})^2 \cdot 49^3}{7} = \frac{7^{-6} \cdot (7^2)^3}{7} = \frac{7^{-6} \cdot 7^6}{7} = \frac{1}{7}$.

2. а) $\frac{1}{8}\sqrt[6]{64} - 2\sqrt[3]{-125} + \sqrt{1} = \frac{1}{8} \cdot 2 + 2 \cdot 5 + 1 = \frac{1}{4} + 11 = 11,25$;

б) $\sqrt{121 \cdot 0,01} = 11 \cdot 0,1 = 1,1$; в) $\frac{\sqrt{343}}{\sqrt{7}} = \sqrt{\frac{343}{7}} = \sqrt{49} = 7$;

$$r) (\sqrt[5]{3})^{-10} = 3^{-\frac{10}{5}} = 3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}.$$

$$3. a) x^2=13, x_{1,2}=\pm\sqrt{13}; б) 32x^5=1; x^5=\frac{1}{32}, x=0,5; в) x^6=-16;$$

нет корней, т.к. $E(x^6)=[0;+\infty)$; г) $-8-x^3=0; x^3=-8, x=-2.$

$$4. \sqrt[10]{bc} : \sqrt[10]{c} + \sqrt[5]{\sqrt{b}} = \sqrt[10]{b} + \sqrt[10]{b} = 2 \sqrt[10]{b}.$$

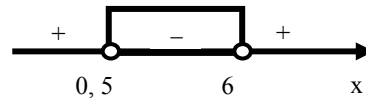
$$5. \sqrt[3]{9-\sqrt{17}} \cdot \sqrt[3]{9+\sqrt{17}} = \sqrt[3]{(9-\sqrt{17})(9+\sqrt{17})} = \sqrt[3]{81-17} = \sqrt[3]{64} = 4.$$

К-2. Вариант 1.

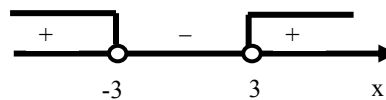
$$1. a) 2x^2-13x+6 > 0; 2x^2-13x+6=0; D=169-4\cdot 2\cdot 6=121;$$

$$x_1 = \frac{13+11}{4} = 6; x_2 = \frac{1}{2}.$$

Ответ: (0,5; 6).



$$б) x^2-9 > 0; (x-3)(x+3) > 0.$$

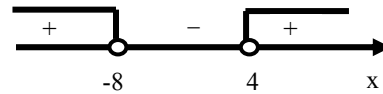


Ответ: $(-\infty; -3) \cup (3; +\infty).$

$$в) 3x^2-6x+32 > 0; 3x^2-6x+32=0; D=36-4\cdot 3\cdot 32 < 0;$$

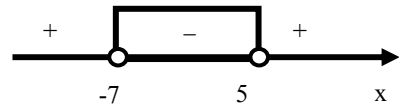
т.к. $a=3 > 0$, то x -любое. Ответ: $(-\infty; +\infty).$

$$2. a) (x+8)(x-4) > 0.$$



Ответ: $(-\infty; -8) \cup (4; +\infty).$

$$б) \frac{x-5}{x+7} < 0.$$



Ответ: $(-7; 5).$

$$3. a) x^3-81x=0; x(x^2-81)=0; x(x-9)(x+9)=0; x_1=0, x_{2,3}=\pm 9;$$

$$б) \frac{x^2-1}{2} - \frac{3x-1}{4} = 2; 2x^2-2-3x+1-8=0; 2x^2-3x-9=0;$$

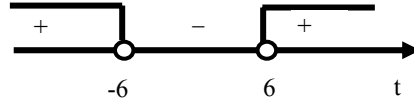
$$D=9+4\cdot 2\cdot 9=81; x_1 = \frac{3+9}{4} = 3, x_2 = -1,5.$$

$$4. x^4-19x^2+48=0; x^2=y \geq 0, \text{ тогда } y^2-19y+48=0; D=361-4\cdot 48=169;$$

$$y_1 = \frac{19+13}{2} = 16, y_2 = 3; x^2=16, x_{1,2}=\pm 4; x^2=3, x_{3,4}=\pm \sqrt{3}.$$

$$5. 3x^2+tx+3=0; D=t^2-4\cdot 3\cdot 3=t^2-36.$$

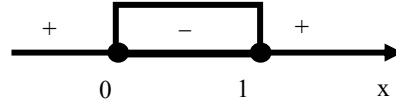
Т.к. уравнение имеет 2 корня, то $D > 0$; $t^2 - 36 > 0$, $(t-6)(t+6) > 0$.



Ответ: $(-\infty; -6) \cup (6; +\infty)$.

6. $y = \sqrt{x - x^2}$;

Т.к. $D(\sqrt{x}) = [0; +\infty)$, то $x - x^2 \geq 0$, $x^2 - x \leq 0$, $x(x-1) \leq 0$.

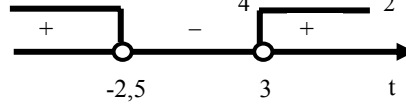


Ответ: $[0; 1]$.

Вариант 2.

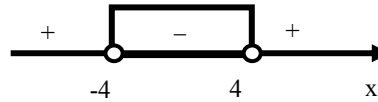
1. а) $2x^2-x-15 > 0$; $2x^2-x-15=0$; $D=1+4\cdot 2\cdot 15=121$; $x_1=\frac{1+11}{4}=3$, $x_2=-\frac{5}{2}$.

Ответ: $(-\infty; -2,5) \cup (3; +\infty)$.



б) $x^2-16 < 0$; $(x-4)(x+4) < 0$.

Ответ: $(-4; 4)$.

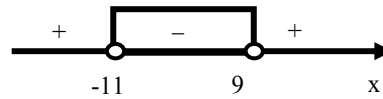


в) $x^2+12x+80 < 0$; $D=144-4\cdot 80 < 0$; т.к. $a=1 > 0$, то нет решений.

Ответ: нет решений.

2. а) $(x+11)(x-9) < 0$.

Ответ: $(-11; 9)$.



б) $\frac{x+3}{x-8} > 0$.

Ответ: $(-\infty; -3) \cup (8; +\infty)$.

3. а) $x^3-25x=0$; $x(x^2-25)=0$; $x(x-5)(x+5)=0$; $x_1=0$, $x_{2,3}=\pm 5$;

б) $\frac{x^2+6}{5} - \frac{8-x}{10} = 1$; $2x^2+12-8+x-10=0$; $2x^2+x-6=0$;

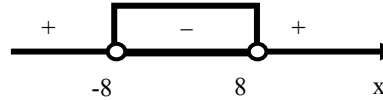
$D=1+4\cdot 2\cdot 6=49$; $x_1=\frac{-1+7}{4}=1,5$; $x_2=-2$.

4. $x^4-4x^2-45=0$; $x^2=y \geq 0$, тогда, $y^2-4y-45=0$; $D=16+4\cdot 45=196$;

$y_1=\frac{4+14}{2}=9$, $y_2 < 0$; $x^2=9$, $x_{1,2}=\pm 3$.

5. $2x^2+tx+8=0$; $D=t^2-4\cdot 2\cdot 8=t^2-64$.

Т.к. уравнение не имеет корней, то $D < 0$; $t^2-64 < 0$, $(t-8)(t+8) < 0$.

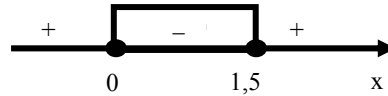


Ответ: $(-8; 8)$.

6. $y=\sqrt{3x-2x^2}$; Т.к. $D(\sqrt{x})=[0; +\infty)$, то

$3x-2x^2 \geq 0$; $2x^2-3x \leq 0$; $x^2-1,5x \leq 0$; $x(x-1,5) \leq 0$.

Ответ: $[0; 1,5]$.

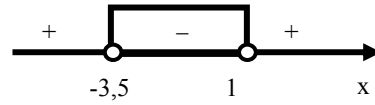


Вариант 3.

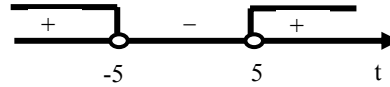
1.

а) $2x^2+5x-7 < 0$ $2x^2+5x-7=0$; $D=25+4\cdot 2\cdot 7=81$; $x_1=\frac{-5+9}{4}=1$, $x_2=-\frac{7}{2}$.

Ответ: $(-3,5; 1)$.



б) $x^2-25 > 0$; $(x-5)(x+5) > 0$.



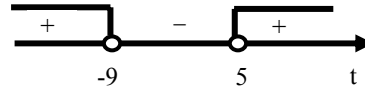
Ответ: $(-\infty; -5) \cup (5; +\infty)$.

в) $5x^2-4x+21 > 0$; $5x^2-4x+21=0$; $D=16-4\cdot 5\cdot 21 < 0$;

т.к. $a=5 > 0$, то x -любое.

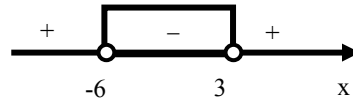
Ответ: $(-\infty; +\infty)$.

2. а) $(x+9)(x-5) > 0$.



Ответ: $(-\infty; -9) \cup (5; +\infty)$.

б) $\frac{x-3}{x+6} < 0$.



Ответ: $(-6; 3)$.

3. а) $x^3-36x=0$; $x(x^2-36)=0$; $x(x-6)(x+6)=0$; $x_1=0$, $x_{2,3}=\pm 6$;

б) $\frac{x^2-4}{3} - \frac{5x-2}{6} = 1$; $2x^2-8-5x+2-6=0$; $2x^2-5x-12=0$;

$D=25+4\cdot 2\cdot 12=121$; $x_1=\frac{5+11}{4}=4$, $x_2=-1,5$.

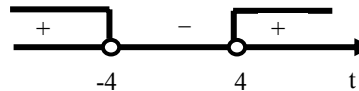
4. $x^4-13x^2+36=0$; $x^2=y \geq 0$, тогда, $y^2-13y+36=0$; $D=169-4\cdot 36=25$;

$y_1=\frac{13+5}{2}=9$, $y_2=4$; $x^2=9$, $x_{1,2}=\pm 3$; $x^2=4$, $x_{3,4}=\pm 2$.

5. $2x^2+tx+2=0$; $D=t^2-2\cdot 4\cdot 2=t^2-16$.

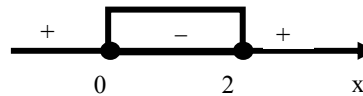
т.к. уравнение имеет 2 корня, то $D > 0$; $t^2-16 > 0$; $(t-4)(t+4) > 0$.

Ответ: $(-\infty; -4) \cup (4; +\infty)$.



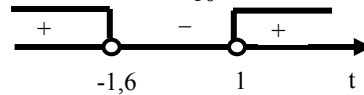
6. $y=\sqrt{2x-x^2}$; т.к. $D(\sqrt{x})=[0; +\infty)$, то $2x-x^2 \geq 0$; $x^2-2x \leq 0$; $x(x-2) \leq 0$.

Ответ: $[0; 2]$.



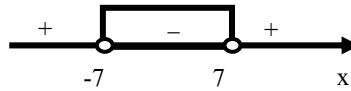
Вариант 4.

1. а) $5x^2+3x-8 > 0$; $5x^2+3x-8=0$; $D=9+4\cdot 5\cdot 8=169$; $x_1=\frac{-3+13}{10}=1$, $x_2=-1,6$.



Ответ: $(-\infty; -1,6) \cup (1; +\infty)$.

б) $x^2-49 < 0$; $(x-7)(x+7) < 0$.



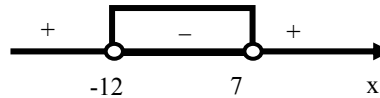
Ответ: $(-7; 7)$.

в) $4x^2-2x+13 < 0$; $4x^2-2x+13=0$; $D=4-4\cdot 13\cdot 4 < 0$;

т.к. $a=4 > 0$, то нет решений.

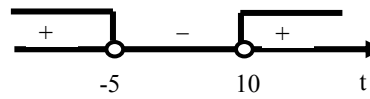
Ответ: нет решений.

2. а) $(x+12)(x-7) < 0$.



Ответ: $(-12; 7)$.

б) $\frac{x+5}{x-10} > 0$



Ответ: $(-\infty; -5) \cup (10; +\infty)$.

3. а) $x^3-49x=0$; $x(x^2-49)=0$; $x(x-7)(x+7)=0$; $x_1=0$, $x_{2,3}=\pm 7$;

б) $\frac{x^2+3}{4} - \frac{17-3x}{8} = 2$; $2x^2+6-17+3x-16=0$; $2x^2+3x-27=0$;

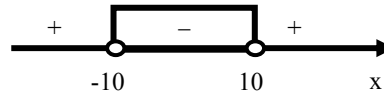
$D=9+4\cdot 2\cdot 27=225$; $x_1=\frac{-3+15}{4}=3$, $x_2=\frac{-3-15}{4}=-4,5$.

4. $x^4-17x^2+16=0$; $x^2=y \geq 0$, тогда $y^2-17y+16=0$; $D=289-4\cdot 16=225$;

$y_1=\frac{17+15}{2}=16$, $y_2=1$; $x^2=14$, $x_{1,2}=\pm 4$; $x^2=1$, $x_{1,2}=\pm 1$.

5. $25x^2+tx+1=0$; $D=t^2-4\cdot 25=t^2-100$.

Т.к. уравнение не имеет корней, то $D < 0$; $t^2-100 < 0$; $(t-10)(t+10) < 0$.



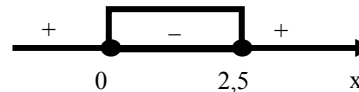
Ответ: $(-10; 10)$.

6. $y=\sqrt{5x-2x^2}$. Т.к. $D(\sqrt{x})=[0; +\infty)$, то

$5x-2x^2 \geq 0$; $2x^2-5x \leq 0$;

$x^2-2,5x \leq 0$; $x(x-2,5) \leq 0$.

Ответ: $[0; 2,5]$.



К-2А. Вариант 1.

1. а) $5 \cdot 8^{1/3} = 5 \cdot 2 = 10$; б) $16^{-1/2} = \frac{1}{16^{1/2}} = \frac{1}{4} = 0,25$.
2. а) $b^{1/3} \cdot b^{-1/6} = b^{1/3-1/6} = b^{1/6}$; б) $\frac{x^{3/4} \cdot x^{1/2}}{x^{1/4}} = x^{3/4+1/2-1/4} = x$;
- в) $(y^{-3/4})^4 \cdot y^{5/2} = y^{-3} \cdot y^{5/2} = y^{-3+5/2} = y^{-0,5} = \frac{1}{\sqrt{y}}$.
3. $a^{7/2} \sqrt{a} = a^{7/2} \cdot a^{1/2} = a^4$.
4. а) $\frac{3a^{1/2} - a}{3 - a^{1/2}} = \frac{a^{1/2}(3 - a^{1/2})}{3 - a^{1/2}} = \sqrt{a}$;
- б) $\frac{b^{1/2} - 5}{b - 25} = \frac{b^{1/2} - 5}{(\sqrt{b} - 5)(\sqrt{b} + 5)} = \frac{1}{\sqrt{b} + 5}$.
5. $\left(\frac{a^{0,5} - b^{0,5}}{a^{0,5} + b^{0,5}} + \frac{2a^{0,5}b^{0,5}}{a - b} \right) \cdot \frac{a - 2a^{0,5}b^{0,5} + b}{a + b} =$
 $= \left(\frac{a^{0,5} - b^{0,5}}{a^{0,5} + b^{0,5}} + \frac{2a^{0,5}b^{0,5}}{(a^{0,5} - b^{0,5})(a^{0,5} + b^{0,5})} \right) \cdot \frac{(a^{0,5} - b^{0,5})^2}{a + b} =$
 $= \frac{a - 2a^{0,5}b^{0,5} + b + 2a^{0,5}b^{0,5}}{(a^{0,5} - b^{0,5})(a^{0,5} + b^{0,5})} \cdot \frac{(a^{0,5} - b^{0,5})^2}{a + b} = \frac{a^{0,5} - b^{0,5}}{a^{0,5} + b^{0,5}}$.

Вариант 2.

1. а) $2 \cdot 36^{1/2} = 2 \cdot 6 = 12$; б) $27^{-1/3} = \frac{1}{27^{1/3}} = \frac{1}{3}$.
2. а) $a^{-1/2} \cdot a^{3/4} = a^{-1/2+3/4} = a^{1/4}$; б) $\frac{c^{2/3} \cdot c^{1/2}}{c^{1/6}} = c^{2/3+1/2-1/6} = c$;
- в) $(x^{1/3})^{-3} \cdot x^{2/3} = x^{-1} \cdot x^{2/3} = x^{-1/3} = \frac{1}{x^{1/3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$.
3. $y^{5/3} \cdot \sqrt[3]{y} = y^{5/3} \cdot y^{1/3} = y^2$.
4. а) $\frac{b + 7b^{1/2}}{7 + b^{1/2}} = \frac{b^{1/2}(b^{1/2} + 7)}{b^{1/2} + 7} = b^{1/2}$;
- б) $\frac{3 + a^{1/2}}{a - 9} = \frac{a^{1/2} + 3}{(a^{1/2} - 3)(a^{1/2} + 3)} = \frac{1}{a^{1/2} - 3}$.
5. $\left(\frac{a^{1/2} - b^{1/2}}{a - b} - \frac{1}{a^{1/2} - b^{1/2}} \right) \cdot \frac{a + 2a^{1/2}b^{1/2} + b}{4b^{1/2}} =$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{a^{1/2} - b^{1/2}}{(a^{1/2} - b^{1/2})(a^{1/2} + b^{1/2})} - \frac{1}{a^{1/2} - b^{1/2}} \right) \cdot \frac{(a^{1/2} + b^{1/2})^2}{4b^{1/2}} = \\
&= \frac{a^{1/2} - b^{1/2} - a^{1/2} - b^{1/2}}{(a^{1/2} - b^{1/2})(a^{1/2} + b^{1/2})} \cdot \frac{(a^{1/2} + b^{1/2})^2}{4b^{1/2}} = \\
&= \frac{-2b^{1/2}}{(a^{1/2} - b^{1/2})} \cdot \frac{(a^{1/2} + b^{1/2})}{4b^{1/2}} = -\frac{a^{1/2} + b^{1/2}}{2(a^{1/2} - b^{1/2})} = \frac{b^{1/2} + a^{1/2}}{2(b^{1/2} - a^{1/2})}.
\end{aligned}$$

Вариант 3.

1. а) $2 \cdot 27^{1/3} = 2 \cdot 3 = 6$; б) $36^{-1/2} = \frac{1}{36^{1/2}} = \frac{1}{6}$.
2. а) $b^{-1/3} \cdot b^{1/2} = b^{-1/3+1/2} = b^{1/6}$; б) $\frac{a^2 \cdot a^{3/4}}{a^{1/4}} = a^{2+3/4-1/4} = a^{2,5}$;
- в) $(y^2)^{-1/2} \cdot y^{3/2} = y^{-1} \cdot y^{3/2} = y^{-1+3/2} = y^{0,5}$.
3. $c^{7/4} \cdot \sqrt[4]{c} = c^{7/4} \cdot c^{1/4} = c^2$.
4. а) $\frac{5x^{1/2} + x}{5 + x^{1/2}} = \frac{x^{1/2}(5 + x^{1/2})}{5 + x^{1/2}} = x^{1/2}$;
- б) $\frac{a-4}{2+a^{1/2}} = \frac{(a^{1/2}-2)(a^{1/2}+2)}{a^{1/2}+2} = a^{1/2} - 2$.
5. $\frac{a+b}{a+2a^{0,5}b^{0,5}+b} : \left(\frac{a^{0,5}+b^{0,5}}{a^{0,5}-b^{0,5}} - \frac{2a^{0,5}b^{0,5}}{a-b} \right) =$
 $= \frac{a+b}{(a^{0,5}+b^{0,5})^2} : \left(\frac{a^{0,5}+b^{0,5}}{a^{0,5}-b^{0,5}} - \frac{2a^{0,5}b^{0,5}}{(a^{0,5}-b^{0,5})(a^{0,5}+b^{0,5})} \right) =$
 $= \frac{a+b}{(a^{0,5}+b^{0,5})^2} : \frac{a+b+2a^{0,5}b^{0,5}-2a^{0,5}b^{0,5}}{(a^{0,5}-b^{0,5})(a^{0,5}+b^{0,5})} =$
 $= \frac{a+b}{(a^{0,5}+b^{0,5})^2} \cdot \frac{(a^{0,5}-b^{0,5})(a^{0,5}+b^{0,5})}{a+b} = \frac{a^{0,5}-b^{0,5}}{a^{0,5}+b^{0,5}}.$

Вариант 4.

1. а) $3 \cdot 8^{1/3} = 3 \cdot 2 = 6$; б) $64^{-1/2} = \frac{1}{64^{1/2}} = \frac{1}{8}$.
2. а) $a^{2/3} \cdot a^{-1/2} = a^{2/3-1/2} = a^{1/6}$; б) $\frac{b^{1/2} \cdot b^{-1}}{b^{3/2}} = b^{1/2-1-3/2} = b^{-2} = \frac{1}{b^2}$;
- в) $(c^{3/2})^2 \cdot c^{-8/3} = c^3 \cdot c^{-8/3} = c^{3-8/3} = c^{1/3}$.
3. $x^{5/2} \cdot \sqrt{x} = x^{2,5} \cdot x^{0,5} = x^3$.

$$\begin{aligned}
4. \text{ а) } & \frac{a^{1/2} - 2}{a - 2a^{1/2}} = \frac{a^{1/2} - 2}{a^{1/2}(a^{1/2} - 2)} = \frac{1}{a^{1/2}}; \\
\text{б) } & \frac{1-a}{1+a^{1/2}} = \frac{(1-a^{1/2})(1+a^{1/2})}{1+a^{1/2}} = 1-a^{1/2}. \\
5. & \left(\frac{1}{a^{0,5} + b^{0,5}} - \frac{a^{0,5} + b^{0,5}}{a-b} \right) \cdot \frac{a - 2a^{0,5}b^{0,5} + b}{2b^{0,5}} = \\
& = \left(\frac{1}{a^{0,5} + b^{0,5}} - \frac{a^{0,5} + b^{0,5}}{(a^{0,5} - b^{0,5})(a^{0,5} + b^{0,5})} \right) \cdot \frac{(a^{0,5} - b^{0,5})^2}{2b^{0,5}} = \\
& = \frac{a^{0,5} - b^{0,5} - a^{0,5} - b^{0,5}}{(a^{0,5} + b^{0,5})(a^{0,5} - b^{0,5})} \cdot \frac{(a^{0,5} - b^{0,5})^2}{2b^{0,5}} = \\
& = -\frac{a^{0,5} - b^{0,5}}{a^{0,5} + b^{0,5}} = \frac{b^{0,5} - a^{0,5}}{b^{0,5} + a^{0,5}}.
\end{aligned}$$

К-3. Вариант 1.

$$1. \begin{cases} 2x + y = 7 \\ x^2 - y = 1 \end{cases} \begin{cases} y = 7 - 2x \\ y = x^2 - 1 \end{cases}; \quad 7 - 2x = x^2 - 1; \quad x^2 + 2x - 8 = 0;$$

$$D = 4 + 4 \cdot 8 = 36; \quad x_1 = \frac{-2 + 6}{2} = 2; \quad x_2 = -4; \quad y_1 = 2^2 - 1 = 3; \quad y_2 = (-4)^2 - 1 = 15.$$

Ответ: (2; 3), (-4; 15).

2. Пусть x м и y м – стороны прямоугольника. Тогда $2(x+y)$ м – его периметр или 28 м, xy м² – его площадь или 40 м².

$$\text{Получаем систему: } \begin{cases} 2(x+y) = 28 \\ xy = 40 \end{cases} \begin{cases} x+y = 14 \\ xy = 40 \end{cases} \begin{cases} y = 14 - x \\ xy = 40 \end{cases};$$

$$x(14-x) = 40; \quad -x^2 + 14x = 40; \quad x^2 - 14x + 40 = 0; \quad D = 196 - 4 \cdot 40 = 36;$$

$$x_1 = \frac{14 + 6}{2} = 10; \quad x_2 = 4; \quad y_1 = 14 - 10 = 4; \quad y_2 = 14 - 4 = 10;$$

Итак, стороны прямоугольника равны 4 м и 10 м.

$$3. y = x^2 + 4, \quad x + y = 6; \quad x^2 + 4 = 6 - x, \quad x^2 + x - 2 = 0; \quad D = 1 + 4 \cdot 2 = 9;$$

$$x_1 = \frac{-1 + 3}{2} = 1; \quad x_2 = -2; \quad y_1 = 6 - 1 = 5; \quad y_2 = 6 - (-2) = 8.$$

Ответ: (1; 5), (-2; 8).

$$4. \begin{cases} 2y - x = 7 \\ x^2 - xy - y^2 = 29 \end{cases} \begin{cases} x = 2y - 7 \\ x^2 - xy - y^2 = 29 \end{cases}; \quad (2y-7)^2 - y \cdot (2y-7) - y^2 = 29;$$

$$4y^2 - 28y + 49 - 2y^2 + 7y - y^2 - 29 = 0; \quad y^2 - 21y + 20 = 0;$$

$$D = 441 - 4 \cdot 20 = 361; \quad y_1 = \frac{21 + 19}{2} = 20; \quad y_2 = 1;$$

$$x_1=2 \cdot 20-7=33; \quad x_2=2 \cdot 1-7=-5.$$

Ответ: (33; 20), (-5; 1).

Вариант 2.

$$1. \begin{cases} x-3y=2 \\ xy+y=6 \end{cases} \begin{cases} x=2+3y \\ xy+y=6 \end{cases}; \quad y(2+3y)+y=6; \quad 3y^2+3y-6=0; \quad y^2+y-2=0;$$

$$D=1+4 \cdot 2=9; \quad y_1=\frac{-1+3}{2}=1; \quad x_1=2+3=5; \quad y_2=-2; \quad x_2=2-3 \cdot 2=-4.$$

Ответ: (5; 1), (-4; -2).

2. Пусть x см — меньшая сторона прямоугольника. Тогда $(x+2)$ см — другая его сторона, $x(x+2)$ см² — его площадь или 120 см². Получаем уравнение:

$$x(x+2)=120; \quad x^2+2x-120=0; \quad D=4+4 \cdot 120=484; \quad x_1=\frac{-2+22}{2}=10; \quad x_2 < 0 —$$

не удовлетворяет условию задачи. Итак, 10 см — меньшая сторона, $10+2=12$ (см) — другая сторона.

Ответ: 10 см и 12 см.

$$3. \quad x^2+y^2=10, \quad x+2y=5, \quad x=5-2y; \quad 10-y^2=(5-2y)^2; \quad 10-y^2=25-20y+4y^2;$$

$$5y^2-20y+15=0; \quad y^2-4y+3=0; \quad D=16-4 \cdot 3=4; \quad y_1=\frac{4+2}{2}=3; \quad y_2=1; \quad x_1=5-2 \cdot 3=-1;$$

$$x_2=5-2=3.$$

Ответ: (-1; 3), (3; 1).

$$4. \begin{cases} y-3x=1 \\ x^2-2xy+y^2=9 \end{cases} \begin{cases} y=3x+1 \\ (x-y)^2=9 \end{cases}$$

Система распадается на две линейные:

$$а) \begin{cases} y=3x+1 \\ y=x-3 \end{cases}; \quad 3x+1=x-3; \quad 2x=-4; \quad x=-2; \quad y=-2-3=-5;$$

$$б) \begin{cases} y=3x+1 \\ y=x+3 \end{cases}; \quad 3x+1=x+3; \quad 2x=2; \quad x=1; \quad y=1+3=4.$$

Ответ: (-2; -5), (1; 4).

Вариант 3.

$$1. \begin{cases} x-5y=2 \\ x^2-y=10 \end{cases} \begin{cases} x=2+5y \\ x^2-y=10 \end{cases}; \quad (2+5y)^2-y=10;$$

$$25y^2+20y+4-y-10=0; \quad 25y^2+19y-6=0; \quad D=361+4 \cdot 25 \cdot 6=961;$$

$$y_1=\frac{-19+31}{50}=\frac{6}{25}; \quad y_2=-1; \quad x_1=2+5 \cdot \frac{6}{25}=\frac{16}{5}; \quad x_2=2-5=-3.$$

Ответ: $\left(\frac{16}{5}; \frac{6}{25}\right)$, (-3; -1).

2. Пусть x см и y см — стороны прямоугольника. Тогда $2(x+y)$ см — его периметр или 26 см, xy см² — его площадь или 42 см².

Получаем систему: $\begin{cases} 2(x+y) = 26 \\ xy = 42 \end{cases} \left| \begin{array}{l} y = 13-x \\ xy = 42 \end{array} \right. ; x(13-x) = 42; x^2 - 13x + 42 = 0;$

$$D = 169 - 4 \cdot 42 = 1; x_1 = \frac{13+1}{2} = 7; x_2 = 6; y_1 = 13-7 = 6; y_2 = 13-6 = 7;$$

Итак, стороны прямоугольника равны 6 см и 7 см.

3. $y = x^2 - 8, x + y = 4; x^2 - 8 = 4 - x; x^2 + x - 12 = 0; D = 1 + 4 \cdot 12 = 49;$

$$x_1 = \frac{-1+7}{2} = 3; x_2 = -4; y_1 = 4-3 = 1; y_2 = 4-(-4) = 8.$$

Ответ: (3; 1), (-4; 8).

4. $\begin{cases} x - 5y = 9 \\ x^2 + 3xy - y^2 = 3 \end{cases} \left| \begin{array}{l} x = 9 + 5y \\ x^2 + 3xy - y^2 = 3 \end{array} \right. ; (9+5y)^2 + 3y \cdot (9+5y) - y^2 = 3;$

$$81 + 90y + 25y^2 + 27y + 15y^2 - y^2 - 3 = 0; 39y^2 + 117y + 78 = 0; y^2 + 3y + 2 = 0;$$

$$D = 9 - 4 \cdot 2 = 1; y_1 = \frac{-3+1}{2} = -1; y_2 = -2; x_1 = 9-5 \cdot (-1) = 14; x_2 = 9-10 = -1.$$

Ответ: (4; -1), (-1; -2).

Вариант 4.

1. $\begin{cases} 3x + y = -1 \\ x - xy = 8 \end{cases} \left| \begin{array}{l} y = -3x - 1 \\ x - xy = 8 \end{array} \right. ; x + x(3x+1) = 8; 3x^2 + 2x - 8 = 0; D = 4 + 4 \cdot 3 \cdot 8 = 100;$

$$x_1 = \frac{-2+10}{6} = \frac{4}{3}; x_2 = -2; y_1 = -3 \cdot \frac{4}{3} - 1 = -5; y_2 = -3 \cdot (-2) - 1 = 5.$$

Ответ: $(\frac{4}{3}; -5), (-2; 5)$.

2. Пусть x м — меньшая сторона прямоугольника. Тогда $(x+4)$ м — другая его сторона, $x(x+4)$ м² — его площадь или 45 м². Получаем уравнение:

$$x(x+4) = 45; x^2 + 4x - 45 = 0; D = 16 + 4 \cdot 45 = 196; x_1 = \frac{-4+14}{2} = 5, x_2 < 0 — не удов-$$

летворяет условию задачи. Итак, 5 м — меньшая сторона, 5+4=9 (м) — другая сторона.

Ответ: 5 м и 9 см.

3. $x^2 + y^2 = 17, 5x - 3y = 17; x^2 = 17 - y^2; x = \frac{3y+17}{5}; 17 - y^2 = \left(\frac{3y+17}{5}\right)^2;$

$$\frac{9y^2 + 102y + 289}{25} + y^2 - 17 = 0; 9y^2 + 102y + 289 + 25y^2 - 425 = 0;$$

$$34y^2 + 102y - 136 = 0; y^2 + 3y - 4 = 0; D = 9 + 4 \cdot 4 = 25$$

$$y_1 = \frac{-3+5}{2} = 1; y_2 = -4; x_1 = \frac{3+17}{5} = 4; x_2 = \frac{17-12}{5} = 1.$$

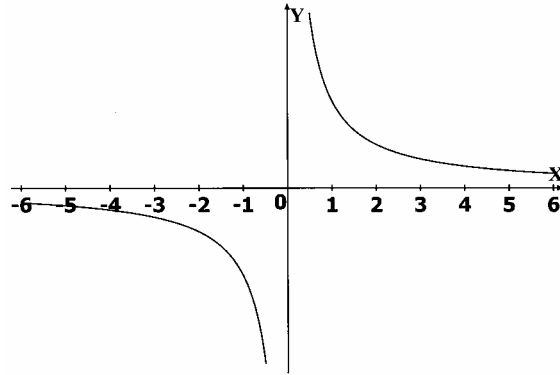
4. $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ x^2 - xy - 2y^2 = 1 \end{cases} \left| \begin{array}{l} x = 1 - 2y \\ x^2 - xy - 2y^2 = 1 \end{array} \right. ; (1-2y)^2 - y \cdot (1-2y) - 2y^2 = 1;$

$$1-49+4y^2-y+2y^2-2y^2-1=0; 4y^2-5y=0; y(4y-5)=0;$$

$$y_1=0; y_2=\frac{5}{4}; x_1=1; x_2=1-2\cdot\frac{5}{4}=-1,5.$$

К-3А. Вариант 1.

1.



$$y = \frac{3}{x}$$

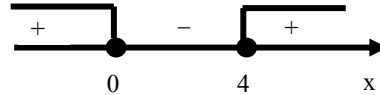
а) $D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; б) $E(y) = D(y)$; в) нечетная;
 г) функция убывает на $D(y)$; $y > 0$ при $x > 0$; $y < 0$ при $x < 0$.

2. а) $y = \frac{3x-1}{2x^2-9x+10}$; $2x^2-9x+10 \neq 0$, т.к. знаменатель;

$$D = 81 - 4 \cdot 2 \cdot 10 = 1; x_1 = \frac{9+1}{4} = 2,5; x_2 = 2.$$

Ответ: $x \neq 2; x \neq 2,5$.

б) $y = \sqrt{x^2-4x}$; $x^2-4x \geq 0$, т.к. $D(\sqrt{x}) = [0; +\infty)$; $x(x-4) \geq 0$



Ответ: $(-\infty; 0] \cup [4; +\infty)$.

3. $y = \frac{8}{x}$, $y = 2x$; $\frac{8}{x} = 2x$, $\frac{4}{x} = x$, $x^2 = 4$; $x_{1,2} = \pm 2$, $y_{1,2} = 2 \cdot (\pm 2) = \pm 4$.

4. а) $\sqrt{5-4x} = 3,2$; $5-4x = 10,24$; $4x = -5,24$; $x = -1,31$.

б) $\sqrt{4x^2-3x-1} = x+1$; $4x^2-3x-1 = x^2+2x+1$; $3x^2-5x-2 = 0$;

$$D = 25 + 4 \cdot 3 \cdot 2 = 49; x_1 = \frac{5+7}{6} = 2; x_2 = -\frac{1}{3};$$

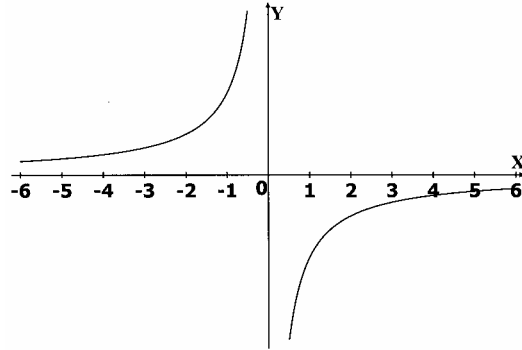
Проверка: $x_1 = 2$; $\sqrt{4 \cdot 4 - 6 - 1} = 2 + 1$ — верно;

$$x_2 = -\frac{1}{3}; \sqrt{4 \cdot \frac{1}{9} + 1} - 1 = \frac{1}{3} + 1 \text{ — верно.} \quad \text{Ответ: } -\frac{1}{3}; 2.$$

Вариант 2.

1.

$$y = \frac{3}{x};$$



а), б) $D(y)=E(y)=(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; в) нечетная;
 г) функция возрастает на $D(y)$; $y > 0$ при $x < 0$; $y < 0$ при $x > 0$.

2. а) $y = \frac{6x+2}{3x^2+5x-2}$; $3x^2+5x-2 \neq 0$, т.к. знаменатель

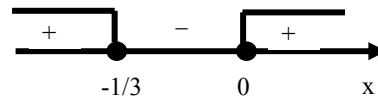
$$D=25+4 \cdot 3 \cdot 2=49; x_1 = \frac{-5+7}{6} = \frac{1}{3}; x_2 = -2.$$

Ответ: $x \neq -2$; $x \neq \frac{1}{3}$.

б) $y = \sqrt{4x+12x^2}$; $4x+12x^2 \geq 0$, т.к. $D(\sqrt{\quad}) = [0; +\infty)$;

$$3x^2+x \geq 0; x(x+\frac{1}{3}) \geq 0.$$

Ответ: $(-\infty; -\frac{1}{3}] \cup [0; +\infty)$.



3. $y = \frac{12}{x}$, $y = \frac{x}{3}$; $\frac{12}{x} = \frac{x}{3}$, $x^2=36$; $x_{1,2} = \pm 6$ $y_{1,2} = \pm \frac{6}{3} = \pm 2$.

Ответ: $(\pm 6; \pm 2)$.

4. а) $\sqrt{2x-3} = 1,6$; $2x-3=2,56$; $2x=5,56$; $x=2,78$.

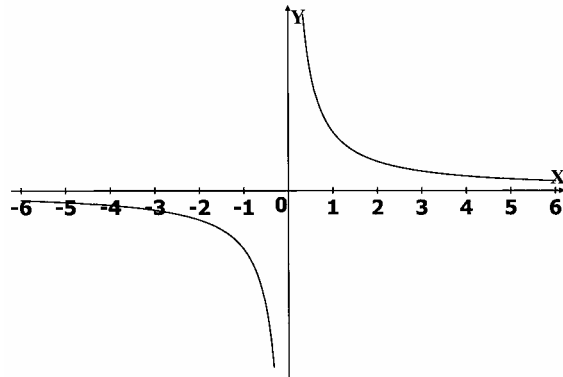
Ответ: 2,78.

б) $\sqrt{3x^2+5x+8} = 3+x$; $3x^2+5x+8=9+6x+x^2$; $2x^2-x-1=0$; $D=1+4 \cdot 2=9$;

$x_1 = \frac{1+3}{4} = 1$; $x_2 = -0,5$. Проверка: $x_1 = 1$; $\sqrt{3+5+8} = 3+1$ — верно;
 $x_2 = -0,5$; $\sqrt{3 \cdot 0,25 - 5 \cdot 0,5 + 8} = 3 - 0,5$ — верно. Ответ: $-0,5$; 1 .

Вариант 3.

1. $y = \frac{2}{x}$;



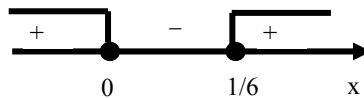
а) $D(y) = E(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; в) нечетная;
 г) функция убывает на $D(y)$; $y > 0$ при $x > 0$; $y < 0$ при $x < 0$.

2. а) $y = \frac{4x-1}{5x^2-13x-6}$; $5x^2-13x-6 \neq 0$, т.к. знаменатель

$D = 169 + 4 \cdot 5 \cdot 6 = 49$; $x_1 = \frac{13+7}{10} = 2$; $x_2 = 0,6$. Ответ: $x \neq 0,6$; $x \neq 2$.

б) $y = \sqrt{18x^2 - 3x}$; $18x^2 - 3x \geq 0$, т.к. $D(\sqrt{x}) = [0; +\infty)$;

$6x^2 - x \geq 0$; $x(x - \frac{1}{6}) \geq 0$.



Ответ: $(-\infty; 0] \cup [\frac{1}{6}; +\infty)$.

3. $y = \frac{8}{x}$, $y = \frac{x}{2}$; $\frac{8}{x} = \frac{x}{2}$, $x^2 = 16$; $x_{1,2} = \pm 4$; $y_{1,2} = \pm \frac{4}{2} = \pm 2$.

Ответ: $(\pm 4; \pm 2)$.

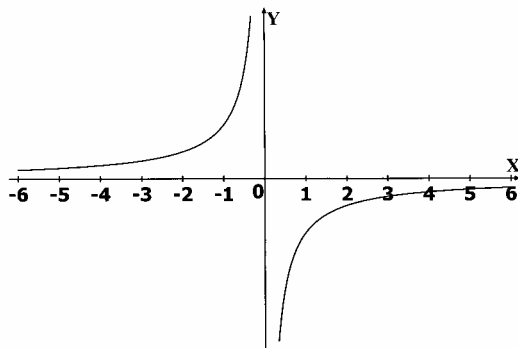
4. а) $\sqrt{5-2x} = 8,4$; $5-2x = 70,56$; $2x = -65,56$; $x = -32,78$.

Ответ: $-32,78$.

б) $\sqrt{2x^2 - 7x + 7} = x - 1$; $2x^2 - 7x + 7 = x^2 - 2x + 1$; $x^2 - 5x + 6 = 0$; $D = 25 - 24 = 1$;
 $x_1 = \frac{5+1}{2} = 3$; $x_2 = 2$. Проверка: $x=3$; $\sqrt{18 - 21 + 7} = 3 - 1$ — верно;
 $x=2$; $\sqrt{8 - 14 + 7} = 2 - 1$ — верно. Ответ: 3; 2.

Вариант 4.

1. $y = -\frac{2}{x}$.



а) б) $D(y) = E(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; в) нечетная;
 г) функция возрастает на $D(y)$; $y > 0$ при $x < 0$; $y < 0$ при $x > 0$.

2. а) $y = \frac{2x+4}{6x^2+11x-2}$; $6x^2+11x-2 \neq 0$, т.к. знаменатель

$D = 121 + 4 \cdot 6 \cdot 2 = 169$; $x_1 = \frac{-11+13}{12} = \frac{1}{6}$; $x_2 = -2$.

Ответ: $x \neq -2$; $x \neq \frac{1}{6}$.

б) $y = \sqrt{3x - x^2}$; $3x - x^2 \geq 0$, т.к. $D(\sqrt{\quad}) = [0; +\infty)$; $x^2 - 3x \leq 0$; $x(x-3) \leq 0$.

Ответ: $[0; 3]$.



3. $y = 6x$, $y = \frac{54}{x}$; $6x = \frac{54}{x}$, $x^2 = 9$; $x_{1,2} = \pm 3$; $y_{1,2} = 6 \cdot (\pm 3) = \pm 18$.

Ответ: $(\pm 3; \pm 18)$.

4. а) $\sqrt{3x+7} = 2,5$; $3x+7=6,25$; $3x=-0,75$; $x=-0,25$. Ответ: $-0,25$.

б) $\sqrt{x^2 - 6x - 8} = 1 + 2x$; $x^2 - 6x - 8 = 1 + 4x + 4x^2$; $3x^2 + 10x + 9 = 0$; $D = 100 - 4 \cdot 3 \cdot 9 < 0$.
 Ответ: нет корней.

К-4. Вариант 1.

1. $a_1 = -15, d = 3; a_{23} = a_1 + 22d = -15 + 22 \cdot 3 = 51.$

2. $8; 4; 0; \dots; a_1 = 8; d = a_2 - a_1 = 4 - 8 = -4;$

$$S_{16} = \frac{2a_1 + d \cdot 15}{2} \cdot 16 = (2 \cdot 8 - 15 \cdot 4) \cdot 8 = 44 \cdot 8 = -352.$$

3. $b_n = 3n - 1.$

Проверим, что (b_n) – арифметическая прогрессия. Для этого нужно

$$b_n = \frac{b_{n-1} + b_{n+1}}{2}; b_{n-1} = 3(n-1) - 1 = 3n - 4; b_{n+1} = 3(n+1) - 1 = 3n + 2;$$

$$3n - 1 = \frac{3n - 4 + 3n + 2}{2} \text{ – верно, значит, } (b_n) \text{ – арифметическая прогрессия;}$$

$$b_1 = 3 - 1 = 2, b_2 = 3 \cdot 2 - 1 = 5; d = 5 - 2 = 3; S_{60} = \frac{2 \cdot 2 + 3 \cdot 59}{2} \cdot 60 = (4 + 177) \cdot 30 = 5430.$$

4. $a_1 = 25,5; a_9 = 5,5; a_9 = a_1 + 8d, d = \frac{a_9 - a_1}{8} = \frac{5,5 - 25,5}{8} = -2,5,$ значит,

$$a_n = 25,5 + 2,5(n-1) = 23 + 2,5n; 54,5 = 23 + 2,5n; n = 12,6 \notin N, \text{ значит, число } 54,5 \text{ – не член } (a_n). \text{ Ответ: нет.}$$

5. $3, 6, 9, \dots, 99$ – арифметическая прогрессия; $a_1 = 3, d = 3;$

$$a_n = 3 + 3(n-1) = 3n; 99 = 3n, n = 33, \text{ значит, } 99 = a_{33};$$

$$S = S_{33} = \frac{a_1 + a_{33}}{2} \cdot 33 = \frac{3 + 99}{2} \cdot 33 = 51 \cdot 33 = 1683.$$

Вариант 2.

1. $a_1 = 70, d = -3; a_{18} = a_1 + 17d = 70 - 17 \cdot 3 = 19.$

2. $-21; -18; -15; \dots$ – арифметическая прогрессия; $a_1 = -21; a_2 = -18;$

$$d = a_2 - a_1 = -18 - (-21) = 3; S_{20} = \frac{2a_1 + 19d}{2} \cdot 20 = (-42 + 19 \cdot 3) \cdot 10 = 150.$$

3. $b_n = 4n - 2$

Проверим, что (b_n) – арифметическая прогрессия. Для этого нужно

$$b_n = \frac{b_{n+1} + b_{n-1}}{2}; b_{n+1} = 4(n+1) - 2 = 4n + 2; b_{n-1} = 4(n-1) - 2 = 4n - 6$$

$$4n - 2 = \frac{4n + 2 + 4n - 6}{2} \text{ – верно, значит, } (b_n) \text{ – арифметическая прогрессия;}$$

$$b_1 = 4 - 2 = 2, b_2 = 4 \cdot 2 - 2 = 6; d = 6 - 2 = 4; S_{40} = \frac{4 + 4 \cdot 39}{2} \cdot 40 = 4 \cdot 40 \cdot 20 = 3200.$$

4. $a_1 = 11,6; a_{15} = 17,2; a_{15} = a_1 + 14d, d = \frac{a_{15} - a_1}{14} = \frac{17,2 - 11,6}{14} = 0,4;$

$$a_n = a_1 + d(n-1) = 11,6 + 0,4(n-1) = 11,2 + 0,4n; 30,4 = 11,2 + 0,4n; n = 40 \in N, \text{ значит, число } 30,4 = a_{40}. \text{ Ответ: да.}$$

5. 7, 14, 21, ..., 147 – арифметическая прогрессия; $a_1=7$, $a_2=14$,
 $d=14-7=7$; $a_n=7+7(n-1)=7n$; $147=7n$, $n=21$, значит, $147=a_{21}$;
 $S=S_{21}=\frac{a_1+a_{21}}{2} \cdot 21=\frac{7+147}{2} \cdot 21=1617$.

Вариант 3.

1. $a_1=65$, $d=-2$; $a_{32}=a_1+31d=65-31 \cdot 2=3$.
 2. 42; 34; 26; ... – арифметическая прогрессия; $a_1=42$; $a_2=34$,
 $d=a_2-a_1=34-42=-8$; $S_{24}=\frac{2a_1+23d}{2} \cdot 24=(84-23 \cdot 8) \cdot 12=1200$.
 3. $b_n=2n-5$.
 Проверим, что (b_n) – арифметическая прогрессия. Для этого нужно
 $b_n=\frac{b_{n-1}+b_{n+1}}{2}$; $b_{n-1}=2(n-1)-5=2n-7$; $b_{n+1}=2(n+1)-5=2n-3$;
 $2n-5=\frac{2n-7+2n-3}{2}$ – верно, значит, (b_n) – арифметическая прогрессия
 $b_1=2-5=-3$, $b_2=6-5=1$; $d=1-(-3)=4$; $S_{80}=\frac{-6+4 \cdot 79}{2} \cdot 80=(316-6) \cdot 40=12400$.
 4. $a_1=-2,25$; $a_{11}=10,25$; $a_{11}=a_1+10d$, $d=\frac{a_{11}-a_1}{10}=\frac{10,25+2,25}{10}=1,25$;
 $a_n=a_1+d(n-1)=-2,25+1,25(n-1)=1,25n-3,5$; $6,5=1,25n-3,5$;
 $n=8 \in N$, значит, $6,5=a_8$. Ответ: да.
 5. 9, 18, 27, ..., 72 – арифметическая прогрессия; $a_n=9n$;
 $72=9n$, $n=8$, значит, $72=a_8$; $S=S_8=\frac{a_1+a_8}{2} \cdot 8=(9+72) \cdot 4=324$.

Вариант 4.

1. $a_1=-9$, $d=4$; $a_{43}=a_1+42d=-9+42 \cdot 4=159$.
 2. -63; -58; -53; ... – арифметическая прогрессия; $a_1=-63$; $a_2=-58$;
 $d=a_2-a_1=-58-(-63)=5$; $S_{14}=\frac{2a_1+13d}{2} \cdot 14=(-126+5 \cdot 13) \cdot 7=-427$.
 3. $b_n=3n-2$.
 Проверим, что (b_n) – арифметическая прогрессия. Для этого нужно
 $b_n=\frac{b_{n-1}+b_{n+1}}{2}$; $b_{n-1}=3(n-1)-2=3n-5$; $b_{n+1}=3(n+1)-2=3n+1$;
 $3n-2=\frac{3n-5+3n+1}{2}$ – верно, значит, (b_n) – арифметическая прогрессия;
 $b_1=3-2=1$, $b_2=3 \cdot 2-2=4$; $d=4-1=3$; $S_{120}=\frac{2+3 \cdot 119}{2} \cdot 120=21540$.
 4. $a_1=-23,6$; $a_{22}=11$; $a_{22}=a_1+21d$, $d=\frac{a_{22}-a_1}{21}=\frac{11+23,6}{21}=\frac{34,6}{21}$;

$$a_n = a_1 + d(n-1) = -23,6 + \frac{34,6}{21}(n-1); \quad 35,8 = -23,6 + \frac{34,6}{21}(n-1);$$

$$1247,4 = 34,6n - 34,6; \quad n \approx 37,05 \notin N, \text{ значит, число } 35,8 \text{ — не член } (a_n).$$

Ответ: нет.

5. 6, 12, 18, ..., 150 — арифметическая прогрессия; $a_n = 6n$; $150 = 6n$,
 $n = 25$, значит, $150 = a_{25}$; $S = S_{25} = \frac{a_1 + a_{25}}{2} \cdot 25 = \frac{6 + 150}{2} \cdot 25 = 1950$.

К-4А. Вариант 1.

- $2 \cos \frac{\pi}{6} + \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 = \sqrt{3} + 1.$
- $1 - \cos^2 \alpha \cdot \operatorname{tg}^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha \cdot \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = 1 - \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha.$
- $\sin \alpha = -\sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \frac{9}{25}} = -\frac{4}{5}; \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{4 \cdot 5}{5 \cdot 3} = \frac{4}{3}.$
- $\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha + 1} + \frac{\cos \alpha}{1 - \sin \alpha} = \frac{\cos \alpha(1 - \sin \alpha) + \cos \alpha(1 + \sin \alpha)}{(1 + \sin \alpha)(1 - \sin \alpha)} =$
 $= \frac{\cos \alpha(1 - \sin \alpha + 1 + \sin \alpha)}{1 - \sin^2 \alpha} = \frac{2 \cos \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{2}{\cos \alpha}.$
- $\left(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha + \frac{1}{\sin^2 \alpha}\right) \cdot \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha = \left(\frac{1}{\cos^2 \alpha} + \frac{1}{\sin^2 \alpha}\right) \cdot \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha =$
 $= \frac{\sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} + \frac{\sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1, \quad \text{ч.т.д.}$

Вариант 2.

- $\sin \frac{\pi}{6} - 2 \cos \pi = 0,5 - 2(-1) = 0,5 + 2 = 2,5.$
- $1 - \sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha = 1 - \sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = 1 - \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha.$
- $\sin \alpha = -\sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \frac{576}{625}} = -\frac{7}{25}; \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\frac{7 \cdot 25}{25 \cdot 24} = -\frac{7}{24}.$
- $\frac{\cos \alpha}{1 - \cos \alpha} - \frac{\cos \alpha}{1 + \cos \alpha} = \cos \alpha \left(\frac{1}{1 - \cos \alpha} - \frac{1}{1 + \cos \alpha} \right) =$
 $= \cos \alpha \cdot \frac{1 + \cos \alpha - 1 + \cos \alpha}{(1 - \cos \alpha)(1 + \cos \alpha)} = \cos \alpha \cdot \frac{2 \cos \alpha}{1 - \cos^2 \alpha} = \frac{2 \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = 2 \operatorname{ctg}^2 \alpha.$
- $(1 - \cos^2 \alpha)(1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha) = \sin^2 \alpha \cdot \frac{1}{\sin^2 \alpha} = 1, \quad \text{ч.т.д.}$

Вариант 3.

- $2\sin\frac{\pi}{3} - \cos\frac{\pi}{2} = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 0 = \sqrt{3}.$
- $1 - \sin^2\alpha \cdot \operatorname{ctg}^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha \cdot \frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = 1 - \cos^2\alpha = \sin^2\alpha.$
- $\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \sqrt{1 - 0,36} = 0,8; \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\frac{0,8}{0,6} = -\frac{4}{3}$
- $\frac{\sin\alpha}{1 + \cos\alpha} + \frac{\sin\alpha}{1 - \cos\alpha} = \sin\alpha \left(\frac{1}{1 + \cos\alpha} + \frac{1}{1 - \cos\alpha} \right) =$
 $= \sin\alpha \cdot \frac{1 - \cos\alpha + 1 + \cos\alpha}{(1 + \cos\alpha)(1 - \cos\alpha)} = \frac{2\sin\alpha}{1 - \cos^2\alpha} = \frac{2\sin\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{2}{\sin\alpha}$
- $\cos^2\alpha(1 + \operatorname{tg}^2\alpha) - \sin^2\alpha = \cos^2\alpha \cdot \frac{1}{\cos^2\alpha} - \sin^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = \cos^2\alpha, \text{ ч. т. д.}$

Вариант 4

- $2\sin\frac{\pi}{2} - \operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = 2 \cdot 1 - \sqrt{3} = 2 - \sqrt{3}.$
- $1 - \sin\alpha \cdot \cos\alpha - \operatorname{tg}\alpha = 1 - \sin\alpha \cdot \cos\alpha \cdot \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = 1 - \cos^2\alpha = \sin^2\alpha.$
- $\cos\alpha = -\sqrt{1 - \sin^2\alpha} = -\sqrt{1 - \frac{144}{169}} = -\frac{5}{13};$
 $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{12 \cdot 13}{13 \cdot 5} = \frac{12}{5} = 2,4.$
- $\frac{\cos\alpha}{1 - \sin\alpha} - \frac{\cos\alpha}{1 + \sin\alpha} = \cos\alpha \left(\frac{1}{1 - \sin\alpha} - \frac{1}{1 + \sin\alpha} \right) =$
 $= \cos\alpha \frac{1 + \sin\alpha - 1 + \sin\alpha}{(1 - \sin\alpha)(1 + \sin\alpha)} = \cos\alpha \frac{2\sin\alpha}{1 - \sin^2\alpha} = \frac{2\sin\alpha \cos\alpha}{\cos^2\alpha} = 2\operatorname{tg}\alpha.$
- $\frac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha} - \operatorname{tg}\alpha \cos\alpha = \frac{(\cos\alpha - \sin\alpha)(\cos\alpha + \sin\alpha)}{\cos\alpha - \sin\alpha} - \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \cdot \cos\alpha =$
 $= \cos\alpha + \sin\alpha - \sin\alpha = \cos\alpha, \text{ ч. т. д.}$

К-5. Вариант 1

- $b_1 = -32, q = \frac{1}{2}; b_7 = b_1 \cdot q^6 = -32 \cdot \frac{1}{2^6} = -\frac{32}{64} = -0,5.$
- $b_1 = 2, q = 3; S_6 = \frac{b_1(q^6 - 1)}{q - 1} = \frac{2 \cdot (3^6 - 1)}{3 - 1} = 729 - 1 = 728.$

3. 24; -12; 6 — геометрическая прогрессия; $b_1 = 24$,

$$q = \frac{b_2}{b_1} = -\frac{12}{24} = -\frac{1}{2}; S = \frac{b_1}{1-q} = \frac{24}{1+\frac{1}{2}} = 16.$$

4. $b_2 = 0,04$; $b_4 = 0,16$; $b_4 = b_2 q^2$; т. к. все b_n больше нуля, то $q = 0$;

$$q^2 = \frac{b_4}{b_2}; q = \sqrt{\frac{b_4}{b_2}} = \sqrt{\frac{0,16}{0,04}} = 2; b_1 = \frac{b_2}{q} = \frac{0,04}{2} = 0,02;$$

$$S_9 = \frac{0,02(2^9 - 1)}{2 - 1} = 0,02 \cdot 511 = 10,22.$$

5. а) 0, (27)=0,2727...=0,27+0,0027+0,000027+... 0,27; 0,0027;... — геом.

прогр. $b_1=0,27$, $q=\frac{0,27}{1-0,01}=\frac{27}{99}=\frac{3}{11}$. б) 0,5(6)=0,566...=0,5+0,06+0,006+... 0,06; 0,0006; — геом. прогр. $b_1=0,06$, $q=0,01$;

$$0,5(6)=0,5+S=0,5+\frac{0,06}{1-0,1}=\frac{1}{2}+\frac{0,06}{0,9}=\frac{1}{2}+\frac{6}{9}=\frac{1}{2}+\frac{1}{15}=\frac{17}{30}.$$

Вариант 2

$$1. b_1=0,81, q=-\frac{1}{3}; b_6=b_1 \cdot q^5=0,81 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^5 = -\frac{0,81}{243} = -\frac{1}{300}.$$

$$2. b_1=6, q=2; S_7 = \frac{b_1(q^7 - 1)}{q - 1} = \frac{6 \cdot (2^7 - 1)}{2 - 1} = 6 \cdot 127 = 762.$$

3. -40; 20; -10; ... — геом. прогр. $b_1=-40$; $q=\frac{b_2}{b_1}=-\frac{20}{40}=-0,5$;

$$S = \frac{b_1}{1-q} = \frac{-40}{1+0,5} = -\frac{40 \cdot 2}{3} = -\frac{80}{3} = -26\frac{2}{3}.$$

4. $b_2=1,2$; $b_4=4,8$; т. к. все b_n больше нуля, то $q>0$;

$$b_4=b_2 \cdot q^2; q = \sqrt{\frac{b_4}{b_2}} = \sqrt{\frac{4,8}{1,2}} = 2; b_1 = \frac{b_2}{q} = \frac{1,2}{2} = 0,6;$$

$$S_8 = \frac{0,6(2^8 - 1)}{2 - 1} = 0,6 \cdot 255 = 153.$$

5. а) 0, (153)=0,153153...=0,153+0,000153+... 0,153; 0,000153; ... — ге-

ом. прогр. $b_1=0,153$; $q=0,001$; 0,(153)=S= $\frac{0,153}{1-0,001}=\frac{153}{999}=\frac{17}{111}$.

б) 0,3(2)=0,3222...=0,3+0,02+0,002+... 0,02; 0,002; ... — геом. прогр.

$$b_1=0,02; q=0,1; 0,3(2)=0,3+S=0,3+\frac{0,02}{1-0,1} = 0,3+\frac{0,02}{0,9} = \frac{3}{10} + \frac{2}{90} = \frac{29}{90}.$$

Вариант 3

1. $b_1 = -125, q = \frac{1}{5}; b_3 = b_1 \cdot q^2 = -125 \cdot \frac{1}{25} = -5 = -0,2.$

2. $b_1 = 4, q = 2; S_8 = \frac{b_1(q^8 - 1)}{q - 1} = \frac{4 \cdot (2^8 - 1)}{2 - 1} = 4 \cdot 255 = 1020.$

3. 36; -12; 4; ... — геом. прогр. $b_1 = 36, q = -\frac{12}{36} = -\frac{1}{3};$

$$S = \frac{b_1}{1 - q} = \frac{36}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{36 \cdot 3}{4} = 27.$$

4. $b_3 = 0,05, b_5 = 0,45;$ т. к. все b_n больше нуля, то $q = 0;$

$$b_5 = b_3 \cdot q^2, q = \sqrt{\frac{b_5}{b_3}} = \sqrt{\frac{0,45}{0,05}} = 3; b_1 = \frac{b_3}{q^2} = \frac{0,05}{9};$$

$$S_8 = \frac{0,05(3^8 - 1)}{9 \cdot (3 - 1)} = \frac{328}{9 \cdot 2} = \frac{164}{9} = 18 \frac{2}{9}.$$

5. а) $0,(162) = 0,162162... = 0,162 + 0,000162 + ... 0,162; 0,000162; ...$ — геом.

прогр. $b_1 = 0,162, q = 0,001; 0,(162) = S = \frac{0,162}{1 - 0,001} = \frac{162}{999} = \frac{18}{111};$

б) $0,8(4) = 0,8444... = 0,8 + 0,04 + 0,004 + 0,0004 + ... 0,04; 0,004; ...$ — геом.

прогр. $b_1 = 0,04; q = 0,1; 0,8(4) = 0,8 + s = 0,8 + \frac{0,04}{1 - 0,1} = 0,8 + \frac{4}{90} = \frac{76}{90}.$

Вариант 4

1. $b_1 = 100000, q = \frac{1}{5}; b_9 = b_1 \cdot q^8 = 100000 \cdot \frac{1}{5^8} = 0,256.$

$$2. b_1=6, q=4; S_5 = \frac{b_1(q^5 - 1)}{q - 1} = \frac{6 \cdot (4^5 - 1)}{4 - 1} = 2046.$$

$$3. -54; 18; -6; \dots \text{ — геом. прогр. } b_1=-54, q=-\frac{1}{3};$$

$$S = \frac{b_1}{1 - q} = \frac{-54}{1 + \frac{1}{3}} = -\frac{54 \cdot 3}{4} = -40,5.$$

$$4. b_3=3,6, b_5=32,4; \text{ т. к. все } b_n \text{ больше нуля, то } q > 0; b_5 = b_3 \cdot q^2,$$

$$q = \sqrt{\frac{b_5}{b_3}} = \sqrt{\frac{32,4}{3,6}} = 3; b_1 = \frac{b_3}{q^2} = \frac{3,6}{9} = 0,4; S_5 = \frac{0,4(3^5 - 1)}{3 - 1} = \frac{0,4 \cdot 242}{2} = 48,4.$$

$$5. \text{ а) } 0,(72)=0,7272\dots=0,72+0,0072+\dots \quad 0,72; 0,0072; \dots \text{ — геом. прогр.}$$

$$b_1=0,72, q=0,01; 0,(72)=S = \frac{0,72}{1 - 0,01} = \frac{72}{99} = \frac{8}{11};$$

$$\text{ б) } 0,7(4)=0,7444\dots=0,7+0,04+0,004+0,0004+\dots \quad 0,04; 0,004; \dots \text{ — геом.}$$

$$\text{ прогр. } b_1 = 0,04; q = 0,1; 0,7(4) = 0,7 + s = 0,7 + \frac{0,04}{1 - 0,1} = 0,7 + \frac{4}{90} = \frac{67}{90}.$$

К-5А. Вариант 1

$$1. \text{ а) } \sin 300^\circ = \sin(360^\circ - 60^\circ) = -\sin 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\text{ б) } \operatorname{tg}\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -\operatorname{tg}\frac{2\pi}{3} = -\operatorname{tg}\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}.$$

$$2. \text{ а) } \sin(\pi + \alpha) + \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\sin \alpha - \sin \alpha = -2 \sin \alpha;$$

$$\text{ б) } \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) - \operatorname{ctg}(2\pi - \alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha = 0;$$

$$\text{ в) } \cos 2\alpha + 2 \sin^2 \alpha (\pi - \alpha) = \cos 2\alpha + 2 \sin^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha + 2 \sin^2 \alpha = 1.$$

$$3. \frac{\sin 2\alpha + \cos(\pi - \alpha)\sin \alpha}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)} = \frac{2\sin - \cos \alpha - \sin \alpha - \cos \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\cos \alpha \sin \alpha}{\cos \alpha} = \sin \alpha .$$

$$4. \left(\frac{\cos 2\alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha}\right)^2 - \sin 2\alpha = \left(\frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha}\right)^2 - \sin 2\alpha =$$

$$= \left(\frac{(\cos \alpha - \sin \alpha)(\cos \alpha + \sin \alpha)}{\cos \alpha - \sin \alpha}\right)^2 - \sin 2\alpha =$$

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha + 2\sin \alpha \cdot \cos \alpha - 2\sin \alpha \cdot \cos \alpha = 1 .$$

Вариант 2

$$1. a) \cos(-210^0) = \cos 210^0 = \cos(180^0 + 30^0) = -\cos 30^0 = -\frac{\sqrt{3}}{2} ;$$

$$б) \operatorname{tg} \frac{4}{3} \pi = \operatorname{tg}\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = \sqrt{3} .$$

$$2. a) \sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) - \cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha + \cos \alpha = 0 ;$$

$$б) \operatorname{tg}(\pi + \alpha) + \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \alpha = 2\operatorname{tg} \alpha .$$

$$3. \frac{\sin(\pi - 2\alpha)}{1 + \cos 2\alpha} = \frac{\sin 2\alpha}{1 + 2\cos^2 \alpha - 1} = \frac{2\sin \alpha - \cos \alpha}{2\cos^2 \alpha} = \operatorname{tg} \alpha , \text{ ч.т.д.}$$

$$4. (\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha) \operatorname{tg} 2\alpha = \left(\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} - \operatorname{tg} \alpha\right) \cdot \frac{2\operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{\operatorname{tg} \alpha} \cdot \frac{2\operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} = 2 .$$

Вариант 3

$$1. a) \sin(-240^0) = -\sin 240^0 = -\sin(180^0 + 60^0) = \sin 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{2} ;$$

$$б) \operatorname{tg} \frac{3}{4} \pi = \operatorname{tg}\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = -1 .$$

$$2. \text{ a) } \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \cos(\pi - \alpha) = \cos \alpha + \cos \alpha = 2 \cos \alpha ;$$

$$\text{б) } \operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) + \operatorname{ctg}(\pi + \alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha = 0 ;$$

$$\text{в) } \frac{\cos 2\alpha}{\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha)} = 1 .$$

$$3. \frac{\sin 2\alpha}{1 - \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right)} = \frac{\sin 2\alpha}{1 - \cos 2\alpha} = \frac{\sin 2\alpha}{1 - 1 + 2 \sin^2 \alpha} = \frac{2 \sin \alpha - \cos \alpha}{2 \sin^2 \alpha} = \operatorname{ctg} \alpha , \text{ ч.т.д.}$$

$$\begin{aligned} 4. \sin 2\alpha + \left(\frac{\cos 2\alpha}{\cos \alpha + \sin \alpha}\right)^2 &= \sin 2\alpha + \left(\frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\cos \alpha + \sin \alpha}\right)^2 = \\ &= \sin 2\alpha + \left(\frac{(\cos \alpha - \sin \alpha)(\cos \alpha + \sin \alpha)}{\cos \alpha + \sin \alpha}\right)^2 = \\ &= 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha + \cos^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha + \sin^2 \alpha = 1 . \end{aligned}$$

Вариант 4

1. а) $\cos 300^0 = \cos(360^0 - 60^0) = \cos 60^0 = 0,5$; б) $\operatorname{tg}\left(-\frac{5\pi}{4}\right) = -\operatorname{tg}\frac{5\pi}{4} =$
 $= \operatorname{tg}\left(-\frac{5\pi}{4}\right) = -\operatorname{tg}\frac{5\pi}{4} = -\operatorname{tg}\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = -\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = -1$.

2. а) $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) - \sin(2\pi - \alpha) = -\sin\alpha + \sin\alpha = 0$; б) $\operatorname{tg}(2\pi + \alpha) - \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) =$
 $= \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\alpha = 2\operatorname{tg}\alpha$; в) $\frac{4\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha} = \frac{2\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = 2\operatorname{tg}2\alpha$.

3. $\frac{\cos 2\alpha + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\sin\alpha}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)} = \frac{1 - 2\sin^2\alpha + \sin\alpha \cdot \sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1 - \sin^2\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\cos^2\alpha}{\cos\alpha} = \cos\alpha$.

4. $(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha)\sin 2\alpha = \left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)\sin 2\alpha = \frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\sin\alpha \cdot \cos\alpha} \cdot 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha = 2$.

К-6. Вариант 1

1. а) $2\sqrt[4]{81} + \sqrt[3]{-125} + \sqrt[6]{1} = 2 \cdot 3 - 5 + 1 = 2$; б) $\sqrt[3]{8 \cdot 0,027} = 2 \cdot 0,3 = 0,6$;

в) $\frac{\sqrt[4]{48}}{\sqrt[4]{3}} = \sqrt[4]{\frac{48}{3}} = \sqrt[4]{16} = 2$.

2. а) $x^3 = 5$; $x = \sqrt[3]{5}$; б) $y^4 = 15$; $y_{1,2} = \pm\sqrt[4]{15}$; в) $z^8 = -1$ — нет корней,
т.к. $E(x^8) = [0; +\infty)$.

3. $\sqrt[4]{6 + \sqrt{20}} \cdot \sqrt[4]{6 - \sqrt{20}} = \sqrt[4]{(6 + \sqrt{20})(6 - \sqrt{20})} = \sqrt[4]{36 - 20} = 2$.

4. а) $f(x) = 7x^8$; $f(-x) = 7 \cdot (-x)^8 = 7x^8 = f(x)$, значит, $f(x)$ — четная;

б) $f(x) = x^3 + x$; $f(-x) = (-x)^3 + (-x) = -x^3 - x = -(x^3 + x) = -f(x)$,
значит, $f(x)$ — нечетная.

5. $f(x) = x^{17}$;

а) $f(3,7) < f(4,1)$, т.к. $3,7 < 4,1$; б) $f(-7,2) < f(-6,3)$, т.к. $-7,2 < -6,3$.

Вариант 2

1. а) $5\sqrt[3]{-8} + \sqrt[4]{16} - \sqrt{1} = 5 \cdot (-2) + 2 - 1 = -10 + 2 - 1 = -9$;
б) $\sqrt[4]{81 \cdot 0,0016} = 30 \cdot 0,2 = 0,6$; в) $\frac{\sqrt[3]{40}}{\sqrt[3]{5}} = \sqrt[3]{\frac{40}{5}} = \sqrt[3]{8} = 2$.
2. а) $x^3 = 21$; $x = \sqrt[3]{21}$; б) $y^4 = 17$; $y_{1,2} = \pm\sqrt[4]{17}$; в) $z^4 = -8$;
нет корней, т.к. $E(x^4) = [0; +\infty)$.
3. $\sqrt[3]{12 - \sqrt{19}} \cdot \sqrt[3]{12 + \sqrt{19}} = \sqrt[3]{(12 - \sqrt{19})(12 + \sqrt{19})} = \sqrt[3]{144 - 19} = 5$.
4. а) $f(x) = 3x^{17}$; $f(-x) = 3 \cdot (-x)^{17} = -3x^{17} = -f(x)$, значит, $f(x)$ - нечетная
б) $f(x) = x^7 + x^4$; $f(-x) = (-x)^7 + (-x)^4 = -x^7 + x^4 \neq \pm f(x)$, значит, $f(x)$ - ни четная, ни нечетная.
5. $f(x) = x^{24}$; а) $f(5,3) < f(5,9)$, т.к. $|5,3| < |5,9|$;
б) $f(-3,8) > f(-2,9)$, т.к. $|-3,8| > |-2,9|$.

Вариант 3

1. а) $3\sqrt[4]{16} + \sqrt[3]{-27} + \sqrt[8]{1} = 3 \cdot 2 - 3 + 1 = 4$; б) $\sqrt[3]{125 \cdot 0,008} = 5 \cdot 0,2 = 1$;
в) $\frac{\sqrt[5]{128}}{\sqrt[5]{4}} = \sqrt[5]{\frac{128}{4}} = \sqrt[5]{32} = 2$.
2. а) $x^3 = 11$; $x = \sqrt[3]{11}$; б) $y^6 = 7$; $y_{1,2} = \pm\sqrt[6]{7}$;
в) $z^{12} = -4$ - нет корней, т.к. $E(x^{12}) = [0; +\infty)$.
3. $\sqrt[4]{11 - \sqrt{40}} \cdot \sqrt[4]{11 + \sqrt{40}} = \sqrt[4]{(11 - \sqrt{40})(11 + \sqrt{40})} = \sqrt[4]{121 - 40} = 3$.
4. а) $f(x) = 3x^5$; $f(-x) = 3 \cdot (-x)^5 = -3x^5 = -f(x)$, значит, $f(x)$ — нечетная;
б) $f(x) = x^6 + x^3$; $f(-x) = (-x)^6 + (-x)^3 = x^6 - x^3 \neq \pm f(x)$, значит, $f(x)$ — ни четная, ни нечетная.

5. $f(x) = x^{11}$; а) $f(1,7) < f(1,9)$, т.к. $1,7 < 1,9$; б) $f(-6,7) < f(-4,7)$, т.к. $-6,7 < -4,7$.

Вариант 4

1. а) $7\sqrt[4]{81} + \sqrt[3]{-125} + \sqrt[6]{1} = 7 \cdot 3 - 5 + 1 = 17$;
 б) $\sqrt[3]{0,125 \cdot 27} = 0,5 \cdot 3 = 1,5$; в) $\frac{\sqrt[4]{80}}{\sqrt[4]{5}} = \sqrt[4]{16} = 2$.
2. а) $x^5 = 8$; $x = \sqrt[5]{8}$; б) $y^7 = 11$; $y = \sqrt[7]{11}$;
 в) $z^6 = -3$ — нет корней, т.к. $E(x^6) = [0; +\infty)$.
3. $\sqrt[5]{7 - \sqrt{17}} \cdot \sqrt[5]{7 + \sqrt{17}} = \sqrt[5]{(7 - \sqrt{17})(7 + \sqrt{17})} = \sqrt[5]{49 - 17} = 2$.
4. а) $f(x) = 15x^6$; $f(-x) = 15 \cdot (-x)^6 = 15x^6 = f(x)$, значит $f(x)$ — четная;
 б) $f(x) = x^4 + x^3$; $f(-x) = (-x)^4 + (-x)^3 = x^4 - x^3 \neq \pm f(x)$, значит, $f(x)$ — ни четная, ни нечетная.
5. $f(x) = x^9$; а) $f(3,6) < f(3,8)$, т.к. $3,6 < 3,8$; б) $f(-4,1) < f(-3,7)$, т.к. $-4,1 < -3,7$.

К-6А. Вариант 1

1. $a_1 = 7$, $d = 4$; $a_{18} = a_1 + 17d = 7 + 17 \cdot 4 = 75$.
2. $-8; -4; 0 \dots$ — арифм. прогр. $a_1 = -8$, $a_2 = -4$, $d = a_2 - a_1 = -4 - (-8) = 4$;
 $S_{16} = \frac{2a_1 + 15d}{2} \cdot 16 = (-16 + 15 \cdot 4) \cdot 8 = 352$.
3. $a_n = 5 - 2n$.
 Чтобы a_n являлась арифм. прогр-ей, нужно $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$;
 $a_{n-1} = 4 - 5(n-1) = 9 - 5n$; $a_{n+1} = 4 - 5(n+1) = -1 - 5n$;
 $4 - 5n = \frac{9 - 5n - 1 - 5n}{2}$ - верно, значит, (a_n) - ариф. прогр., ч.т.д.
4. $a_1 = 5$, $a_9 = 29$; $a_9 = a_1 + 8d$, $d = \frac{a_9 - a_1}{8} = \frac{29 - 5}{8} = 3$;
 $a_n = a_1 + d(n-1) = 5 + 3(n-1) = 2 + 3n$;
 $104 = 2 + 3n$; $n = \frac{102}{3} = 34 \in N$, значит, $104 = a_{34}$. Ответ: да.

5. 2, 4, 6, ... — арифм. пр.

$$a_1 = 2, d = 2; S_{50} = \frac{2a_1 + 49d}{2} \cdot 50 = \frac{4 + 98}{2} \cdot 50 = 2550.$$

Вариант 2

1. $a_1 = -8, d = 2; a_{20} = a_1 + 19d = -8 + 2 \cdot 19 = 30.$

2. 7; 11; 15; ... — арифм. прогр.; $a_1 = 7, a_2 = 11, d = a_2 - a_1 = 11 - 7 = 4;$

$$S_{18} = \frac{2a_1 + 17d}{2} \cdot 18 = (14 + 17 \cdot 4) \cdot 9 = 738.$$

3. $a_n = 4 - 5n;$ Чтобы a_n являлась арифм. прогр-ей, нужно

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}; a_{n-1} = 4 - 5(n-1) = 9 - 5n; a_{n+1} = 4 - 5(n+1) = -1 - 5n;$$

$$4 - 5n = \frac{9 - 5n - 1 - 5n}{2} \text{ — верно, значит, } (a_n) \text{ — арифм. прогр., ч.т.д.}$$

4. $a_1 = -1, a_{10} = -46; a_{10} = a_1 + 9d, d = \frac{a_{10} - a_1}{9} = \frac{-46 + 1}{9} = -5;$

$$a_n = a_1 + d(n-1) = -1 - 5(n-1) = 4 - 5n; -86 = 4 - 5n,$$

$$n = 18 \in N, \text{ значит, } -86 = a_{18}.$$

Ответ: да.

5. 2; 3; 4; ...; 92 -арифм. прогр.; $a_1 = 2, d = 1; a_n = 2 + 1(n-1) = 1 + n;$

$92 = 1 + n, n = 91,$ значит $92 = a_{91};$

$$S = S_{91} = \frac{a_1 + a_{91}}{2} \cdot 91 = \frac{2 + 92}{2} \cdot 91 = 47 \cdot 91 = 4277.$$

Вариант 3

1. $a_1 = 30, d = -2; a_{19} = a_1 + 18d = 30 - 18 \cdot 2 = -6.$

2. -16; -10; -4; ... — арифм. прогр.

$$a_1 = -16, a_2 = -10, d = a_2 - a_1 = -10 - (-16) = 6;$$

$$S_{17} = \frac{2a_1 + 16d}{2} \cdot 17 = \frac{-32 + 96}{2} \cdot 17 = 544.$$

3. $a_n = 2 + 5n.$ Чтобы a_n являлась арифм. прогр-ей, нужно

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}; a_{n-1} = 2 + 5(n-1) = 5n - 3; a_{n+1} = 2 + 5(n+1) = 5n + 7;$$

$$2 + 5n = \frac{5n - 3 + 5n + 7}{2} \text{ — верно, значит, } (a_n) \text{ -арифм. прогр. ч.т.д.}$$

4. $a_1 = 3, a_7 = -9$; $a_7 = a_1 + 6d, d = \frac{a_7 - a_1}{6} = \frac{-9 - 3}{6} = -2$;
 $a_n = a_1 + d(n-1) = 3 + (-2) \cdot (n-1) = 5 - 2n$;
 $-35 = 5 - 2n, 2n = 40, n = 20 \in N$, значит, $-35 = a_{20}$. Ответ: является.

5. 1; 3; 5; ... — арифм. прогр. $a_1 = 1, d = 2$; $S_{50} = \frac{2 + 2 \cdot 49}{2} \cdot 50 = 2500$.

Вариант 4

1. $a_1 = -10, d = -3$; $a_{21} = a_1 + 20d = -10 - 20 \cdot 3 = -70$.

2. 10; 6; 2; ... — арифм. прогр. $a_1 = 10, a_2 = 6, d = a_2 - a_1 = 6 - 10 = -4$;
 $S_{18} = \frac{2a_1 + 17d}{2} \cdot 18 = (20 - 17 \cdot 4) \cdot 9 = -432$.

3. $a_n = -10 + 3n$;

Чтобы a_n являлась арифм. прогр-ей, нужно $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$;

$a_{n-1} = -10 + 3(n-1) = 3n - 13$; $a_{n+1} = -10 + 3(n+1) = 3n - 7$;

$-10 + 3n = \frac{3n - 13 + 3n - 7}{2}$ верно, значит, (a_n) — арифм. прогр. ч.т.д.

4. $a_1 = -2, a_{20} = -192$; $a_{20} = a_1 + 19d, d = \frac{a_{20} - a_1}{19} = \frac{-192 + 2}{19} = -10$;

$a_n = a_1 + d(n-1) = -2 - 10(n-1) = 8 - 10n$; $-92 = 8 - 10n$; $10n = 100$;

$n = 10$, значит, $-92 = a_{10}$. Ответ: является.

5. 2; 3; 4; ...; 102 - арифм. прогр. $a_1 = 2, d = 1$; $a_n = n + 1$; $102 = n + 1$;

$n = 101$, значит, $102 = a_{101}$;

$S = S_{101} = \frac{a_1 + a_{101}}{2} \cdot 101 = \frac{2 + 102}{2} \cdot 101 = 52 \cdot 101 = 5252$.

К-7. Вариант 1

1. а) $3 \cdot 16^{1/2} = 3 \cdot 4 = 12$; б) $27^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{27^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{3}$.

2. а) $a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{4}} = a^{\frac{1}{2} + \frac{1}{4}} = a^{\frac{3}{4}}$; б) $\frac{x^{\frac{3}{4}} \cdot x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{4}}} = x^{\frac{3}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}} = x$;

в) $\left(c^{\frac{2}{3}}\right)^3 \cdot c^{-\frac{3}{2}} = c^2 \cdot c^{-\frac{3}{2}} = c^{2 - \frac{3}{2}} = c^{\frac{1}{2}}$.

3. $y^{\frac{5}{3}} \cdot \sqrt[3]{y} = y^{\frac{5}{3}} \cdot y^{\frac{1}{3}} = y^{\frac{5}{3} + \frac{1}{3}} = y^2$.

4. а) $\frac{x - 5x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}} - 5} = \frac{x^{\frac{1}{2}} \left(x^{\frac{1}{2}} - 5\right)}{x^{\frac{1}{2}} - 5} = x^{\frac{1}{2}}$; б) $\frac{a^{\frac{1}{2}} - 4}{a - 16} = \frac{a^{\frac{1}{2}} - 4}{\left(a^{\frac{1}{2}} - 4\right)\left(a^{\frac{1}{2}} + 4\right)} = \frac{1}{a^{\frac{1}{2}} + 4}$.

5. $\left(\frac{a}{a^{0,5} \cdot b^{0,5} + b} - \frac{b^{0,5}}{a^{0,5} + b^{0,5}}\right) \cdot \frac{3b^{1,5}}{a^{0,5} - b^{0,5}} =$
 $= \left(\frac{a}{b^{0,5}(a^{0,5} + b^{0,5})} - \frac{b^{0,5}}{a^{0,5} + b^{0,5}}\right) \cdot \frac{3b^{1,5}}{a^{0,5} - b^{0,5}} =$
 $= \frac{a - b}{b^{0,5}(a^{0,5} + b^{0,5})} \cdot \frac{3b^{1,5}}{a^{0,5} - b^{0,5}} = \frac{3(a - b)b}{a - b} = 3b$.

Вариант 2

1. а) $5 \cdot y^{\frac{1}{2}} = 5 \cdot 3 = 15$; б) $125^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{125^{1/3}} = \frac{1}{5} = 0,2$.

2. а) $b^{\frac{1}{3}} \cdot b^{-\frac{1}{6}} = b^{\frac{1}{3} - \frac{1}{6}} = b^{\frac{1}{6}}$; б) $\frac{y^{\frac{2}{3}} \cdot y^{-1}}{y^{\frac{1}{3}}} = y^{\frac{2}{3} - 1 - \frac{1}{3}} = y^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{y^{2/3}}$;

в) $\left(a^{\frac{3}{4}}\right)^4 \cdot a^{-\frac{3}{2}} = a^3 \cdot a^{-\frac{3}{2}} = a^{\frac{3}{2}}$.

3. $x^{\frac{7}{4}} \cdot \sqrt[4]{x} = x^{\frac{7}{4}} \cdot x^{\frac{1}{4}} = x^{\frac{7}{4} + \frac{1}{4}} = x^2$.

4. а) $\frac{y^{\frac{1}{2}} + 7}{y + 7y^{\frac{1}{2}}} = \frac{y^{\frac{1}{2}} + 7}{y^{\frac{1}{2}} \left(y^{\frac{1}{2}} + 7\right)} = \frac{1}{y^{\frac{1}{2}}}$; б) $\frac{b-9}{b^{\frac{1}{2}} + 3} = \frac{\left(b^{\frac{1}{2}} - 3\right) \left(b^{\frac{1}{2}} + 3\right)}{b^{\frac{1}{2}} + 3} = b^{\frac{1}{2}} - 3$.

5. $\left(\frac{c^{0,5}}{c^{0,5} - d^{0,5}} - \frac{d}{c - c^{0,5}d^{0,5}}\right) \cdot \frac{5c^{1,5}}{c^{0,5} + d^{0,5}} =$
 $= \left(\frac{c^{0,5}}{c^{0,5} - d^{0,5}} - \frac{d}{c^{0,5}(c^{0,5} - d^{0,5})}\right) \cdot \frac{5c^{1,5}}{c^{0,5} + d^{0,5}} =$
 $= \frac{c - d}{c^{0,5}(c^{0,5} - d^{0,5})} \cdot \frac{5c^{1,5}}{c^{0,5} + d^{0,5}} = \frac{5c(c - d)}{c - d} = 5c$.

Вариант 3

1. а) $14 \cdot 8^{1/3} = 14 \cdot 2 = 28$; б) $32^{-1/5} = \frac{1}{32^{1/5}} = \frac{1}{2} = 0,5$.

2. а) $x^{1/2} \cdot x^{-1/6} = x^{1/2 - 1/6} = x^{1/3}$; б) $\frac{a \cdot a^{-3/8}}{a^{1/4}} = a^{1 - 3/8 - 1/4} = a^{3/8}$;

в) $\left(b^{1/8}\right)^8 \cdot b^{-1/3} = b \cdot b^{-1/3} = b^{1 - 1/3} = b^{2/3}$.

3. $\sqrt[3]{a^5} \cdot a^{-1/6} = a^{5/3} \cdot a^{-1/6} = a^{5/3 - 1/6} = a^{3/2}$.

4. а) $\frac{a+3a^{1/2}}{a^{1/2}+3} = \frac{a^{1/2}\left(a^{1/2}+3\right)}{a^{1/2}+3} = a^{1/2}$; б) $\frac{x-36}{x^{1/2}-6} = \frac{\left(x^{1/2}-6\right)\left(x^{1/2}+6\right)}{x^{1/2}-6} = x^{1/2}+6$.

5. $\left(\frac{a+b}{a^{1,5}-a^{0,5}b} - \frac{a-b}{a^{1,5}+a^{0,5}b}\right) \cdot \frac{a^2-b^2}{a^{0,5}} =$
 $= \left(\frac{a+b}{a^{0,5}(a-b)} - \frac{a-b}{a^{0,5}(a+b)}\right) \cdot \frac{a^2-b^2}{a^{0,5}} =$
 $= \frac{a^2+2ab+b^2-a^2+2ab-b^2}{a^{0,5}(a-b)(a+b)} \cdot \frac{(a-b)(a+b)}{a^{0,5}} = \frac{4ab}{a} = 4b$.

Вариант 4

1. а) $0,3 \cdot 32^{1/5} = 0,3 \cdot 2 = 0,6$; б) $16^{-1/4} = \frac{1}{16^{1/4}} = \frac{1}{2} = 0,5$.

2. а) $a^{2/3} \cdot a^{-1/6} = a^{2/3 - 1/6} = a^{1/2}$; б) $\frac{x \cdot x^{-1/2}}{x^{1/4}} = x^{1 - 1/2 - 1/4} = x^{1/4}$;

в) $\left(c^{1/6}\right)^6 \cdot c^{-3/7} = c \cdot c^{-3/7} = c^{1 - 3/7} = c^{4/7}$.

$$3. \sqrt[3]{a^5} \cdot a^{-\frac{2}{3}} = a^{\frac{5}{3}} \cdot a^{-\frac{2}{3}} = a^{\frac{5-2}{3}} = a.$$

$$4. \text{ а) } \frac{15x^2+x}{15+x^2} = \frac{x^2 \left(15+x^2 \right)}{15+x^2} = x^{\frac{1}{2}}; \text{ б) } \frac{x-121}{x^{\frac{1}{2}}+11} = \frac{\left(x^{\frac{1}{2}}-11 \right) \left(x^{\frac{1}{2}}+11 \right)}{x^{\frac{1}{2}}+11} = x^{\frac{1}{2}}-11.$$

$$5. \left(\frac{x-y}{x^{1,5}+x^{0,5}y} - \frac{x+y}{x^{1,5}-x^{0,5}y} \right) \cdot \frac{y^2-x^2}{xy} = \left(\frac{x-y}{x^{0,5}(x+y)} - \frac{x+y}{x^{0,5}(x-y)} \right) \cdot \frac{y^2-x^2}{xy} =$$

$$= -\frac{x^2-2xy+y^2-x^2-2xy-y^2}{x^{0,5}(x+y)(x-y)} \cdot \frac{(x-y)(x+y)}{xy} = \frac{4xy}{x^{0,5} \cdot xy} = \frac{4}{x^{0,5}}.$$

К-7А. Вариант 1

$$1. b_1 = -25, q = -\frac{1}{5}; \quad b_7 = b_1 \cdot q^6 = -25 \cdot \left(\frac{1}{5} \right)^6 = -\frac{5^2}{5^6} = -\frac{1}{625}.$$

$$2. b_1 = 11, q = 2; \quad S_5 = \frac{b_1(q^5-1)}{q-1} = \frac{11(2^5-1)}{2-1} = 11 \cdot 31 = 341.$$

3. 15; 5; $1\frac{1}{3}$; ... — геом. прогр.

$$b_1 = 15, b_2 = 5, q = \frac{b_1}{b_2} = \frac{1}{3}; \quad S = \frac{b_1}{1-q} = \frac{15}{1-\frac{1}{3}} = \frac{15 \cdot 3}{2} = 22,5.$$

$$4. b_5 = 81, b_3 = 36; \quad b_5 = b_3 \cdot q^2; \quad q = \pm \sqrt{\frac{b_5}{b_3}} = \pm \sqrt{\frac{81}{36}} = \pm 1,5;$$

$$b_1 = \frac{b_3}{q^2} = \frac{36}{2,25} = 16; \quad \text{если } q = 1,5, \text{ то } S_5 = \frac{16 \cdot (1,5^5 - 1)}{1,5 - 1} = 211;$$

$$\text{если } q = -1,5, \text{ то } S_5 = \frac{16 \cdot (-1,5^5 - 1)}{-1,5 - 1} = 55.$$

5. а) 0,(31)=0,3131...=0,31+0,0031+...0,31; 0,0031;... — геом. прогр.

$$b_1 = 0,31; q = 0,01; \quad 0,(31) = S = \frac{0,31}{1-0,01} = \frac{31}{99}. \quad \text{Ответ: } 31/99.$$

б) 0,5(6)=0,566...=0,5+0,06+0,006+...0,06; 0,006;...-геом. прогр.

$$b_1 = 0,06; q = 0,1; 0,5(6) = 0,5 + S = \frac{1}{2} + \frac{0,06}{1-0,1} = \frac{1}{2} + \frac{6}{90} = \frac{51}{90}.$$

Вариант 2

$$1. b_1 = 4, q = \frac{1}{4}; b_6 = b_1 \cdot q^5 = 4 \cdot \frac{1}{4^5} = \frac{1}{256}.$$

$$2. b_1 = 4, q = 2; S_7 = \frac{b_1(q^7 - 1)}{q - 1} = \frac{4(2^7 - 1)}{2 - 1} = 4 \cdot 127 = 508.$$

3. $1; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \dots$ — геом. прогр.

$$b_1 = 1, b_2 = \frac{1}{2}, q = \frac{b_2}{b_1} = \frac{1}{2}; S = \frac{b_1}{1 - q} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2.$$

$$4. b_2 = 4, b_4 = 1; b_4 = b_2 \cdot q^2, q = \pm \sqrt{\frac{b_4}{b_2}} = \pm \frac{1}{2}; b_1 = \frac{b_2}{q};$$

$$\text{Если } q = \frac{1}{2}, \text{ то } b_1 = 8; S_6 = \frac{8 \cdot \left(\frac{1}{2^6} - 1\right)}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{8 \cdot 63 \cdot 2}{64} = 15,75;$$

$$\text{Если } q = -\frac{1}{2}, \text{ то } b_1 = -8; S_6 = \frac{-8 \cdot \left(\frac{1}{2^6} - 1\right)}{-\frac{1}{2} - 1} = -5,25.$$

5. а) $0,3(1) = 0,313131\dots = 0,31 + 0,0031 + 0,000031 + \dots$; $0,31; 0,0031; \dots$ — геом. прогр. $b_1 = 0,31; q = 0,1; 0,3(1) = S = \frac{0,31}{1 - 0,01} = \frac{31}{99};$

б) $0,2(3) = 0,233\dots = 0,2 + 0,03 + 0,003\dots$; $0,03; 0,003; \dots$ — геом. прогр.

$$b_1 = 0,03; q = 0,1; 0,2(3) = 0,2 + S = 0,2 + \frac{0,03}{1 - 0,1} = \frac{2}{10} + \frac{3}{90} = \frac{2}{10} + \frac{1}{30} = \frac{7}{30}.$$

Вариант 3

1. $b_1 = -18, q = \frac{1}{3}; b_8 = b_1 \cdot q^7 = -18 \cdot \frac{1}{3^7} = -\frac{2}{243}$.

2. $b_1 = 5, q = 2; S_8 = \frac{b_1(q^8 - 1)}{q - 1} = \frac{5 \cdot (2^8 - 1)}{2 - 1} = 5 \cdot 255 = 1275$.

3. -16; -8; -4; ... — геом. прогр.

$$b_1 = -16, b_2 = -8, q = \frac{b_2}{b_1} = \frac{1}{2}; S = \frac{b_1}{1 - q} = \frac{-16}{1 - \frac{1}{2}} = -32.$$

4. $b_3 = -4, b_5 = -16; b_5 = b_3 \cdot q^2, q = \pm \sqrt{\frac{b_5}{b_3}} = \pm 2; b_1 = \frac{b_3}{q^2} = -1$.

Если $q=2$, то $S_8 = \frac{-1(2^8 - 1)}{2 - 1} = -255$.

Если $q=-2$, то $S_8 = \frac{-1(2^8 - 1)}{-2 - 1} = \frac{255}{3} = 85$. Ответ: -255 или 85.

5. а) $0,(23)=0,232323\dots=0,23+0,0023+0,000023+\dots+0,23; 0,0023; \dots$ — геом. прогр. $b_1 = 0,23; q = 0,01; 0,(23) = S = \frac{0,23}{1 - 0,01} = \frac{23}{99}$;

а) $0,1(3)=0,133\dots=0,1+0,03+0,003+\dots+0,03; 0,003; \dots$ — геом. прогр.

$$b_1 = 0,03; q = 0,1; 0,1(3) = 0,1 + S = \frac{1}{10} + \frac{0,03}{1 - 0,1} = \frac{1}{10} + \frac{1}{30} = \frac{4}{30} = \frac{2}{15}.$$

Вариант 4

1. $b_1 = -8, q = \frac{1}{2}; b_2 = b_1 \cdot q^6 = -8 \cdot \frac{1}{2^6} = -\frac{8}{64} = -\frac{1}{8}$.

2. $b_1 = -1, q = -2; S_7 = \frac{b_1(q^7 - 1)}{q - 1} = \frac{-1(-2^7 - 1)}{-2 - 1} = -\frac{129}{3} = -43$.

3. 9; -3; 1; ... — геом. прогр.

$$b_1 = 9, b_2 = -3, q = \frac{b_2}{b_1} = -\frac{1}{3}; S = \frac{b_1}{1 - q} = \frac{9}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{9 \cdot 3}{4} = 6,75.$$

$$4. b_2 = 0,08; b_4 = 1,28; b_4 = b_2 \cdot q^2; q = \pm \sqrt{\frac{b_4}{b_2}} = \pm 4; b_1 = \frac{b_2}{q}.$$

$$\text{Если } q=4, \text{ то } b_1=0,02; S_6 = \frac{0,02(4^6 - 1)}{4 - 1} = \frac{0,02 \cdot 4095}{3} = 27,3.$$

$$\text{Если } q=-4, \text{ то } b_1=-0,02; S_6 = \frac{-0,02(4^6 - 1)}{-4 - 1} = \frac{0,02 \cdot 4095}{5} = 16,38.$$

5. а) $0, (17)=0,1717\dots=0,17+0,0017\dots0,17; 0,0017; \dots$ — геом. прогр.

$$b_1 = 0,17; q = 0,01; 0, (17) = S = \frac{0,17}{1 - 0,01} = \frac{17}{99};$$

б) $0,3(5)=0,355\dots=0,3+0,05+0,005+\dots0,05; 0,005; \dots$ — геом. прогр.

$$b_1 = 0,05; q = 0,1; 0,3(5) = 0,3 + S = \frac{3}{10} + \frac{0,05}{1 - 0,1} = \frac{3}{10} + \frac{5}{90} = \frac{32}{90} = \frac{16}{45}.$$

К-8. Вариант 1

$$1. \text{ а) } 5 \sin 0^0 + 3 \cos 60^0 = 5 \cdot 0 + 3 \cdot 0,5 = 1,5; \text{ б) } 2 \sin \frac{\pi}{2} - 3 \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 2 \cdot 1 - 3 \cdot 1 = -1.$$

$$2. 1 - \sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha = 1 - \sin \alpha \cdot \cos \alpha \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = 1 - \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha.$$

$$3. \cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \frac{25}{169}} = -\frac{12}{13}; \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\frac{5 \cdot 13}{13 \cdot 12} = -\frac{5}{12}.$$

$$4. \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} + \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{\cos \alpha(1 + \cos \alpha) + \sin^2 \alpha}{\sin \alpha(1 + \cos \alpha)} =$$

$$= \frac{\cos \alpha + \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}{\sin \alpha(1 + \cos \alpha)} = \frac{\cos \alpha + 1}{\sin \alpha(1 + \cos \alpha)} = \frac{1}{\sin \alpha}.$$

$$5. \frac{1}{\sin x} - \sin x = \frac{1 - \sin^2 x}{\sin x} = \frac{\cos^2 x}{\sin x} = \frac{\cos^2 x}{\sin x} = \cos x \cdot \operatorname{ctg} x \quad \text{ч.т.д.}$$

Вариант 2

$$1. \text{ а) } \cos 180^0 + 4 \operatorname{tg} 45^0 = -1 + 4 \cdot 1 = 3; \text{ б) } 3 \cos \frac{\pi}{2} - 2 \sin \frac{\pi}{6} = 3 \cdot 0 - 2 \cdot \frac{1}{2} = -1.$$

$$2. 1 - \operatorname{ctg} \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha = 1 - \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha.$$

$$3. \sin \alpha = -\sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \frac{64}{289}} = -\frac{15}{17}; \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{-15 \cdot 17}{17 \cdot 18} = -\frac{15}{18}.$$

$$4. \frac{1}{\operatorname{ctg} \alpha} = + \frac{\cos \alpha}{1 + \sin \alpha} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{1 + \sin \alpha} = \frac{\sin \alpha(1 + \sin \alpha) + \cos^2 \alpha}{\cos \alpha(1 + \sin \alpha)} =$$

$$= \frac{\sin \alpha + \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\cos \alpha(1 + \sin \alpha)} = \frac{1 + \sin \alpha}{\cos \alpha(1 + \sin \alpha)} = \frac{1}{\cos \alpha}.$$

$$5. \frac{1}{\cos \beta} - \cos \beta = \frac{1 - \cos^2 \beta}{\cos \beta} = \frac{\sin^2 \beta}{\cos \beta} = \sin \beta \cdot \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = \sin \beta \operatorname{tg} \beta, \quad \text{ч.т.д.}$$

Вариант 3

$$1. \text{ а) } 6 \sin 30^0 - 2 \operatorname{tg} 45^0 = 6 \cdot 0,5 - 2 \cdot 1 = 1; \text{ б) } 4 \sin \pi + 2 \cos \frac{\pi}{3} = 4 \cdot 0 + 2 \cdot 0,5 = 1.$$

$$2. (1 - \sin \alpha)(1 + \sin \alpha) = 1 - \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha.$$

$$3. \cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \frac{9}{25}} = -\frac{4}{5}; \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{3 \cdot 5}{5 \cdot 4} = \frac{3}{4}.$$

$$4. \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} + \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha} = \frac{\sin \alpha(1 - \cos \alpha) + \sin \alpha(1 + \cos \alpha)}{(1 + \cos \alpha)(1 - \cos \alpha)} =$$

$$= \frac{\sin \alpha - \sin \alpha \cdot \cos \alpha + \sin \alpha + \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{1 - \cos^2 \alpha} = \frac{2 \sin \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{2}{\sin \alpha}.$$

$$5. \frac{(1 + \cos \alpha)^2 - (1 - \cos \alpha)^2}{4 \cos \alpha} - \sin^2 \alpha =$$

$$= \frac{1 + 2 \cos \alpha + \cos^2 \alpha - 1 + 2 \cos \alpha - \cos^2 \alpha}{4 \cos \alpha} - \sin^2 \alpha =$$

$$= \frac{4 \cos \alpha}{4 \cos \alpha} - \sin^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha = \frac{\cos \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha}{\sin \alpha} =$$

$$= \operatorname{ctg} \alpha \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha, \text{ ч.т.д.}$$

Вариант 4

1. а) $3 \sin 180^0 - 2 \cos 60^0 = 3 \cdot 0 - 2 \cdot 0,5 = -1;$

б) $6 \sin \frac{\pi}{2} - 5 \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 6 \cdot 1 - 5 \cdot 1 = 1.$

2. $(1 - \cos \alpha)(1 + \cos \alpha) = 1 - \cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha.$

3. $\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \frac{3}{5}; \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\frac{3 \cdot 5}{5 \cdot 4} = -\frac{3}{4}.$

4. $\frac{\cos \alpha}{1 - \sin \alpha} - \frac{\cos \alpha}{1 + \sin \alpha} = \frac{\cos \alpha(1 + \sin \alpha) - \cos \alpha(1 - \sin \alpha)}{(1 - \sin \alpha)(1 + \sin \alpha)} =$
 $= \frac{\cos \alpha + \cos \alpha \cdot \sin \alpha - \cos \alpha + \cos \alpha \cdot \sin \alpha}{1 - \sin^2 \alpha} = \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{2 \sin \alpha}{\cos \alpha} = 2 \operatorname{tg} \alpha.$

5. $\frac{(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 + (\sin \alpha - \cos \alpha)^2}{2} - \cos^2 \alpha =$
 $= \frac{\sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha}{2} - \cos^2 \alpha =$
 $= \frac{2}{2} - \cos^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha = \frac{\sin \alpha \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{\cos \alpha} =$
 $= \operatorname{tg} \alpha \cos \alpha \sin \alpha, \text{ ч.т.д.}$

К-8А (итоговая). Вариант 1

1. а) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} + (0,014)^0 - 4 \cdot 27^{\frac{2}{3}} = 3^2 + 1 - 4 \cdot (3^3)^{\frac{2}{3}} = 9 + 1 - 4 \cdot 9 = -26.$

б) $\frac{625^{\frac{1}{3}} \cdot 5}{25^{\frac{1}{3}}} = \frac{(5^4)^{\frac{1}{3}} \cdot 5}{(5^2)^{\frac{1}{3}}} = \frac{5^{\frac{4}{3}} \cdot 5}{5^{\frac{2}{3}}} = 5^{-\frac{4}{3} + 1 - \frac{2}{3}} = 5^{-1} = 0,2;$

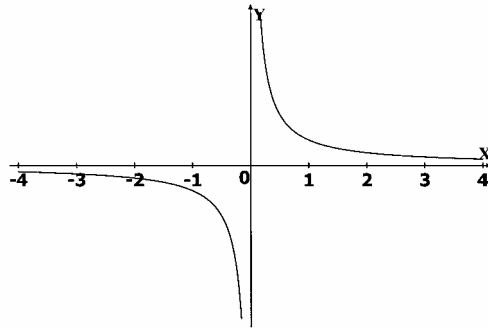
в) $(2 + \sqrt{3})^2 - \sqrt{48} - \sqrt[3]{125} = 4 + 4\sqrt{3} + 3 - \sqrt{16 \cdot 3} - 5 = 2 + 4\sqrt{3} - 4\sqrt{3} = 2;$

$$\begin{aligned}
 \text{r) } & \cos(-240^\circ) - \sin(-300^\circ) + \operatorname{tg}(225^\circ) = \cos 240^\circ + \sin 300^\circ + \operatorname{tg} 225^\circ = \\
 & \cos(180^\circ + 60^\circ) + \sin(360^\circ - 60^\circ) + \operatorname{tg}(180^\circ + 45^\circ) = \\
 & = -\cos 60^\circ - \sin 60^\circ + \operatorname{tg} 45^\circ = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 = \frac{1 - \sqrt{3}}{2}.
 \end{aligned}$$

$$2. \text{ a) } \frac{\sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} = \frac{\sin 2\alpha}{1 + 2\cos^2 \alpha - 1} = \frac{2\sin \alpha \cdot \cos \alpha}{2\cos^2 \alpha} = \operatorname{tg} \alpha;$$

$$\text{б) } \frac{2}{2-b^{\frac{1}{2}}} - \frac{4}{4-b} = \frac{2}{2-b^{\frac{1}{2}}} - \frac{4}{\left(2-b^{\frac{1}{2}}\right)\left(2+b^{\frac{1}{2}}\right)} = \frac{4+2b^{\frac{1}{2}}-4}{\left(2-b^{\frac{1}{2}}\right)\left(2+b^{\frac{1}{2}}\right)} = \frac{2b^{\frac{1}{2}}}{4-b}.$$

$$3. \ y = \frac{1}{x}; \quad y \geq 0 \text{ при } x \geq 0; \quad y \leq 0 \text{ при } x \leq 0.$$



4. 2; 4; 6; ... — арифм. пр.

$$\alpha_1 = 2, \beta = 2; \quad \delta_{50} = \frac{2\alpha_1 + 49\beta}{2} \cdot 50 = \frac{2 \cdot 2 + 49 \cdot 2}{2} \cdot 50 = 51 \cdot 50 = 2550.$$

5. $\alpha_1 = -3, \alpha_2 = 8; \quad \beta = \alpha_2 - \alpha_1 = 8 - (-3) = 11;$

$$D_{11} = \frac{2\alpha_1 + 10\beta}{2} \cdot 11 = \frac{-6 + 110}{2} \cdot 11 = 52 \cdot 11 = 572.$$

Вариант 2

$$1. \text{ a) } (16,017)^0 - \left(\frac{1}{5}\right)^{-3} + 5 \cdot 16^{\frac{3}{4}} = 1 - 5^{-3} + 5 \cdot (2^4)^{\frac{3}{4}} = 1 - 125 + 5 \cdot 2^3 = 1 - 125 + 40 = -84;$$

$$\text{б) } \frac{9^{-1} \cdot 27^{\frac{2}{5}}}{3^{\frac{1}{5}}} = \frac{(3^2)^{-1} \cdot (3^3)^{\frac{2}{5}}}{3^{\frac{1}{5}}} = \frac{3^{-2} \cdot 3^{\frac{6}{5}}}{3^{\frac{1}{5}}} = 3^{-2 + \frac{6}{5} - \frac{1}{5}} = 3^{-1} = \frac{1}{3};$$

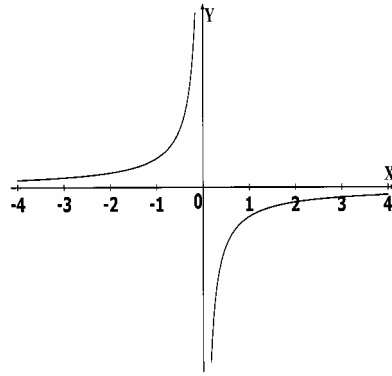
$$\text{в) } \sqrt{72} + (3 - \sqrt{2})^2 - \sqrt[4]{81} = \sqrt{2 \cdot 36} + 9 - 6\sqrt{2} + 2 - 3 = 6\sqrt{2} - 6\sqrt{2} + 8 = 8;$$

$$\begin{aligned} \text{г) } \sin(-390^\circ) - \cos(-780^\circ) + \sqrt{3} \operatorname{tg}(-120^\circ) &= -\sin 390^\circ - \cos 780^\circ - \sqrt{3} \operatorname{tg} 120^\circ = \\ &= -\sin(360^\circ + 30^\circ) - \cos(720^\circ + 60^\circ) - \sqrt{3} \operatorname{tg}(180^\circ - 60^\circ) = \\ &= -\sin 30^\circ - \cos 60^\circ + \sqrt{3} \operatorname{tg} 60^\circ = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 3 = 2. \end{aligned}$$

$$2. \text{ a) } (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = \sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha = 1 + \sin 2\alpha ;$$

$$\begin{aligned} \text{б) } \frac{1}{\alpha^{\frac{1}{2}} + 1} + \frac{2}{\alpha - 1} &= \frac{1}{\alpha^{\frac{1}{2}} + 1} + \frac{2}{\left(\alpha^{\frac{1}{2}} - 1\right)\left(\alpha^{\frac{1}{2}} + 1\right)} = \frac{\alpha^{\frac{1}{2}} - 1 + 2}{\left(\alpha^{\frac{1}{2}} + 1\right)\left(\alpha^{\frac{1}{2}} - 1\right)} = \\ &= \frac{\alpha^{\frac{1}{2}} + 1}{\left(\alpha^{\frac{1}{2}} + 1\right)\left(\alpha^{\frac{1}{2}} - 1\right)} = \frac{1}{\alpha^{\frac{1}{2}} - 1}. \end{aligned}$$

3. $y = -\frac{1}{x}$; $y \geq 0$ при $x \leq 0$;
 $y \leq 0$ при $x \geq 0$.



4. 1; 3; 5; ...; 99 — арифм. пр.

$$\alpha_1 = 1; \beta = 2; \eta = 50; \zeta = \zeta_{50} = \frac{2\alpha_1 + 49\beta}{2} \cdot 50 = \frac{2 + 2 \cdot 49}{2} \cdot 50 = 2500.$$

$$5. \beta_6 = 200; \rho = 10; \beta_6 = \beta_1 \cdot \rho^5; \beta_1 = \frac{\beta_6}{\rho^5} = \frac{200}{100000} = \frac{1}{500};$$

$$\zeta_6 = \frac{\beta_6 \cdot \rho - \beta_1}{\rho - 1} = \frac{200 \cdot 10 - \frac{1}{500}}{10 - 1} = 222,222.$$

Вариант 3

$$1. \text{ а) } 5 \cdot 32^{\frac{3}{5}} + (7,028)^0 - \left(\frac{1}{5}\right)^{-2} = 5 \left(2^5\right)^{\frac{3}{5}} + 1 - 5^2 = 5 \cdot 8 + 1 - 25 = 16;$$

$$\text{б) } \frac{64^{\frac{1}{5}} \cdot 2^{-2}}{4^{\frac{1}{10}}} = \frac{(2^6)^{\frac{1}{5}} \cdot 2^{-2}}{(2^2)^{\frac{1}{10}}} = \frac{2^{\frac{6}{5}} \cdot 2^{-2}}{2^{\frac{1}{5}}} = 2^{\frac{6}{5} - 2 - \frac{1}{5}} = 2^{-1} = 0,5;$$

$$\text{в) } \sqrt{20} + (\sqrt{5} - 1)^2 - \sqrt[3]{27} = \sqrt{5 \cdot 4} + 5 - 2\sqrt{5} + 1 - 3 = 2\sqrt{5} + 6 - 3 - 2\sqrt{5} = 3;$$

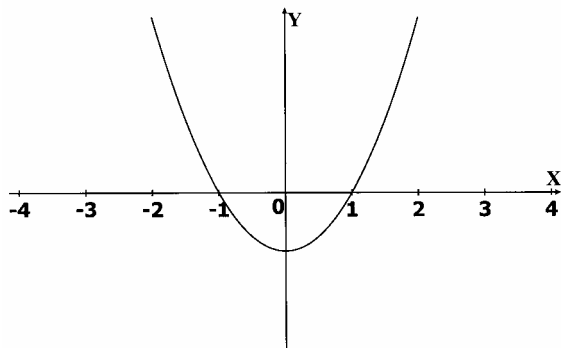
$$\begin{aligned} \text{г) } \sin(-225^\circ) - \sqrt{3} \cos(-390^\circ) - \operatorname{tg} 315^\circ &= -\sin 225^\circ - \sqrt{3} \cos 390^\circ - \operatorname{tg} 315^\circ = \\ &= -\sin(180^\circ + 45^\circ) - \sqrt{3} \cos(360^\circ + 30^\circ) - \operatorname{tg}(360^\circ - 45^\circ) = \\ \sin 45^\circ - \sqrt{3} \cos 30^\circ + \operatorname{tg} 45^\circ &= \frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{3}{2} + \frac{2}{2} = \frac{\sqrt{2} - 1}{2}. \end{aligned}$$

$$2. a) \frac{1 - \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{1 - 1 + 2\sin^2 \alpha}{2\sin \alpha - \cos \alpha} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha;$$

$$б) \frac{4}{4 - \alpha} + \frac{2 - \alpha^{0,5}}{2\alpha^{0,5} + \alpha} = \frac{4}{(2 - \alpha^{0,5})(2 + \alpha^{0,5})} + \frac{2 - \alpha^{0,5}}{\alpha^{0,5}(2 + \alpha^{0,5})} =$$

$$= \frac{4\alpha^{0,5} + 4 - 4\alpha^{0,5} + \alpha}{\alpha^{0,5}(2 - \alpha^{0,5})(2 + \alpha^{0,5})} = \frac{4 + \alpha}{\alpha^{0,5}(4 - \alpha)}.$$

$$3. y = \frac{2}{x}; \quad y \geq 0 \text{ при } x \geq 0; \quad y \leq 0 \text{ при } x \leq 0.$$



$$4. 10; 11; 12; \dots; 99 \text{ — арифм. пр. } \alpha_1 = 10, \beta = 1; \alpha_n = 10 + \beta(n-1) =$$

$$= 10 + n - 1 = 9 + n; 99 = 9 + n, n = 90, \text{ значит, } 99 = \alpha_{90};$$

$$S = S_{90} = \frac{2\alpha_1 + 89\beta}{2} \cdot 90 = (20 + 89) \cdot 45 = 4905. \text{ Ответ: } 4905.$$

$$5. \alpha_1 = 75, \alpha_2 = 60; \beta = \alpha_2 - \alpha_1 = -15;$$

$$S_{10} = \frac{2\alpha_1 + \beta \cdot 9}{2} \cdot 10 = (2 \cdot 75 - 9 \cdot 15) \cdot 5 = 75.$$

Вариант 4

$$1. a) (-5, 13)^0 + \left(\frac{1}{5}\right)^{-3} - 27^{\frac{4}{3}} = 1 + 5^3 - (3^3)^{\frac{4}{3}} = 1 + 125 - 3^4 = 126 - 81 = 45;$$

$$б) \frac{16^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{-1}}{4^{\frac{1}{3}}} = \frac{(2^4)^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{-1}}{(2^2)^{\frac{1}{3}}} = \frac{2^{\frac{4}{3}} \cdot 2^{-1}}{2^{\frac{2}{3}}} = 2^{\frac{4}{3} - 1 - \frac{2}{3}} = 2^{-3} = \frac{1}{8};$$

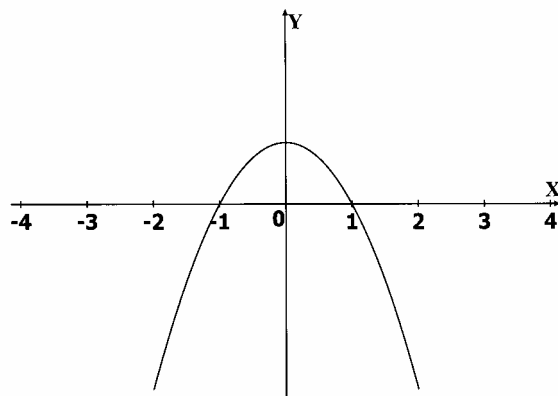
$$в) (2 + \sqrt{3})^2 - \sqrt[5]{32} - \sqrt{48} = 4 + 4\sqrt{3} + 3 - 2 - \sqrt{16 \cdot 3} = 5 + 4\sqrt{3} - 4\sqrt{3} = 5;$$

$$\begin{aligned}
 \text{r) } & \cos(-240^\circ) - \sqrt{2} \sin(-315^\circ) - \operatorname{tg}(-405^\circ) = \cos 240^\circ + \sqrt{2} \sin 315^\circ + \operatorname{tg} 405^\circ = \\
 & = \cos(180^\circ + 60^\circ) + \sqrt{2} \sin(360^\circ - 45^\circ) + \operatorname{tg}(360^\circ + 45^\circ) = \\
 & = -\cos 60^\circ - \sqrt{2} \sin 45^\circ + \operatorname{tg} 45^\circ = -\frac{1}{2} - \sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + 1 = -0,5 - 1 + 1 = -0,5.
 \end{aligned}$$

$$2. \text{ a) } (\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = \sin^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha = 1 - \sin 2\alpha;$$

$$\begin{aligned}
 \text{б) } & \frac{3 + \alpha^{0,5}}{\alpha - 3\alpha^{0,5}} - \frac{6}{\alpha - 9} = \frac{3 + \alpha^{0,5}}{\alpha^{0,5}(\alpha^{0,5} - 3)} - \frac{6}{(\alpha^{0,5} - 3)(\alpha^{0,5} + 3)} = \\
 & = \frac{\alpha + 6\alpha^{0,5} + 9 - 6\alpha^{0,5}}{\alpha^{0,5}(\alpha^{0,5} - 3)(\alpha^{0,5} + 3)} = \frac{\alpha + 9}{\alpha^{0,5}(\alpha - 9)}.
 \end{aligned}$$

$$3. y = -\frac{2}{x}; \quad y \geq 0 \quad \text{при } x \leq 0; \quad y \leq 0 \quad \text{при } x \geq 0.$$



$$\begin{aligned}
 4. & 100; 101; 102; \dots; 999 - \text{арифм. пр. } \alpha_1 = 100, \beta = 1; \\
 & \alpha_n = 100 + n - 1 = 99 + n; \quad 999 = 99 + n, \quad n = 900, \text{ значит } 999 = \alpha_{900}; \\
 & S = S_{900} = \frac{2\alpha_1 + 899\beta}{2} \cdot 900 = (200 + 899) \cdot 450 = 494550.
 \end{aligned}$$

$$5. \beta_5 = 81, \rho = 0,5; \quad \beta_5 = \beta_1 \cdot \rho^4, \quad \beta_1 = \frac{\beta_5}{\rho^4} = \frac{81}{\left(\frac{1}{2}\right)^4} = 81 \cdot 16;$$

$$S_5 = \frac{\beta_5 \cdot \rho - \beta_1}{\rho - 1} = \frac{81 \cdot 0,5 - 81 \cdot 16}{0,5 - 1} = \frac{81 \cdot 15,5}{0,5} = 2511.$$

К-9. Вариант 1

1. а) $\sin 150^\circ = \sin(180^\circ - 30^\circ) = \sin 30^\circ = 0.5$;
б) $\operatorname{tg} \frac{3\pi}{4} = \operatorname{tg}\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = -1$.
2. а) $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + \sin(\pi - \alpha) = -\sin \alpha + \sin \alpha = 0$;
б) $\sin(\alpha + \beta) - \sin \beta \cos \alpha = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta - \sin \beta \cos \alpha = \sin \alpha \cdot \cos \beta$;
в) $\cos 2\alpha + 2\sin^2 \alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha + 2\sin^2 \alpha = 1$.
3. $2\sin \alpha \cdot \cos \alpha \cos 2\alpha = \frac{1}{2} \cdot 2\sin 2\alpha \cdot \cos 2\alpha = \frac{1}{2} \sin 4\alpha$, ЧТД.
4. а) $\frac{\sin \alpha - \sin 3\alpha}{\cos 3\alpha + \cos \alpha} = \frac{-2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos 2\alpha}{2\cos 2\alpha \cdot \cos \alpha} = -\operatorname{tg} \alpha$;
б) $\frac{1 - \cos 2\alpha}{\sin(\pi - \alpha)} = \frac{1 - 1 + 2\sin^2 \alpha}{\sin \alpha} = 2\sin \alpha$.

Вариант 2

1. а) $\cos 210^\circ = \cos(180^\circ + 30^\circ) = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = -1$.
2. а) $\sin(2\pi + \alpha) - \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \sin \alpha + \sin \alpha = 2\sin \alpha$;
б) $\cos(\alpha - \beta) - \cos \alpha \cdot \cos \beta = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta - \cos \alpha \cos \beta = \sin \alpha \cdot \sin \beta$;
в) $\sin 2\alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha = \frac{2\sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha}{\cos \alpha} = 2\sin^2 \alpha$.
3. $\frac{4\sin \alpha \cdot \cos \alpha}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha} = \frac{2\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = 2\operatorname{tg} 2\alpha$, ЧТД.
4. а) $\frac{\cos 5\alpha - \cos \alpha}{\sin \alpha + \sin 5\alpha} = \frac{-2\sin 2\alpha \cdot \sin 3\alpha}{2\sin 3\alpha \cdot \cos 2\alpha} = -\operatorname{tg} 2\alpha$;
б) $\frac{1 + \cos 2\alpha}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)} = \frac{1 + 2\cos^2 \alpha - 1}{\cos \alpha} = 2\cos \alpha$.

Вариант 3

1. а) $\operatorname{tg}135^\circ = \operatorname{tg}(180^\circ - 45^\circ) = -\operatorname{tg}45^\circ = -1$;
б) $\sin\frac{4\pi}{3} = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.
2. а) $\cos(\pi + \alpha) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = -\cos\alpha + \cos\alpha = 0$;
б) $\sin(\alpha - \beta) + \sin\beta \cdot \cos\alpha = \sin\alpha \cdot \cos\beta - \cos\alpha \cdot \sin\beta + \sin\beta \cos\alpha = \sin\alpha \cdot \cos\beta$;
в) $2\cos^2\alpha - \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 2\cos^2\alpha + 1 = 1$.
3. $4\cos 2\alpha \cdot \sin\alpha \cos\alpha = 2\cos 2\alpha \cdot \sin 2\alpha = \sin 4\alpha$, ЧТД.
4. а) $\frac{\cos\alpha + \cos 3\alpha}{\sin 3\alpha - \sin\alpha} = \frac{2\cos 2\alpha \cdot \cos\alpha}{2\sin\alpha \cdot \cos 2\alpha} = \operatorname{ctg}\alpha$;
б) $(1 + \cos 2\alpha) \cdot \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = (1 + 2\cos^2\alpha - 1) \cdot \operatorname{tg}\alpha = 2\cos^2\alpha \cdot \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} =$
 $= 2\cos\alpha \cdot \sin\alpha = \sin 2\alpha$.

Вариант 4

1. а) $\operatorname{ctg}135^\circ = \operatorname{ctg}(90^\circ + 45^\circ) = -\operatorname{tg}45^\circ = -1$;
б) $\cos\frac{7\pi}{6} = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\cos\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.
2. а) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \operatorname{ctg}(\pi - \alpha) = \operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}\alpha = 0$;
б) $\cos(\alpha + \beta) + \sin\alpha \cdot \sin\beta = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta = \cos\alpha \cdot \cos\beta$;
в) $\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{2\sin\alpha}{2\cos\alpha \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha}$.
3. $\frac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{4\sin\alpha \cdot \cos\alpha} = \frac{\cos 2\alpha}{2\sin 2\alpha} = \frac{\operatorname{ctg}2\alpha}{2}$, ЧТД.
4. а) $\frac{\sin 2\alpha - \sin 4\alpha}{\cos 4\alpha + \cos 2\alpha} = \frac{-2\sin\alpha \cdot \cos 3\alpha}{2\cos\alpha \cdot \cos 3\alpha} = -\operatorname{tg}\alpha$;
б) $\frac{\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)}{1 - \cos 2\alpha} = \frac{\sin\alpha}{1 - 1 + 2\sin^2\alpha} = \frac{\sin\alpha}{2\sin^2\alpha} = \frac{1}{2\sin\alpha}$.

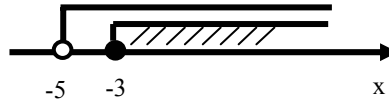
К-9А (итоговая). Вариант 1

$$1. \left(\frac{3+\alpha}{3-\alpha} - \frac{12\alpha}{9-\alpha^2} \right) \div \frac{3-\alpha}{3} = \left(\frac{3+\alpha}{3-\alpha} - \frac{12\alpha}{(3-\alpha)(3+\alpha)} \right) \cdot \frac{3}{3-\alpha} =$$

$$= \frac{9+6\alpha+\alpha^2-12\alpha}{(3-\alpha)(3+\alpha)} \cdot \frac{3}{3-\alpha} = \frac{\alpha^2-6\alpha+9}{(3-\alpha)^2 \cdot (3+\alpha)} \cdot 3 = \frac{(3-\alpha)^2 \cdot 3}{(3-\alpha)^2 \cdot (3+\alpha)} = \frac{3}{3+\alpha}.$$

$$2. \begin{cases} 3x+2 \geq x-4 \\ 5-3x < 20 \end{cases}; \begin{cases} 3x-x \geq -4-2 \\ 3x > 5-20 \end{cases}; \begin{cases} 2x \geq -6 \\ 3x > -15 \end{cases}; \begin{cases} x \geq -3 \\ x > -5 \end{cases}$$

Ответ: $x \geq -3$.

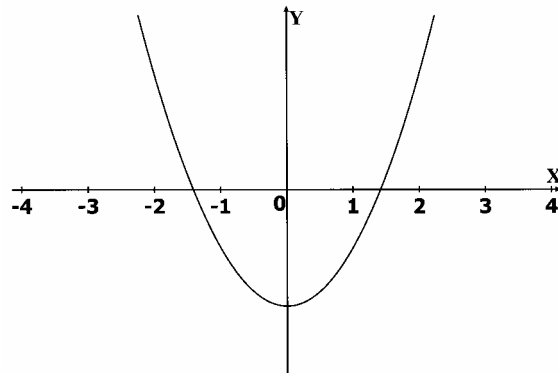


$$3. \frac{x-1}{3x^2-4x+1} = \frac{x-1}{3(x-1)\left(x-\frac{1}{3}\right)} = \frac{1}{3x-1};$$

$$3x^2-4x+1=0; \quad x_1 = \frac{4+2}{6} = 1; \quad x_2 = \frac{1}{3}.$$

4.

$$y = x^2 - 1; \quad y > 0 \text{ при } x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty); \quad y < 0 \text{ при } x \in (-1; 1).$$



$$5. \sin \alpha = -\sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = -\sqrt{1 - 0,36} = -0,8;$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha = 2 \cdot 0,6 \cdot (-0,8) = -0,96.$$

6. Пусть x — коэффициент пропорциональности. Тогда $7x$ г. и $3x$ г. — содержится в куске латуни, меди и цинка соответственно. Учитывая, что латунь весит 500г., получаем уравнение:

$$7x + 3x = 500; 10x = 500; x = 50;$$

50 — коэффициент пропорциональности.

$7 \cdot 50 = 350$ (г.) — меди в латуни; $3 \cdot 50 = 150$ (г.) — цинка в латуни.

7. Пусть x м — ширина. Тогда $(x + 30)$ м — длина, $x(x + 30)$ м² — площадь или 6175 м². Получаем уравнение: $x(x + 30) = 6175$;

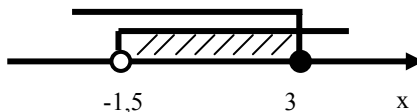
$$x^2 + 30x - 6175 = 0; x_1 = \frac{-30 + 160}{2} = 65; x_2 < 0 \text{ — не удовлетворяет ус-}$$

словию задачи. 65 м — ширина, $65 + 30 = 95$ м — длина.

Вариант 2.

$$1. \left(\frac{a-1}{a+1} - \frac{a}{a-1} \right) \cdot \frac{a+1}{1-3a} = \frac{a^2 - 2a + 1 - a - a^2}{(a+1)(a-1)} \cdot \frac{a+1}{1-3a} = \frac{1-3a}{(a-1)(1-3a)} = \frac{1}{a-1}.$$

$$2. \begin{cases} 3x + 2 < 7x - 4 \\ -\frac{x}{3} \geq -1 \end{cases}; \begin{cases} 4x > 6 \\ \frac{x}{3} \leq 1 \end{cases}; \begin{cases} x > 1,5 \\ x \leq 3 \end{cases}.$$

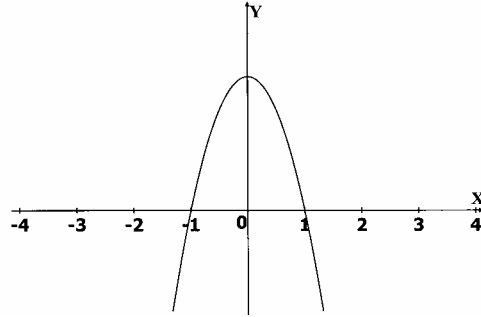


Ответ: $[1,5; 3]$.

$$3. \frac{2x^2 - 5x + 3}{x-1} = \frac{2\left(x - \frac{3}{2}\right)(x-1)}{x-1} = 2x - 3;$$

$$2x^2 - 5x + 3 = 0 \quad x_1 = \frac{5+1}{4} = \frac{3}{2}; x_2 = 1.$$

4. $y = -x^2 + 1$; $y > 0$ при $x \in (-1; 1)$; $y < 0$ при $x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$.



5. $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - 0,6^2 = 0,64$;

$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 0,36 - 0,64 = -0,28$.

6. Пусть x – коэффициент пропорциональности. Тогда в составе будет 10х г., 5х г., 2х г. – воды, спирта, мела соответственно. Учитывая, что масса состава составляет 680г., получаем уравнение:

$10x + 5x + 2x = 680$; $17x = 680$; $x = 40$; 40 — коэффициент пропорциональности. $10 \cdot 40 = 400$ г. – воды в составе, $5 \cdot 40 = 200$ г. – спирта в составе, $2 \cdot 40 = 80$ г. – мела в составе. Ответ: 400г, 200г, 80г.

7. Пусть x м – ширина. Тогда $(x + 40)$ м – длина, $x(x + 40)$ м² – площадь или 7700 м². Получаем уравнение: $x(x + 40) = 7700$;

$x^2 + 40x - 7700 = 0$; $x_1 = \frac{-40 + 180}{2} = 70$, $x^2 < 0$ – не удовлетворяет условию задачи. 70 м – ширина, 70+40=110 м – длина. Ответ: 110 м, 70 м.

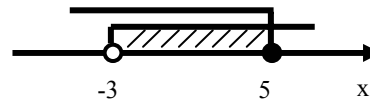
Вариант 3

$$1. \left(\frac{a-1}{a+1} + \frac{4a}{a^2-1} \right) \cdot \frac{1}{a+1} = \left(\frac{a-1}{a+1} + \frac{4a}{(a-1)(a+1)} \right) \cdot \frac{1}{a+1} =$$

$$= \frac{a^2 - 2a + 1 + 4a}{(a-1)(a+1)} \cdot \frac{1}{a+1} = \frac{a^2 + 2a + 1}{(a+1)^2(a-1)} = \frac{(a+1)^2}{(a+1)^2(a-1)} = \frac{1}{a-1}.$$

2.

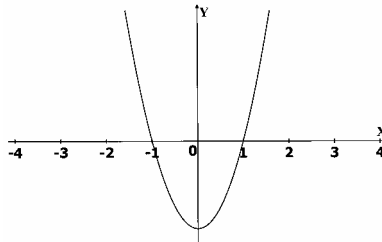
$$\begin{cases} x + 2 \leq 17 - 2x \\ 9 - 5x < 24 \end{cases}, \begin{cases} 3x \leq 15 \\ 5x > -15 \end{cases}, \begin{cases} x \leq 5 \\ x > -3 \end{cases}$$



$$3. \frac{4x^2 + 7x + 3}{x+1} = \frac{4(x+1)\left(x + \frac{3}{4}\right)}{x+1} = 4x + 3;$$

$$4x^2 + 7x + 3 = 0 \quad x_1 = \frac{-7+1}{8} = -\frac{3}{4}; \quad x_2 = -1.$$

$$4. y = x^2 - 2; \quad y > 0 \text{ при } x \in (-\infty; -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}; +\infty); \quad y < 0 \text{ при } x \in (-\sqrt{2}; \sqrt{2}).$$



$$5. \cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\sqrt{1 - 0,8^2} = -0,6;$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = -2 \cdot 0,8 \cdot 0,6 = -0,96.$$

6. Пусть x — коэффициент пропорциональности. Тогда в сплаве будет: $49x$ т., x т. — железа и углерода соответственно. Учитывая, что масса сплава составляет 1 т., получаем уравнение: $49x + x = 1$;

$$50x = 1; \quad x = \frac{1}{50}; \quad \frac{1}{50} \text{ — коэффициент пропорциональности. } \frac{49}{50} \text{ т.} = \\ = \frac{49}{50} \cdot 1000 = 980 \text{ кг — железа в сплаве; } \frac{1}{50} \text{ т} = 20 \text{ кг — углерода в сплаве.}$$

7. Пусть x м — ширина. Тогда $(x+31)$ м — длина, $x(x+31)$ м² — площадь или 1830 м². Получаем уравнение: $x(x+31) = 1830$;

$$x^2 + 31x - 1830 = 0; \quad D = 961 + 4 \cdot 1830 = 91^2; \quad x_1 = \frac{-31+91}{2} = 30,$$

$x_2 < 0$ — не удовлетворяет условию задачи.

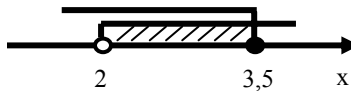
30 м — ширина, 30+31=61 м — длина. Ответ: 61 м, 30 м.

Вариант 4

$$1. \left(\frac{a}{5+s} + \frac{5+a}{5-a} \right) \div \frac{3a+5}{a+5} = \frac{5a-a^2+25+10a+a^2}{(5+a)(5-a)} \cdot \frac{5+a}{3a+5} =$$

$$= \frac{25+15a}{(5-a)(3a+5)} = \frac{5(5+3a)}{(5-a)(3a+5)} = \frac{5}{5-a}.$$

$$2. \begin{cases} 2x+9 \geq 6x-5 \\ -\frac{x}{2} < -1 \end{cases}; \begin{cases} 4x \leq 14 \\ \frac{x}{2} > 1 \end{cases}; \begin{cases} x \leq 3,5 \\ x > 2 \end{cases}.$$

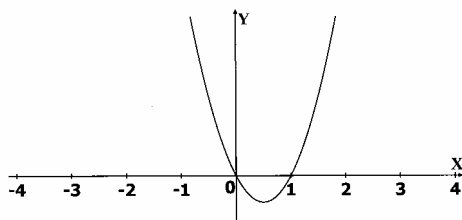


Ответ: $[2; 3,5]$.

$$3. \frac{x-1,5}{2x^2-5x+3} = \frac{x-1,5}{2(x-1)\left(x-\frac{3}{2}\right)} = \frac{1}{2x-2};$$

$$2x^2-5x+3=0 \quad x_1 = \frac{5+1}{4} = \frac{3}{2}, \quad x_2 = 1.$$

$$4. y = -x^2 + 4; \quad y > 0 \text{ при } x \in (-2; 2); \quad y > 0 \text{ при } x \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty).$$



$$5. \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - 0,8^2 = 0,36;$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 0,36 - 0,64 = -0,28.$$

6. Пусть x — коэффициент пропорциональности. Тогда $4x$ кг, x кг — ячменя и риса в крахмале соответственно. Учитывая, что масса крахмала составляет 45кг, получаем уравнение: $4x + x = 45$; $5x = 45$; $x = 9$.

9 — коэффициент пропорциональности.

$4 \cdot 9 = 36$ кг — ячменя в крахмале, 9 кг — риса в крахмале.

7. Пусть x м – ширина. Тогда $(x+36)$ м – длина, $x(x+36)$ м² – площадь или 6400 м². Получаем уравнение: $x(x+36) = 6400$;
 $x^2 + 36x - 6400 = 0$;
 $D = 1296 + 4 \cdot 6400 = 164^2$ $x_1 = \frac{-36+164}{2} = 64$, $x_2 < 0$ – не удовлетворяет условию задачи. 64 м – ширина, 64+36=100 м – длина.

К-10 (итоговая)

Вариант 1

$$1. \left(\frac{a+2}{a-2} - \frac{a}{a+2} \right) \cdot \frac{a-2}{3a+2} = \frac{a^2+4a+4-a^2+2a}{(a-2)(a+2)} \cdot \frac{a-2}{3a+2} = \frac{2(3a+2)}{(a+2)(3a+2)} = \frac{2}{a+2}$$

$$2. \begin{cases} x-y=6 \\ xy=16 \end{cases}; \begin{cases} y=x-6 \\ xy=16 \end{cases}; x(x-6)=16; x^2-6x-16=0;$$

$$D = 36 + 4 \cdot 16 = 100; x_1 = \frac{6+10}{2} = 8, x_2 = -2; y_1 = 8-6 = 2,$$

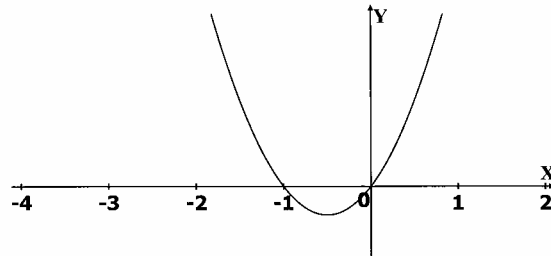
$$y_2 = -2-6 = -8.$$

Ответ: (8;2), (-2;-8).

$$3. 5x - 1,5(2x+3) < 4x + 1,5; 5x - 3x - 4,5 < 4x + 1,5; 2x > -6; x > -3.$$

$$4. a^{\frac{1}{3}} \sqrt[6]{a^5} = a^{\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{5}{6}} = a^{\frac{1}{3} + \frac{5}{6}} = a^{\frac{7}{6}}.$$

$$5. y = x^2 - 4; y > 0 \text{ при } x \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty).$$



$$6. \cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\sqrt{1 - 0,8^2} = -0,6;$$

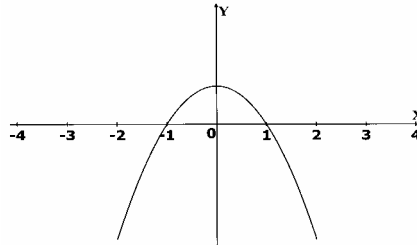
$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha = -2 \cdot 0,6 \cdot 0,8 = -0,96.$$

7. Пусть x деталей - в час должна была изготовлять бригада. Тогда $\frac{40}{x}$ — плановый срок выполнения задания, $(x+8)$ — изготовляет в

час бригада в действительности, $\left(\frac{40}{x}-2\right)$ — в действительности работала бригада, $(x+8)\left(\frac{40}{x}-2\right)$ дет. — изготовила бригада или 48 деталей.
 Получаем уравнение: $(x+8)\left(\frac{40}{x}-2\right)=48$; $40+\frac{320}{x}-2x-16=48$;
 $x-12+24-\frac{160}{x}=0$; $x+12-\frac{160}{x}=0$; $x^2+12x-160=0$;
 $D=144+4\cdot 160=784$ $x_1=\frac{-12+28}{2}=8$, $x_2<0$ — не удовлетворяет условию задачи. 8дет. — должна была изготавливать в час бригада.

Вариант 2.

- $\left(\frac{x+3}{x-3}-\frac{x}{x+3}\right) \div \frac{x+1}{x+3} = \frac{x^2+6x+9-x^2+3x}{(x-3)(x+3)} \cdot \frac{x+3}{x+1} = \frac{9(x+1)}{(x-3)(x+1)} = \frac{9}{x-3}$.
- $\begin{cases} x-y=2 \\ xy=15 \end{cases}$; $\begin{cases} x=2+y \\ xy=15 \end{cases}$; $y(2+y)=15$; $y^2+2y-15=0$;
 $D=4+4\cdot 15=64$; $y_1=\frac{-2+8}{2}=3$, $y_2=-5$; $x_1=2+3=5$,
 $x_2=2-5=-3$. Ответ: $(5;3)$, $(-3;-5)$.
- $2x-4,5 > 6x-0,5(4x-3)$; $2x-4,5 > 6x-2x+1,5$; $2x < -6$; $x < -3$.
- $y^{\frac{1}{5}} \cdot 10\sqrt{y^3} = y^{\frac{1}{5}} \cdot y^{\frac{3}{10}} = y^{\frac{1}{5}+\frac{3}{10}} = y^{\frac{1}{2}}$.
- $y = -x^2 + 1$; $y < 0$ при $x \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty)$.



- $\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{25}{169}} = \frac{12}{13}$;
 $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha = -2 \cdot \frac{12}{13} \cdot \frac{5}{13} = -\frac{120}{169}$.

7. Пусть x км/ч — скорость 1 велосипедиста. Тогда $(x+3)$ км/ч — скорость второго, $\frac{45}{x}$ ч и $\frac{45}{x+3}$ ч — были в пути 1-ый и 2-ой велосипедисты соответственно, на $30+15=45$ мин = $\frac{3}{4}$ ч — был меньше в пути 2-ой велосипедист. Получаем уравнение: $\frac{45}{x} = \frac{45}{x+3} + \frac{3}{4}$;
 $\frac{15}{x} - \frac{15}{x+3} - \frac{1}{4} = 0$; $60(x+3) - 60x - x(x+3) = 0$; $x^2 + 3x - 180 = 0$;
 $60x + 180 - 60x - x^2 - 3x = 0$
 $D = 9 + 4 \cdot 180 = 729$ $x_1 = \frac{-3+27}{2} = 12$, $x_2 < 0$ — не удовлетворяет условию задачи. 12 км/ч — скорость 1 велосипедиста.

Вариант 3.

1. $\left(\frac{m+5}{m-5} - \frac{m}{m+5}\right) \cdot \frac{m+5}{3m+5} = \frac{m^2+10m+25-m^2+5m}{(m-5)(m+5)} \cdot \frac{m+5}{3m+5} =$
 $= \frac{5(3m+5)}{(m-5)(3m+5)} = \frac{5}{m-5}$.

2. $\begin{cases} x+2y=11 \\ xy=14 \end{cases}$; $\begin{cases} x=11-2y \\ xy=14 \end{cases}$; $y(11-2y)=14$; $2y^2-11y+14=0$;

$B = 121 - 4 \cdot 2 \cdot 14 = 9$; $y_1 = \frac{11+3}{4} = \frac{7}{2}$, $y_2 = 2$;

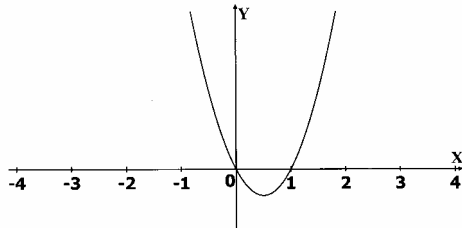
$x_1 = 11 - 2 \cdot \frac{7}{2} = 4$, $x_2 = 11 - 2 \cdot 2 = 7$. Ответ: $(4; 3,5)$, $(7; 2)$.

3. $5x - 3(x-1,5) < 4x + 1,5$; $5x - 3x + 4,5 < 4x + 1,5$; $\frac{2x > 3}{x > 1,5}$.

Ответ: $x > 1,5$.

4. $a^{\frac{5}{6}} \sqrt[3]{a} = a^{\frac{5}{6}} \cdot a^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{5}{6} + \frac{1}{3}} = a^{\frac{7}{6}}$.

5. $y = x^2 - 2x = x^2 - 2x + 1 - 1 = (x-1)^2 - 1$.

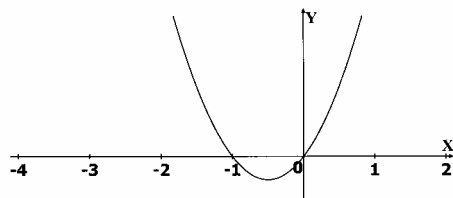


$y < 0$ при $x \in (0; 2)$.

6. $\cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\sqrt{1 - 0,6^2} = -0,8$;
 $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha = -2 \cdot 0,6 \cdot 0,8 = -0,96$.
7. Пусть x дет. — в день должна была сделать бригада по плану. Тогда $\frac{210}{x}$ дн. — плановый срок выполнения задания, $(x+10)$ дет. — изготовляла в день бригада в действительности, $\left(\frac{210}{x} - 1\right)$ дн. — в действительности работала бригада, $(x+10)\left(\frac{210}{x} - 1\right)$ дет. — изготовила бригада или 240 деталей. Получаем уравнение: $(x+10)\left(\frac{210}{x} - 1\right) = 240$;
 $210 + \frac{2100}{x} - x - 10 = 240$; $x + 40 - \frac{2100}{x} = 0$; $x^2 + 40x - 2100 = 0$;
 $D = 1600 + 4 \cdot 2100 = 10000$ $x_1 = \frac{-40 + 100}{2} = 30$, $x_2 < 0$ - не удовлетворяет условию задачи. 30 дет. — в день должна была сделать бригада по плану.

Вариант 4.

1. $\left(\frac{y+1}{y-1} - \frac{y}{y+1}\right) \div \frac{3y+1}{y^2+y} = \frac{y^2+2y+1-y^2+y}{(y-1)(y+1)}$.
 $\cdot \frac{y(y+1)}{3y+1} = \frac{(3y+1) \cdot y}{(y-1)(3y+1)} = \frac{y}{y-1}$.
2. $\begin{cases} x+y=5 \\ x-y^2=3 \end{cases}$; $\begin{cases} x=5-y \\ x-y^2=3 \end{cases}$; $5-y-y^2=3$; $y^2+y-2=0$;
 $D = 1 + 4 \cdot 2 = 9$; $y_1 = \frac{-1+3}{2} = 1$, $y_2 = -2$;
 $x_1 = 5-1 = 4$, $x_2 = 5-(-2) = 7$. Ответ: (4;1), (7;-2).
3. $x - 2,5(2x-1) > x - 1,5$; $x - 5x + 2,5 > x - 1,5$; $5x < 4$; $x < 0,8$.
4. $y^{\frac{3}{4}} \cdot \sqrt[8]{y^3} = y^{\frac{3}{4}} \cdot y^{\frac{3}{8}} = y^{\frac{3}{4} + \frac{3}{8}} = y^{\frac{9}{8}}$.
5. $y = x^2 + 2x = (x+1)^2 - 1$



$y > 0$ при $x \in (-\infty; -2) \cup (0; +\infty)$.

$$6. \quad \sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{64}{289}} = \frac{15}{17};$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha = -2 \cdot \frac{15}{17} \cdot \frac{8}{17} = -\frac{240}{289}.$$

7. Пусть x км — расстояние между А и В. Тогда $\frac{x}{2}$ км — половина

АВ, $\frac{x}{2 \cdot 60} = \frac{x}{120}$ ч — проехал половину пути, $60+15=75$ км/ч — новая

скорость, $\frac{x}{2 \cdot 75} = \frac{x}{150}$ ч — проехал вторую половину пути,

$\left(\frac{x}{120} + \frac{x}{150}\right)$ ч — был в пути, $\frac{x}{60}$ ч — должен был быть в пути по плану.

Учитывая, что автобус задержался на 30 мин = $\frac{1}{2}$ ч, получаем уравне-

$$\text{ние: } \frac{x}{120} + \frac{x}{150} + \frac{1}{2} = \frac{x}{60}; \quad \frac{x}{60} + \frac{x}{75} - \frac{x}{30} = -1; \quad -x \cdot \frac{15}{60 \cdot 75} = -1;$$

$$x = \frac{60 \cdot 75}{15} = 300. \quad 300 \text{ км} - \text{расстояние между А и В.}$$

ИТОГОВОЕ ПОВТОРЕНИЕ ПО ТЕМАМ (К УЧЕБНИКУ ПОД РЕДАКЦИЕЙ ТЕЛЯКОВСКО- ГО) КВАДРАТНАЯ ФУНКЦИЯ

1. Функция — такая зависимость переменной y от переменной x , при которой каждому значению переменной x соответствует единственное значение переменной y . а) $f(x) = \frac{3x}{x+1}$, $f(0) = \frac{3 \cdot 0}{0+1} = 0$,

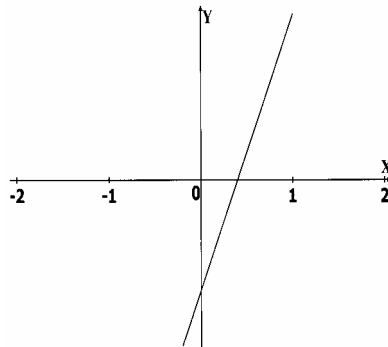
$$f(5) = \frac{3 \cdot 5}{5+1} = \frac{15}{6} = 2,5, \quad f(-1,5) = \frac{-3 \cdot 1,5}{-1,5+1} = \frac{4,5}{0,5} = 9;$$

$$\text{б) } f(x) = 2x^2 + x - 3; \quad f(0) = -3; \quad f(5) = 2 \cdot 25 + 5 - 3 = 52;$$

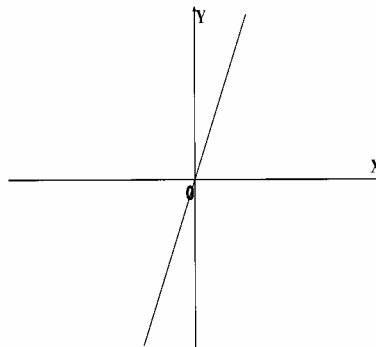
$$f(-1,5) = 2 \cdot 2,25 - 1,5 - 3 = 0.$$

2. Область определения функции — все значения независимой переменной. Область значения функции — все значения, которые принимает зависимая переменная. График функции — множество всех точек координатной плоскости абсциссы, которых равны значениям аргумента, ординаты равны соответствующим значениям функции.

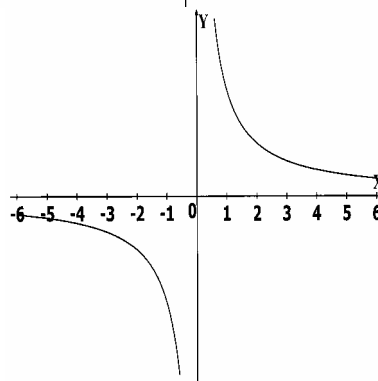
а) $y = 5x - 4$; $D(y) = E(y) = R$;



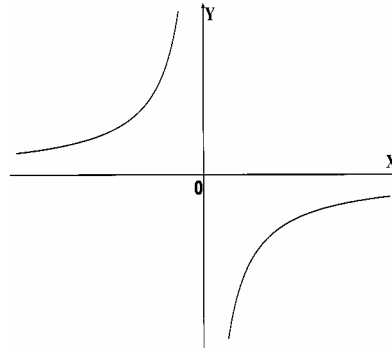
б) $y = 3,5x$; $D(y) = E(y) = R$;



в) $y = \frac{6}{x}$;
 $D(y) = E(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.



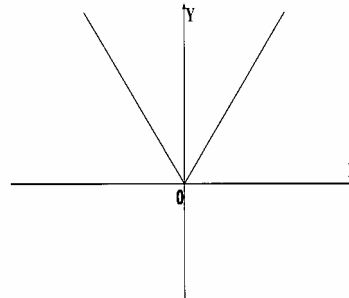
г) $y = -\frac{8}{x}$.
 $D(y) = E(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$



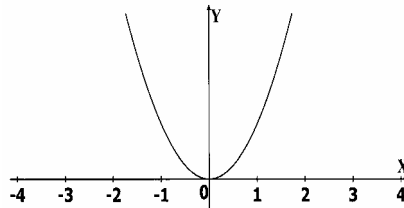
3. а) $y = 1,7x - 0,03$; $D(y) = R$; б) $y = \frac{1,6+x}{0,8-2x}$; $0,8-2x \neq 0$, т.к. знаменатель $x \neq 0,4$; $D(y) = (-\infty; 0,4) \cup (0,4; +\infty)$; в) $y = \frac{4}{12+x^2}$; $D(y) = R$;
 г) $y = \frac{|x|}{4}$; $D(y) = R$; д) $y = \sqrt{3x-7}$; $3x-7 \geq 0$, т.к. $D(\sqrt{x}) = [0; +\infty]$; $x \geq 7/3$; $D(y) = [7/3; +\infty]$; е) $y = \sqrt{x^2-4}$; $x^2-4 \geq 0$ т.к. $D(\sqrt{x}) = [0; +\infty]$; $(x-2)(x+2) \geq 0$ $D(y) = (-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$

4. Возрастающая в промежутке функция, если большему значению аргумента из этого промежутка соответствует большее значение функции. Убывающая в промежутке функция, если большему значению аргумента из этого промежутка соответствует меньшее значение функции.

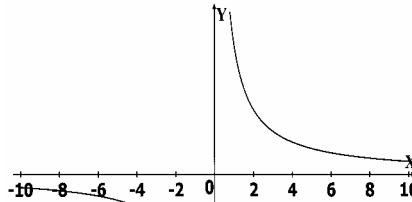
- а) $y = |x|$, y возрастающая при $x \geq 0$, убывающая при $x \leq 0$;



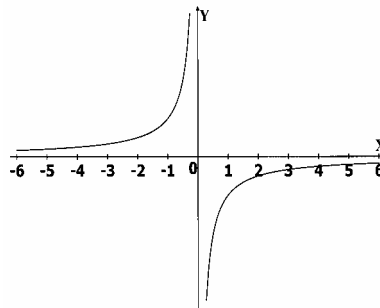
б) $y = x^2$, y возрастающая при $x \geq 0$, убывающая при $x \leq 0$;



в) $y = \frac{12}{x}$, y убывающая при $x \neq 0$;



г) $y = -\frac{4}{x}$, y возрастающая при $x \neq 0$.



5. $y = x - 4,3$ - возрастающая,
 $y = 1,6 - x$; $y = -4,2x + 8,1$; $y = 5,2 - x$ - убывающая.
6. Теорема: Если x_1 и x_2 - корни квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$, то $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$; а) $4x^2 + 11x - 3 = 0$;
 $D = 121 + 4 \cdot 4 \cdot 3 = 169$; $x_1 = \frac{-11 + 13}{8} = \frac{1}{4}$, $x_2 = -3$;
 $4x^2 + 11x - 3 = 4\left(x - \frac{1}{4}\right)(x + 3) = (4x - 1)(x + 3)$; б) $-2x^2 - 9x + 18 = 0$;

$$2x^2 + 9x - 18 = 0; D = 81 + 4 \cdot 2 \cdot 18 = 225; x_1 = \frac{-9+15}{4} = \frac{3}{2}, x_2 = -6;$$

$$-(2x^2 + 9x - 18) = -2\left(x - \frac{3}{2}\right)(x+6) = -(2x-3)(x+6) = (3-2x)(x+6);$$

$$в) 5x^2 - 30x + 45 = 0; x^2 - 6x + 9 = 0; (x-3)^2 = 0 \quad x_{1,2} = 3;$$

$$5x^2 - 30x + 45 = 5(x-3)^2.$$

$$7. \quad а) \frac{2x^2 + 13x - 24}{4x^2 - 9} = \frac{2\left(x - \frac{3}{2}\right)(x+8)}{(2x-3)(2x+3)} = \frac{x+8}{2x+3}; \quad 2x^2 + 13x - 24 = 0;$$

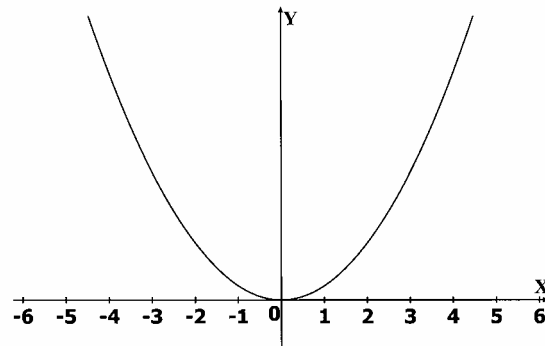
$$D = 169 + 4 \cdot 2 \cdot 24 = 361; x_1 = \frac{-13+19}{4} = \frac{3}{2}, x_2 = -8;$$

$$б) \frac{5x^2 + 34x - 7}{25x^2 - 10x + 1} = \frac{5\left(x - \frac{1}{5}\right)(x+7)}{(5x-1)^2} = \frac{x+7}{5x-1}; \quad 5x^2 + 34x - 7 = 0;$$

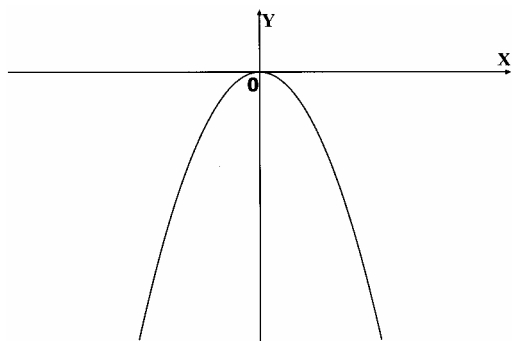
$$D = 1156 + 20 \cdot 7 = 36^2 \quad x_1 = \frac{-34+36}{10} = \frac{1}{5}, \quad x_2 = -7.$$

8. Квадратичная функция – функция, которую можно задать формулой вида $y = ax^2 + bx + c$, где x – независимая переменная, a, b, c – некоторые числа, причем $a \neq 0$. График квадратичной функции – парабола.

$$9. \quad а) y = 0,5x^2;$$



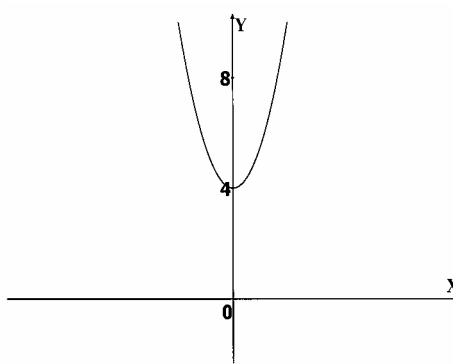
$$б) y = -0,4x^2.$$



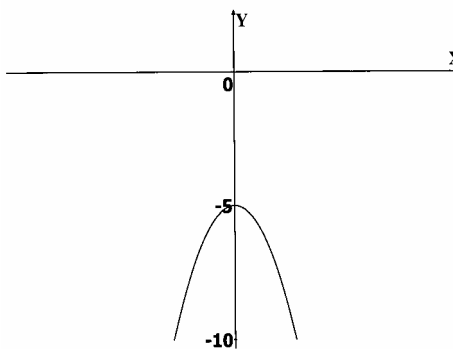
Свойства функции $y = ax^2$ при $a > 0$: 1. если $x = 0$, то $y = 0$,
 2. если $x \neq 0$, то $y > 0$, 3. функция является четной, 4. Функция убывает в промежутке $(-\infty; 0]$ и возрастает в промежутке $[0; +\infty)$, 5.
 $y_{min} = y(0) = 0$, $E(y) = [0; +\infty)$.

10.

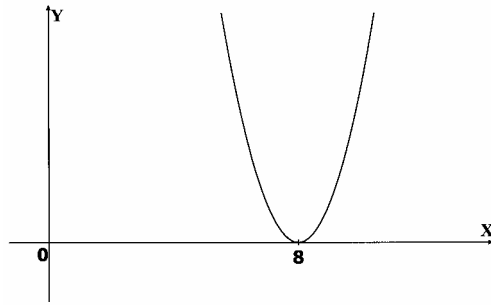
а) I, II - четверти;



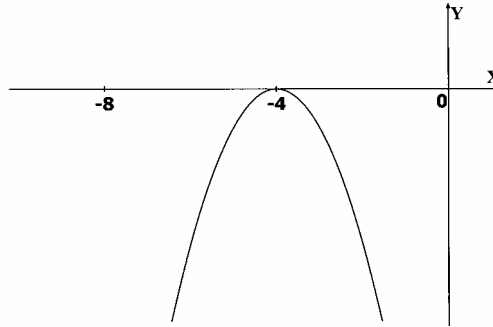
б) III, IV - четверти;



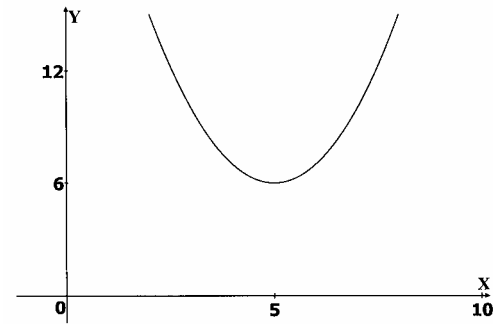
в) I, II - четверти



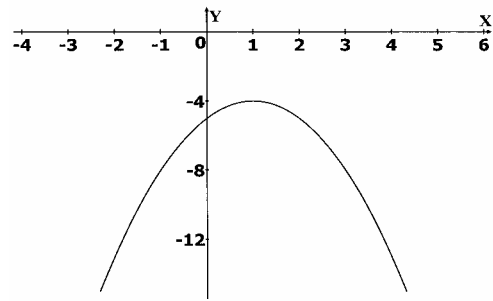
г) III, IV — четверти



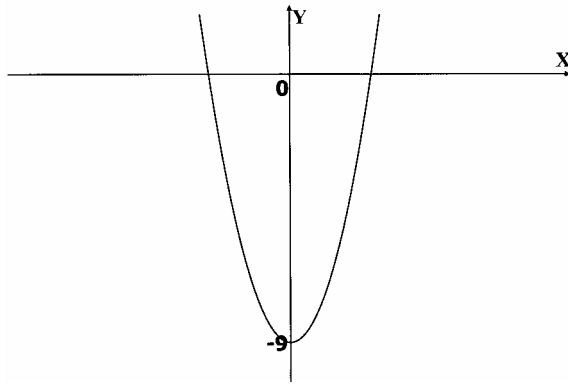
д) I, II - четверти



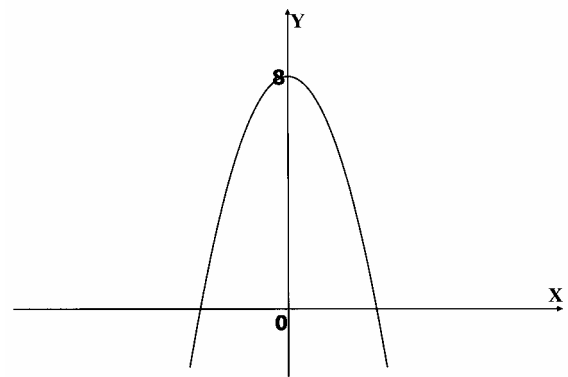
е) III, IV - четверти



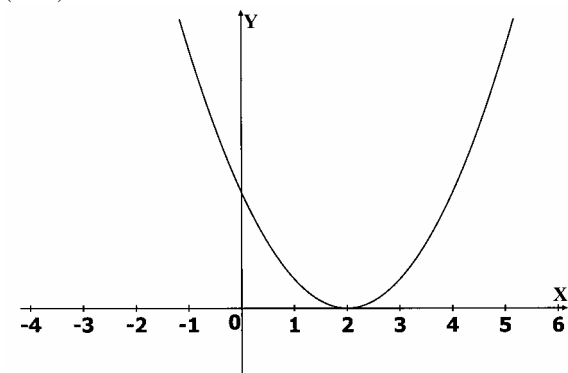
11. a) $y = x^2 - 9$;



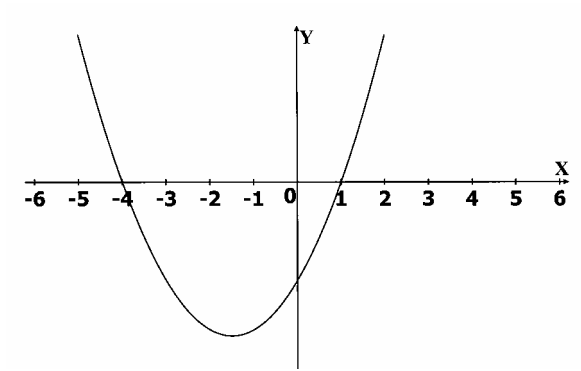
б) $y = -2x^2 + 8$;



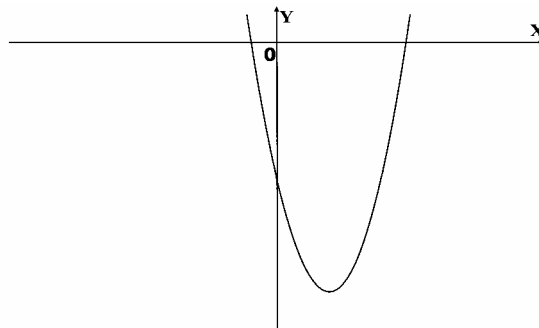
в) $y = x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$;



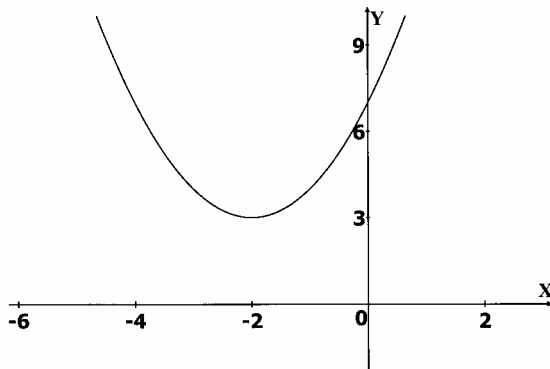
$$\text{г) } y = x^2 + 3x - 4 = x^2 + 2 \cdot \frac{3}{2}x + \frac{9}{4} - \frac{25}{4} = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{25}{4};$$



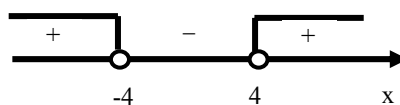
$$\text{д) } y = 2x^2 - 8x - 10; \quad m = \frac{8}{4} = 2; n = 8 - 16 - 10 = -18;$$



$$\text{е) } y = x^2 + 4x + 7; \quad m = -2; n = 3.$$



12. а) $x^2 - 16 > 0$; $(x-4)(x+4) > 0$.



Ответ: $(-\infty; -4) \cup [4; +\infty)$.

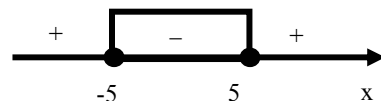
б) $-x^2 - 12 < 0$; $x^2 + 12 > 0$. Ответ: $(-\infty; +\infty)$.

в) $x^2 > 3x$; $x^2 - 3x > 0$; $x(x-3) > 0$.



Ответ: $(-\infty; 0] \cup [3; +\infty)$.

г) $x^2 < 25$; $(x-5)(x+5) < 0$.



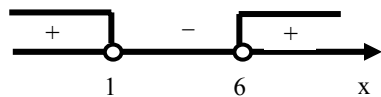
Ответ: $[-5; 5]$.

д) $x^2 - 22x + 121 > 0$; $(x-11)^2 > 0$; $x \neq 11$. Ответ: $x \neq 11$.

е) $x^2 - 12x + 36 < 0$; $(x-6)^2 < 0$. Ответ: нет решения.

ж) $2x^2 - 14x + 12 > 0$; $x^2 - 7x + 6 > 0$; $D = 49 - 4 \cdot 6 = 25$;

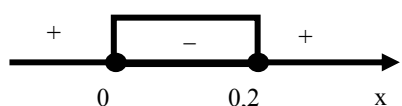
$x_1 = \frac{7+5}{2} = 6$; $x_2 = 1$; $(x-6)(x-1) > 0$.



Ответ: $(-\infty; 1) \cup (6; +\infty)$.

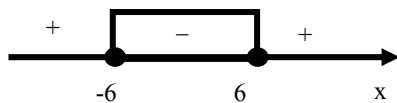
13. а) $y = \sqrt{6x - 30x^2}$; $6x - 30x^2 \geq 0$; $30x^2 - 6x \leq 0$;

$x^2 - \frac{x}{5} \leq 0$; $x(x - \frac{1}{5}) \leq 0$.



Ответ: $[0; 0,2]$

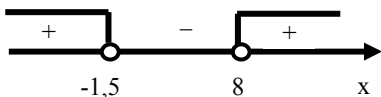
б) $y = \frac{1}{\sqrt{36 - x^2}}$; $36 - x^2 > 0$; $x^2 - 36 < 0$; $(x-6)(x+6) < 0$.



Ответ: $[-6; 6]$.

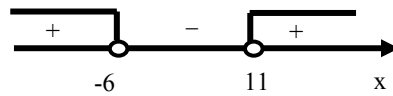
в) $y = \frac{x}{\sqrt{2x^2 - 13x - 24}}$; $2x^2 - 13x - 24 > 0$; $D = 169 + 8 \cdot 24 = 361$;

$x_1 = \frac{13+19}{4} = 8$; $x_2 = -1,5$.



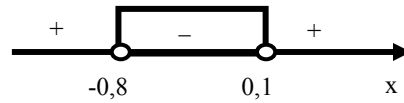
Ответ: $(-\infty; -1,5) \cup (8; +\infty)$.

14. а) $(x+6)(x-11) > 0$.



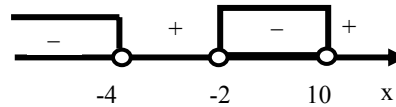
Ответ: $(-\infty; -6) \cup (11; +\infty)$.

б) $(x-0,1)(x+0,8) < 0$.



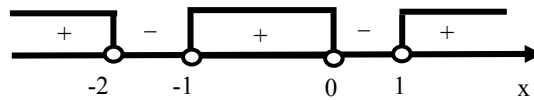
Ответ: $(-0,8; 0,1)$.

в) $(x+4)(x+2)(x-10) < 0$.



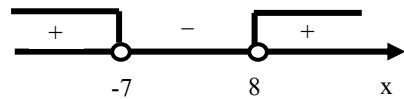
Ответ: $(-\infty; -4) \cup (-2; 10)$

г) $x(x+2)(x+1)(x-1) > 0$.



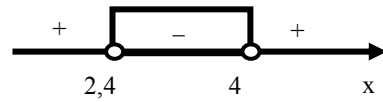
Ответ: $(-\infty; -2) \cup (-1; 0) \cup (1; +\infty)$.

15. а) $(x+7)(x-8) > 0$.



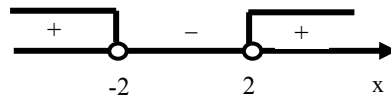
Ответ: $(-\infty; -7) \cup (8; +\infty)$.

б) $(x-4)(5x-12) < 0$; $(x-4)\left(x-\frac{12}{5}\right) < 0$.



Ответ: $(2,4; 4)$.

в) $\frac{x-2}{3x+6} > 0$; $\frac{x-2}{x+2} > 0$.



Ответ: $(-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$.

г) $\frac{2x-8}{x+11} < 0$; $\frac{x-4}{x+11} < 0$.



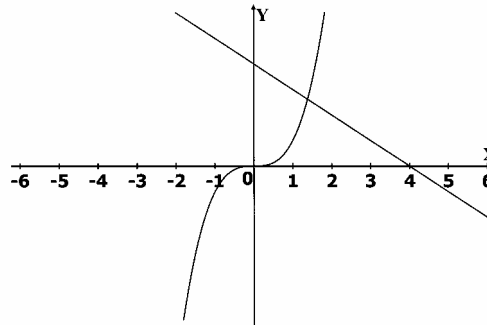
Ответ: $(-11; 4)$.

Уравнения и системы уравнений

1. Целое уравнение-уравнение, в котором обе части являются целыми выражениями. Например: $x^4 - 10x^2 + 3 = 0$.
2. Степень целого уравнения – степень многочлена $P(x)$, когда уравнение записано в виде $P(x) = 0$; $(x^2 - 8)(3x^2 - 4x) = 3x^5$;
 $3x^5 - 24x^3 - 4x^3 + 32x = 3x^5$; $-28x^3 + 32x = 0$, значит, степень уравнения равна трем. Ответ: 3.
3. а) $(2x + 4)(3x - 1) - (6x - 12)(x + 3) = 100$;
 $(x + 2)(3x - 1) - (3x - 6)(x + 3) = 50$; $3x^2 + 5x - 2 - 3x^2 - 3x + 18 - 50 = 0$;
 $2x = 2 - 18 + 50$; $x = 1 - 9 + 25$; $x = 17$; б) $6x(x + 1) - (x^2 - x - 2) = 68$;
 $6x^2 + 6x - x^2 + x + 2 - 68 = 0$; $5x^2 + 7x - 66 = 0$; $D = 37^2$;
 $x_1 = \frac{-7 + 37}{10} = 3$; $x_2 = -4,4$.
4. При $D > 0$ 2 корня, при $D = 0$ 1 корень, при $D < 0$ нет корней.
а) $3x^2 + kx + 12 = 0$; $D = k^2 - 144 > 0$; $(k - 12)(k + 12) > 0$.
 Ответ: $(-\infty; -12] \cup [12; +\infty)$. б) $3x^2 + 6x + k = 0$; $D = 36 - 4 \cdot 3 \cdot k = 0$;
 $36 = 12k$, $k = 3$.
 в) $15x^2 + kx + 60 = 0$; $D = k^2 - 4 \cdot 15 \cdot 60 < 0$; $(k - 60)(k + 60) < 0$.
5. а) $(x^2 + 2x)^2 - 10(x^2 + 2x) + 21 = 0$; $x^2 + 2x = y$; $y^2 - 10y + 21 = 0$;
 $D = 100 - 84 = 16$, $y_1 = \frac{10 + 4}{2} = 7$; $y_2 = 3$; $x^2 + 2x = 7$; $x^2 + 2x - 7 = 0$;
 $D = 4 + 4 \cdot 7 = 32$; $x_{1,2} = \frac{-2 \pm 4\sqrt{2}}{2} = -1 \pm 2\sqrt{2}$; $x^2 + 2x = 3$;
 $x^2 + 2x - 3 = 0$; $D = 4 + 4 \cdot 3 = 16$; $x_3 = \frac{-2 + 4}{2} = 1$; $x_4 = -3$.
 Ответ: $-1 \pm \sqrt{2}$; 1 ; -3 .
 б) $(x^2 + x + 1)(x^2 + x + 4) = 50$; $x^2 + x + 1 = y$; $y(y + 3) = 50$; $D = 9 + 4 \cdot 50 = 209$.
6. Биквадратное уравнение – уравнение вида $ax^4 + bx^2 + c = 0$, где $a \neq 0$. Оно может иметь от одного до четырех корней или не иметь корней.
а) $x^4 - 11x^2 - 80 = 0$; $x^2 = y \geq 0$; $y^2 - 11y - 80 = 0$; $D = 121 + 4 \cdot 80 = 21^2$;
 $y_1 = \frac{11 + 21}{2} = 16$; $y_2 < 0$; $x^2 = 16$; $x_{1,2} = \pm 4$. Ответ: ± 4 .
 б) $9x^4 + 17x^2 - 2 = 0$; $x^2 = y \geq 0$; $9y^2 + 17y - 2 = 0$;
 $D = 289 + 4 \cdot 9 \cdot 2 = 19^2$; $y_1 = \frac{-17 + 19}{18} = \frac{1}{9}$; $y_2 < 0$; $x^2 = \frac{1}{9}$; $x_{1,2} = \pm \frac{1}{3}$.
 в) $12x^4 + 19x^2 + 5 = 0$; $x^2 = y \geq 0$; $12y^2 + 19y + 5 = 0$;
 $D = 361 - 48 \cdot 5 = 121$; $y_1 = \frac{-19 + 21}{24} = \frac{1}{12}$; $y_2 < 0$; $x^2 = \frac{1}{12}$; $x_{1,2} = \pm \frac{1}{2\sqrt{3}}$.

г) $(2x^2 - 1)(2x^2 + 1) - 12(x^2 + 7) = 131$; $x^2 = y \geq 0$;
 $(2y - 1)(2y + 1) - 12(y + 7) - 131 = 0$; $4y^2 - 1 - 12y - 84 - 131 = 0$;
 $4y^2 - 12y - 216 = 0$; $y^2 - 3y - 54 = 0, D = 15^2$; $y_1 = \frac{3+15}{2} = 9, y_2 < 0$;
 $x^2 = 9; x_{1,2} = \pm 3$.

7. $x^3 = 4 - x$; $x \approx 1,4$ уточненное значение $x \approx 1,38$.

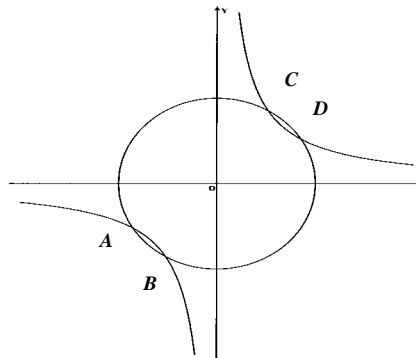


8. Решение системы уравнений с двумя неизвестными x и y - пара чисел (x_0, y_0) , при подставлении которой в систему получаются верные равенства.

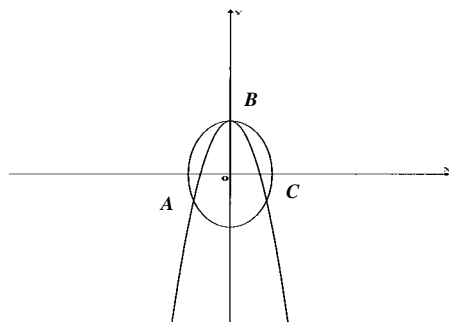
а) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 9 \\ x^2 + 3y = 37 \end{cases}$; $\begin{cases} (-5)^2 - 4^2 = 9 \\ (-5)^2 + 3 \cdot 4 = 37 \end{cases}$ — верно, значит, $(-5; 4)$ - решение.

б) $\begin{cases} x^2 + 3xy = 5 \\ xy = -20 \end{cases}$; $\begin{cases} (-5)^2 + 3(-5) \cdot 4 = 5 \\ -5 \cdot 4 = -20 \end{cases}$ — ложно, значит, $(-5; 4)$ - не является решением.

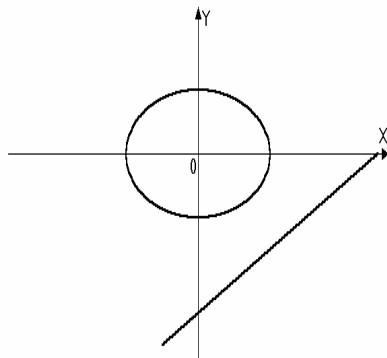
9. а) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ xy = 4 \end{cases}$. Ответ: $(\pm 2,6; \pm 1,6)$, $(\pm 1,6; \pm 2,6)$.



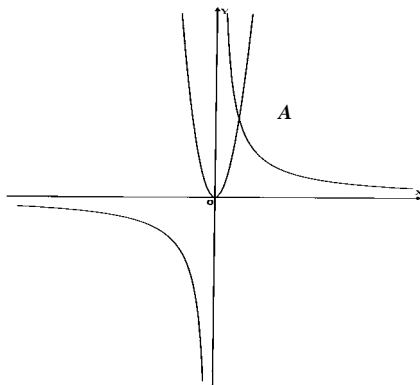
б) $\begin{cases} y = 2 - x^2 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$. Ответ: $(0; 2), (1, 7; -1), (-1, 7; -1)$.



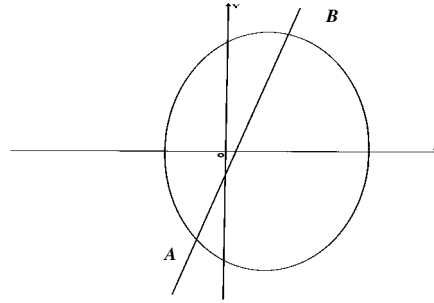
10. а) Ответ: нет.



б) Ответ: да.



в) Ответ: да.



$$11. \text{ а) } \begin{cases} 2x - y = 13 \\ x^2 - y^2 = 23 \end{cases}; \quad y = 2x - 13; \quad x^2 - (2x - 13)^2 = 23;$$

$$x^2 - 4x^2 + 52x - 169 = 23; \quad 3x^2 - 52x + 192 = 0;$$

$$D = 400, x_1 = \frac{52 + 20}{6} = 12, x_2 = \frac{16}{3}; y_1 = 9, y_2 = -\frac{7}{3}. \text{ Ответ: } (12; 9), \left(\frac{16}{3}; -\frac{7}{3}\right).$$

$$\text{б) } \begin{cases} x + 3y = 5 \\ x^2 - xy + y^2 = 73 \end{cases}; \quad x = 5 - 3y; \quad 25 - 30y + 9y^2 - 5y + 3y^2 + y^2 - 73 = 0;$$

$$13y^2 - 35y - 48 = 0; \quad D = 61^2, y_1 = \frac{35 + 61}{26} = \frac{48}{13}; y_2 = -1; \quad x_1 = \frac{-79}{13}; x_2 = 8.$$

$$\text{Ответ: } \left(-\frac{79}{13}; \frac{48}{13}\right), (8; -1).$$

$$\text{в) } \begin{cases} 2x^2 - y^2 = 23 \\ 2x^2 + y^2 = 41 \end{cases}; \quad 4x^2 = 64 \quad x^2 = 16 \quad x_{1,2} = \pm 4; \quad 32 - y^2 = 23;$$

$$y^2 = 9; \quad y_{1,2} = \pm 3. \text{ Ответ: } (4; \pm 3), (-4; \pm 3).$$

$$\text{г) } \begin{cases} 2x + y = 7 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{6} \end{cases}; \quad y = 7 - 2x; \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{7 - 2x} - \frac{5}{6} = 0;$$

$$6(7 - 2x) + 6x - 5x(7 - 2x) = 0; \quad 42 - 12x + 6x - 35x + 10x^2 = 0;$$

$$10x^2 - 41x + 42 = 0 \quad D = 1, x_1 = \frac{41 + 1}{20} = \frac{21}{10} = 2,1; x_2 = 2; \quad y_1 = 2,8; y_2 = 3.$$

$$\text{Ответ: } (2,1; 2,8), (2; 3).$$

12. Пусть x м – длина, y м – ширина, тогда xy м² – площадь или 4800 м², $2(x + y)$ м – периметр или 280 м. Получаем систему:

$$\begin{cases} xy = 4800 \\ 2(x + y) = 280 \end{cases}; \quad \begin{cases} xy = 4800 \\ x = 140 - y \end{cases}; \quad y(140 - y) = 4800;$$

$$y^2 - 140y + 4800 = 0; D = 20^2; y_1 = \frac{140 + 20}{2} = 80; y_2 = 60;$$

$x_1 = 60; x_2 = 80$. Итак, 60м и 80м – стороны прямоугольника.

Ответ: 60м, 80м.

Арифметическая и геометрическая прогрессия.

1. а) 6;12;18;24;30;36; б) 1;4;9;16;25;36.

2. а) $a_n = n^2 - 1$, $a_1 = 0, a_2 = 4 - 1 = 3, a_3 = 8, a_4 = 15, a_5 = 24$;

б) $a_n = \frac{n}{n+2}$, $a_1 = 0, a_2 = 1/2, a_3 = 3/5, a_4 = 2/3, a_5 = 5/7$;

в) $a_n = 0,5^n = 2^{n-1}$, $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 4, a_4 = 8, a_5 = 16$.

3. а) $a_1 = 20; a_{n+1} = \frac{a_n}{2}$; $a_2 = \frac{a_1}{2} = 10$; $a_3 = \frac{a_2}{2} = 5$; $a_4 = \frac{a_3}{2} = 2,5$;

$a_5 = \frac{a_4}{2} = 1,25$; б) $a_1 = -3; a_{n+1} = (-1)^n a_n$;

$a_2 = -a_1 = 3; a_3 = a_2 = 3; a_4 = -a_3 = -3; a_5 = a_4 = -3$.

4. Арифметическая прогрессия – числовая последовательность, в которой каждое число, начиная со второго, равно предыдущему, сложенному с одним и тем же числом, постоянным для этой последовательности. $a_1 = 37, d = 4$;

$a_2 = a_1 + d = 41; a_3 = a_2 + d = 45; a_4 = a_3 + d = 49; a_5 = a_4 + d = 53$.

5. $a_n = a_1 + d(n-1)$; а) $a_{11} = a_1 + 10d = -3 + 10 \cdot 11 = 107$;

б) $a_{31} = a_1 + 30d = 0,8 - 30 \cdot 0,2 = -5,2$.

6. 12;17 ...; $a_1 = 12; d = -5; a_n = a_1 + d(n-1) = 12 - 5(n-1) = 17 - 5n$;
 $-58 = 17 - 5n; 5n = 75; n = 15$, значит $-58 = a_{15}$;

$-76 = 17 - 5n; 5n = 93; n = \frac{93}{5} \notin N$, значит -76 - не член (a_n) .

7. $a_n = kn + b$; $a_{n-1} = k(n-1) + b; a_{n+1} = k(n+1) + b; a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$;

$k_{n+b} = \frac{k(n-1) + b + k(n+1) + b}{2}$ – верно для любого $n \in N$, значит, (a_n) – арифметическая прогрессия, чтд.

а) $a_n = 3n - 1$ – арифметическая прогрессия с $k = 3, b = -1$;

б) $a_{nm} = -n + 16$ – арифметическая прогрессия с $k = -1, b = 16$;

в) $a_n = 0,4n$ – арифметическая прогрессия с $k = 0,4, b = 0$;

г) $a_n = 14n^2; a_1 = 14; a_2 = 56; a_3 = 126$;

$56 - 14 \neq 126 - 56$, значит (a_n) – не арифметическая прогрессия;

д) $a_n = \frac{n}{4}$ – арифметическая прогрессия с $k = \frac{1}{4}, b = 0$.

$$8. S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n; 1,5; 4,5; 7,5; \dots; a_1 = 1,5; d = 3; S_6 = \frac{2 \cdot 1,5 + 3 \cdot 5}{2} \cdot 6 = 54.$$

$$9. \text{ а) } a_1 = -8; d = 5; S_{10} = \frac{-16 + 5 \cdot 9}{2} \cdot 10 = 145;$$

$$\text{ б) } a_1 = 0,4; d = -0,2; S_{10} = \frac{0,8 - 0,2 \cdot 9}{2} \cdot 10 = -5.$$

$$10. 50; 51; 52; \dots; 70; n = 21; a_1 = 50; d = 1; S_{21} = \frac{100 + 20}{2} \cdot 21 = 1260.$$

11. Геометрическая прогрессия – такая числовая последовательность, в которой первый член отличен от нуля, а каждый из последующих равен предыдущему, умноженному на некоторое постоянное для данной последовательности число, отличное от нуля. $b_1 = 72, q = 0,5$;

$$b_2 = 72 \cdot 0,5 = 36; b_3 = 36 \cdot 0,5 = 18; b_4 = 18 \cdot 0,5 = 9; b_5 = 9 \cdot 0,5 = 4,5.$$

$$12. b_n = b_1 q^{n-1}; \text{ а) } b_1 = 2, q = -1, b_5 = 2 \cdot q^4 = 2 \cdot (-1)^4 = 2;$$

$$\text{ б) } b_1 = 8, q = 1/2, b_6 = 8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{2^3}{2^5} = \frac{1}{4};$$

$$\text{ в) } b_1 = 2, q = \sqrt{2}, b_7 = 2 \cdot (\sqrt{2})^6 = 2 \cdot 2^3 = 16.$$

$$13. S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}, \text{ при } q \neq 1; 12; -6; 3; \dots \quad b_1 = 12; q = -\frac{6}{12} = -\frac{1}{2};$$

$$S_6 = \frac{12 \left(\frac{1}{67} - 1\right)}{-\frac{1}{2} - 1} = \frac{12 \cdot 63 \cdot 2}{64 \cdot 3} = \frac{21 \cdot 3}{8} = \frac{63}{8}.$$

$$14. \text{ а) } b_1 = 12, q = -2; S_6 = \frac{12(64 - 1)}{-3} = \frac{-12 \cdot 63}{3} = -252;$$

$$\text{ б) } b_1 = 3, q = \sqrt{3}; S_6 = \frac{3(27 - 1)}{\sqrt{3} - 1} = \frac{78}{\sqrt{3} - 1}.$$

$$15. S = \frac{b_1}{1 - q}; b_1 = 6, q = -0,1$$

$$16. \text{ а) } 12; -4; 1; \dots; q = \frac{-4}{12} = -\frac{1}{3}; |q| < 1; b_1 = 12; S = \frac{12 \cdot 3}{4} = 9;$$

$$\text{ б) } 2; \sqrt{2}; 1; \dots; q = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}; |q| < 1; b_1 = 2; S = \frac{2}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1}.$$

$$17. \text{ а) } 0,(5) = 0,555\dots = 0,5 + 0,05 + \dots = \frac{0,5}{1 - 0,1} = \frac{5}{9};$$

$$\text{ б) } 0,(26) = 0,2626\dots = 0,26 + 0,0026 + \dots = \frac{0,26}{1 - 0,01} = \frac{26}{99};$$

$$\text{ в) } 0,3(2) = 0,3222\dots = 0,3 + 0,02 + 0,002 + \dots = 0,3 + \frac{0,02}{1 - 0,1} = \frac{3}{10} + \frac{2}{90} = \frac{29}{90}.$$

Степень с рациональным показателем.

1. Функция $f(x)$ называется четной, если для любого x из ее области определения $f(-x) = f(x)$. Функция $f(x)$ называется нечетной, если для любого x из ее области определения $f(-x) = -f(x)$. $f(x) = x^2$ - четная, $g(x) = x$ - не четная.
2. а) $y = 15x^2$ $y(-x) = 15 \cdot (-x)^2 = 15x^2 = y(x)$, значит $y(x)$ - четная;
б) $y = -46x^3$; $y(-x) = -46 \cdot (-x)^3 = 46x^3 = -y(x)$, значит $y(x)$ - нечетная;
в) $y = |x|$ $y(-x) = |-x| = |x| = y(x)$, значит $y(x)$ - четная;
г) $y = 2x|x|$ $y(-x) = 2(-x)|x| = -2x|x| = -y(x)$, значит $y(x)$ - нечетная;
д) $y = x^4 + x^2 + 1$ $y(-x) = (-x)^4 + (-x)^2 + 1 = x^4 + x^2 + 1 = y(x)$, значит, $y(x)$ - четная;
е) $y = x^3 + x - 2$ $y(-x) = (-x)^3 + (-x) - 2 = -x^3 - x - 2 \neq \pm y(x)$, значит, $y(x)$ - не четная и не нечетная;
ж) $y = (x-8)^2$ $y(-x) = (-x-8)^2 \neq \pm y(x)$, значит $y(x)$ - не четная и не нечетная; з) $y = \frac{10}{x}$; $y(-x) = \frac{10}{-x} = -y(x)$, значит $y(x)$ - нечетная;
и) $y = \frac{4}{x^2}$; $y(-x) = \frac{4}{(-x)^2} = \frac{4}{x^2} = y(x)$, значит $y(x)$ - четная;
к) $y = \frac{13}{x+2}$; $y(-x) = \frac{13}{-x+2} \neq \pm y(x)$, значит $y(x)$ - не четная и не четная.
3. $y = x^a$, где $a \in N$; Например: $y = x^2$; $y = x^5$.
4. 1. Если $x = 0$, то $y = 0$. 2. Если $x \neq 0$, то $y > 0$. 3. Функция является четной. 4. Функция возрастает в промежутке $[0; +\infty)$ и убывает в $(-\infty; 0]$. 5. Область значения функции есть множество неотрицательных чисел.
5. $f(x) = x^{12}$; а) $f(-4) > 0$; $f(0) = 0$; $f(4) > 0$;
б) $f(5,6) < f(7,6)$ т.к. $|5,6| < |7,6|$; $f\left(-\frac{1}{2}\right) > f\left(-\frac{1}{3}\right)$ т.к. $\left|-\frac{1}{2}\right| > \left|-\frac{1}{3}\right|$.
6. 1. Если $x = 0$, то $y = 0$. 2. Если $x > 0$, то $y > 0$ и если $x < 0$, то $y < 0$. 3. Функция является нечетной. 4. Функция возрастает на всей области определения. 5. Область значения функции есть множество всех действительных чисел.
7. $f(x) = x^{13}$; а) $f(-2,5) < 0$; $f(0) = 0$; $f(1,5) > 0$;
б) $f(1,4) < f(1,6)$ т.к. $1,4 < 1,6$, $f(-3) > f(-5)$ т.к. $-3 > -5$.

8. Арифметический корень n -ой степени из числа a – неотрицательное число, n -ая степень которого равна a .

а) $\frac{1}{3} = \sqrt[4]{\frac{1}{81}}$ т.к. $\frac{1}{3} \geq 0$ и $\left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{81}$; б) $-\frac{1}{5} \neq \sqrt[3]{-\frac{1}{125}}$ т.к. $\frac{-1}{5} < 0$.

9. а) $\sqrt[3]{216} = 6$; б) $\sqrt[5]{\frac{-1}{32}} = -0,5$; в) $\sqrt[4]{5\frac{1}{16}} = \sqrt[4]{\frac{81}{16}} = 1,5$;

г) $\sqrt[3]{-3\frac{3}{8}} = -\sqrt[3]{\frac{27}{8}} = -1,5$; д) $-0,5\sqrt[4]{81} = -0,5 \cdot 3 = -1,5$;

е) $0,1\sqrt[6]{64} + 0,2\sqrt[3]{-27} = 0,1 \cdot 2 - 0,2 \cdot 3 = -0,4$.

10. а) $x^3 = 8; x = 2$ б) $x^3 + 27 = 0; x^3 = -27; x = -3$;

в) $x^6 = 5; x_{1,2} = \pm\sqrt[6]{5}$; г) $x^8 = -9$ нет корней;

д) $81x^4 - 1 = 0, x^4 = \frac{1}{81}; x_{1,2} = \pm\frac{1}{3}$; е) $16x^4 + 4 = 0; 16x^4 = -4$ нет корней;

ж) $\frac{1}{16}x^5 + 2 = 0; x^5 = -32; x = -2$.

11. Корень из произведения неотрицательных множителей равен произведению корней из этих множителей $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$, $a, b \geq 0$.

Докажем, что $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \geq 0$ и $(\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b})^n = ab$.

$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \geq 0$ т.к. $\sqrt[n]{a}, \sqrt[n]{b} \geq 0$.

По свойству степени произведения $(\sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b})^n = (\sqrt[n]{a})^n (\sqrt[n]{b})^n = ab$, чтд.

а) $\sqrt[4]{0,0016 \cdot 81} = 0,2 \cdot 3 = 0,6$;

б) $\sqrt[5]{2^4 \cdot 3^2} \cdot \sqrt[5]{2 \cdot 3^3} = \sqrt[5]{2^4 \cdot 3^2} \cdot \sqrt[5]{2 \cdot 3^3} = \sqrt[5]{2^5 \cdot 3^5} = 6$.

12. Если $a \geq 0, b > 0$, то $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$. Доказательство.

Докажем, что $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \geq 0$ и $(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}})^n = \frac{a}{b}$. $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \geq 0$ т.к. $\sqrt[n]{a}, \sqrt[n]{b} \geq 0$.

По свойству степени частного $(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}})^n = \frac{(\sqrt[n]{a})^n}{(\sqrt[n]{b})^n} = \frac{a}{b}$ чтд.

а) $\sqrt[6]{\frac{2^{12}}{3^6}} = \frac{2^2}{3} = \frac{4}{3}$ б) $\frac{\sqrt[3]{32}}{\sqrt[4]{2}} = \sqrt[4]{\frac{32}{2}} = \sqrt[4]{16} = 2$.

13. а) $\frac{15}{\sqrt{3}} = \frac{15\sqrt{3}}{3} = 5\sqrt{3}$; б) $\frac{6}{\sqrt[3]{25}} = \frac{6\sqrt[3]{25^2}}{25} = \frac{6}{25}\sqrt[3]{625}$;

в) $\frac{8}{\sqrt[4]{4}} = \frac{8\sqrt[4]{4^3}}{4} = 2\sqrt[4]{64}$.

14. а) $\sqrt[3]{\sqrt{27}} = \sqrt{\sqrt[3]{27}} = \sqrt{3}$; б) $\sqrt[5]{\sqrt{32}} = \sqrt{\sqrt[5]{32}} = \sqrt{2}$;
 в) $\sqrt[3]{2+\sqrt{3}} \cdot \sqrt[3]{2-\sqrt{3}} = \sqrt[3]{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} = \sqrt[3]{4-3} = 1$.
15. Если $a > 0$ и x — произвольное рациональное число, представленное дробью $\frac{m}{n}$, где m — целое, n — натуральное, то $a^x = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$;
- а) $100^{\frac{1}{2}} = \sqrt{100} = 10$ б) $81^{\frac{-1}{4}} = \sqrt[4]{81^{-1}} = \frac{1}{3}$; в) $\left(3\frac{3}{8}\right)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\frac{27}{8}} = 1,5$.
16. Для любых $a, b > 0$ и любых рациональных p и q :
- 1) $a^p a^q = a^{p+q}$; 2) $a^p \div a^q = a^{p-q}$; 3) $(a^p)^q = a^{pq}$; 4) $(ab)^p = a^p b^p$;
- 5) $\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}$;
- а) $a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{1}{4}} = a^{\frac{2}{3} + \frac{1}{4}} = a^{\frac{11}{12}}$; б) $a^{\frac{4}{5}} \div a^{0,1} = a^{0,8-0,1} = a^{0,7}$; в) $(a^{0,2})^{\frac{5}{6}} = a^{\frac{1}{5} \cdot \frac{5}{6}} = a^{\frac{1}{6}}$.
17. а) $\frac{\sqrt[3]{a^2} \cdot a^{0,5}}{a^{\frac{1}{6}}} = a^{\frac{2}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6}} = a$; б) $\frac{a^{0,3} \cdot \sqrt[5]{a^2}}{a^{-1,3}} = \frac{a^{0,3} \cdot a^{0,4}}{a^{-1,3}} = a^{0,3+0,4+1,3} = a^2$.
18. а) $\frac{27^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt[3]{4^2}}{\sqrt{3} \cdot 2^{\frac{1}{3}}} = \frac{3^{\frac{3}{2}} \cdot (2^2)^{\frac{2}{3}}}{3^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{3}}} = 3 \cdot 2^{\frac{4}{3} - \frac{1}{3}} = 6$;
- б) $\frac{\sqrt[3]{16} \cdot 25^{\frac{1}{5}}}{\frac{1}{2^3} \cdot 5^{-0,6}} = \frac{2^{\frac{4}{3}} \cdot 5^{\frac{2}{5}}}{2^{\frac{1}{3}} \cdot 5^{\frac{-3}{5}}} = 2 \cdot 5 = 10$.

Тригонометрические выражения и их преобразования

1. Синус угла a — число, равное ординате конца единичного радиуса, задающего угол a .
 Косинус угла a — число, равное абсциссе конца единичного радиуса, задающего угол a .
 Тангенс угла a — число равное отношению синуса угла a такого, что $\alpha \neq \pi/2 + \pi k, k \in z$, к косинусу этого угла.
 Котангенс угла a — число, равное отношению косинуса угла a такого, что $\alpha \neq \pi k, k \in z$, к синусу этого угла.
- а) $2 \sin 30^\circ - \cos 60^\circ + 3 \operatorname{tg} 45^\circ = 2 \cdot 0,5 - 0,5 + 3 = 3,5$;

$$\text{б) } 4\text{ctg}45^\circ - \sin 60^\circ + \cos 30^\circ = 4 - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = 4.$$

2.

четверть	I	II	III	IV
$\sin \alpha$	+	+	-	-
$\cos \alpha$	+	-	-	+
$\text{tg} \alpha$	+	-	+	-
$\text{ctg} \alpha$	+	-	+	-

а) $\sin 143^\circ > 0$; б) $\cos 108^\circ < 0$; в) $\text{tg} 61^\circ > 0$; г) $\text{ctg} 280^\circ < 0$;

д) $\sin 125^\circ \cdot \cos 200^\circ = \langle + \rangle \cdot \langle - \rangle < 0$; е) $\text{tg} 160^\circ \text{ctg} 200^\circ = \langle - \rangle \cdot \langle + \rangle < 0$.

3. $\sin 763^\circ = \sin(720^\circ + 43^\circ) = \sin 43^\circ$;

При этом использовалось следующее свойство: $\sin(2\pi \cdot k + \alpha) = \sin \alpha, k \in \mathbb{Z}$. Косинус, тангенс, котангенс обладают аналогичным свойством.

4. $y = \sin x, y = \text{tg} x, y = \text{ctg} x$ – нечетные; $y = \cos x$ – четная;

а) $\sin(-30^\circ) = -\sin 30^\circ = -0,5$; б) $\text{tg}(-45^\circ) = -\text{tg} 45^\circ = -1$;

в) $\cos(-60^\circ) = \cos 60^\circ = 0,5$; г) $\text{ctg}(-30^\circ) = -\text{ctg} 30^\circ = -\sqrt{3}$.

5. Угол в 1 рад – центральный угол которому соответствует длина дуги равная длине радиуса окружности.

а) $2,5 = \left(2,5 \cdot \frac{180}{\pi}\right)^\circ = \left(\frac{450}{\pi}\right)^\circ$; б) $\frac{\pi}{4} = \frac{180^\circ}{4} = 45^\circ$;

в) $-\frac{\pi}{2} = -\frac{180^\circ}{2} = -90^\circ$; г) $10\pi = 10 \cdot 180^\circ = 1800^\circ$.

а) $120^\circ = 120 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{2}{3}\pi$; б) $270^\circ = 270 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{3}{2}\pi$;

в) $-180^\circ = -180 \cdot \frac{\pi}{180} = -\pi$; г) $-150^\circ = -150 \cdot \frac{\pi}{180} = -\frac{5}{6}\pi$.

6. а) $3\sin \pi - \cos \frac{3\pi}{2} - 3\text{tg} \frac{\pi}{4} = 0 - 0 - 3 = -3$;

б) $2\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) + \cos(-\pi) + \text{tg} 2\pi + \text{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -2\sin \frac{\pi}{6} + \cos \pi + \text{tg} 2\pi - \text{tg} \frac{\pi}{4} =$
 $= -2 \cdot 0,5 - 1 + 0 - 1 = -3$.

7. $\sin^2 a + \cos^2 a = 1$; $1 + \text{tg}^2 a = \frac{1}{\cos^2 a}$; $1 + \text{ctg}^2 a = \frac{1}{\sin^2 a}$; $\text{tga} \cdot \text{ctga} = 1$;

а) $1 - \sin a \cos a \text{tg} a = 1 - \sin a \cos a \frac{\sin a}{\cos a} = 1 - \sin^2 a = \cos^2 a$;

б) $2 - \cos^2 a - \sin^2 a = 2 - 1 = 1$;

в) $\frac{\text{tg} a \text{ctg} a - \cos^2 a}{\sin^2 a - \text{tg} a \text{ctg} a} = \frac{1 - \cos^2 a}{\sin^2 a - 1} = -\frac{\sin^2 a}{\cos^2 a} = -\text{tg}^2 a$.

8. $\frac{\pi}{2} < a < \pi$; а) $\sin a = 0,6$; $\cos a = -\sqrt{1 - \sin^2 a} = -0,8$;
 $\operatorname{tga} = \frac{\sin a}{\cos a} = -\frac{0,6}{0,8} = -\frac{3}{4}$;

б) $\cos a = -\frac{15}{17}$; $\sin a = \sqrt{1 - \cos^2 a} = \sqrt{1 - \frac{15^2}{17^2}} = \frac{8}{17}$; $\operatorname{tga} = \frac{\sin a}{\cos a} = -\frac{8}{15}$;

в) $\operatorname{tga} = -\sqrt{3}$; $\cos a = \frac{-1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 a}} = -\frac{1}{\sqrt{1 + 3}} = -\frac{1}{2}$;
 $\sin a = \sqrt{1 - \cos^2 a} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

9. а) $\sin(180^\circ + a) = -\sin a$; б) $\cos(270^\circ - a) = -\sin a$; в) $\operatorname{tg}(90^\circ + a) = -\operatorname{ctga}$;
г) $\sin\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = \cos a$; д) $\cos(\pi - a) = -\cos a$; е) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \operatorname{ctga}$.

10. $\sin(a \pm \beta) = \sin a \cos \beta \pm \cos a \sin \beta$; $\cos(a \pm \beta) = \cos a \cos \beta \mp \sin a \sin \beta$;
а) $\frac{\sin(a - \beta) + \cos a \sin \beta}{\sin(a + \beta) - \cos a \sin \beta} = \frac{\sin a \cos \beta - \cos a \sin \beta + \cos a \sin \beta}{\sin a \cos \beta + \cos a \sin \beta - \cos a \sin \beta} = 1$;
б) $\frac{\sin(a + \beta) + \sin(a - \beta)}{\cos(a + \beta) - \cos(a - \beta)} = \frac{\sin a \cos \beta + \cos a \sin \beta + \sin a \cos \beta - \cos a \sin \beta}{\cos a \cos \beta - \sin a \sin \beta - \cos a \cos \beta - \sin a \sin \beta} = \frac{2 \sin a \cos \beta}{-2 \sin a \sin \beta} = -\operatorname{ctg} \beta$.

11. а) $\sin 75^\circ = \sin(45^\circ + 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \sin 30^\circ =$
 $= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3} + 1)}{4}$;
б) $\cos 15^\circ = \cos(90^\circ - 75^\circ) = \sin 75^\circ = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3} + 1)}{4}$;
в) $\sin 105^\circ = \sin(90^\circ + 15^\circ) = \cos 15^\circ = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3} + 1)}{4}$;
г) $\cos 105^\circ = \cos(90^\circ + 15^\circ) = -\sin 15^\circ = -\sin(45^\circ - 30^\circ) =$
 $= -\sin 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \sin 30^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}(1 - \sqrt{3})}{4}$.

12. $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$; $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a$;
 $\operatorname{tg} 2a = \frac{2 \operatorname{tga}}{1 - \operatorname{tg}^2 a}$; а) $\frac{\sin 2a}{2 \cos a} = \frac{2 \sin a \cos a}{2 \cos a} = \sin a$;
б) $\cos^4 a - \sin^4 a = (\cos^2 a + \sin^2 a)(\cos^2 a - \sin^2 a) = \cos 2a$;
в) $\sin 2a - (\sin a + \cos a)^2 = \sin 2a - (\sin^2 a + \cos^2 a + 2 \sin a \cos a) =$
 $= \sin 2a - 1 - \sin 2a = -1$;
г) $\frac{2\sqrt{3} \operatorname{tg} 15^\circ}{1 - \operatorname{tg}^2 15^\circ} = \sqrt{3} \operatorname{tg} 30^\circ = \sqrt{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = 1$.

13. а) $2 \sin 75^\circ \cos 75^\circ = \sin 150^\circ = \sin(180^\circ - 30^\circ) = \sin 30^\circ = 0,5$;
 б) $\cos^2 165^\circ - \sin^2 165^\circ = \cos 330^\circ = \cos(360^\circ - 30^\circ) = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$;
 в) $\frac{2 \operatorname{tg} 105^\circ}{1 - \operatorname{tg}^2 105^\circ} = \operatorname{tg} 210^\circ = \operatorname{tg}(180^\circ + 30^\circ) = \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$.
14. $\sin a + \sin \beta = 2 \sin \frac{a+\beta}{2} \cdot \cos \frac{a-\beta}{2}$;
 $\sin a - \sin \beta = 2 \sin \frac{a-\beta}{2} \cdot \cos \frac{a+\beta}{2}$; $\cos a + \cos \beta = 2 \cos \frac{a+\beta}{2} \cdot \cos \frac{a-\beta}{2}$;
 $\cos a - \cos \beta = -2 \sin \frac{a+\beta}{2} \cdot \sin \frac{a-\beta}{2}$;
 а) $\sin 3a + \sin 5a = 2 \sin 4a \cos a$; б) $\sin 3\beta - \sin \beta = 2 \sin \beta \cos 2\beta$;
 в) $\cos 4a + \cos 2a = 2 \cos 3a \cos a$;
 г) $\cos a - \cos 5a = -2 \sin 3a \sin(-2a) = 2 \sin 3a \sin 2a$.
 $\frac{\sin 5a + \sin a}{\cos 5a + \cos a} = \frac{2 \sin 3a \cos 2a}{2 \cos 3a \cos 2a} = \operatorname{tg} 3a$;
15. а) $\frac{\cos 4a - \cos 6a}{\cos 4a + \cos 6a} = \frac{2 \sin 5a \sin a}{2 \cos 5a \cos a} = \operatorname{tg} 5a \cdot \operatorname{tga}$.
 б) а) $\frac{\cos 58^\circ - \cos 32^\circ}{\sin 58^\circ - \sin 32^\circ} = \frac{-2 \sin 45^\circ \sin 13^\circ}{2 \sin 13^\circ \cos 45^\circ} = -1$;
 б) $\frac{\sin 130^\circ + \sin 50^\circ}{\cos 130^\circ - \cos 50^\circ} = \frac{2 \sin 90^\circ \sin 40^\circ}{2 \sin 90^\circ \cos 40^\circ}$; данное выражение не имеет смысла,
 т.к. $\cos 90^\circ = 0$.

**Итоговое повторение по темам.
 (к учебнику под научным руководством Тихонова)
 Степень с рац-показателем.**

1. Пусть a - действительное число, $a \neq 0, n$ - натуральное число. Тогда
 $a^{-n} = \frac{1}{a^n}; a^0 = 1$.
- 1) а) $2^{-4} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}$; б) $(-3)^5 = \frac{1}{(-3)^2} = \frac{1}{9}$; в) $1^{-10} = \frac{1}{1^{10}} = 1$;
 г) $\left(\frac{2}{7}\right)^{-2} = \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{49}{4}$; д) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2$; е) $(-2)^0 = 1$; ж) $1,075^0 = 1$;
 з) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{2^2} = \frac{9}{4} - \frac{1}{4} = 2$;
 2) а) $\frac{1}{2^3} = 2^{-3}$; б) $\frac{1}{3^2} = 3^{-2}$; в) $\frac{1}{a^6} = a^{-6}$; г) $\frac{1}{16} = \frac{1}{2^4} = 2^{-4}$.

2. $a, b \neq 0; m, n \in \mathbb{Z};$

1) $a^m \cdot a^n = a^{m+n};$ 2) $a^m \div a^n = a^{m-n}$ 3) $(a^m)^n = a^{mn};$

4) $(ab)^n = a^n \cdot b^n;$ 5) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$

1) а) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^{-2+1} = \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} = 3;$

б) $\left(\frac{-1}{7}\right)^2 \cdot \left(\frac{-1}{7}\right)^{-3} = \left(\frac{-1}{7}\right)^{2-3} = \left(\frac{-1}{7}\right)^{-1} = -7;$ в) $2^3 \div 2^5 = 2^{3-5} = 2^{-2} = \frac{1}{4};$

г) $(0,1)^2 \div (0,1)^{-2} = (0,1)^{2+2} = (0,1)^4 = 0,0001;$

д) $(a^2)^3 = a^{-6};$ е) $(b^{-3})^2 = b^{-6};$ ж) $(ab)^{-2} = a^{-2}b^{-2};$

з) $(a^2b)^1 = a^{-2}b^{-1};$ и) $(2a^2)^{-2} = 2^{-2}a^{-4} = \frac{a^{-4}}{4};$

к) $\left(\frac{a}{b}\right)^{-3} = \left(\frac{b}{a}\right)^3 = \frac{b^3}{a^3};$ л) $\left(\frac{-2xy^{-2}}{z^{-3}}\right)^2 = \frac{(-2)^2 \cdot x^2 \cdot y^{-4}}{z^{-6}} = \frac{4x^2z^6}{y^4};$

2) а) $300000^2 = (3 \cdot 10^5)^2 = 9 \cdot 10^{10};$ б) $0,001^3 = (10^{-3})^3 = 10^{-9};$

в) $\frac{1}{625} = 0,0016 = 1,6 \cdot 10^{-3}.$

3. Арифметический корень n — ой степени из числа a — неотрицательное число, n — ая степень которого равна a .

$\sqrt[3]{27} = 3$, т.к. $3 \geq 0$ и $3^3 = 27$.

4. Извлечение корня n — ой степени. Оно является обратным к возведению в степень n .

5. а) $\sqrt{25} = 5;$ б) $\sqrt[3]{27} = 3;$ в) $\sqrt{\frac{1}{625}} = \frac{1}{25};$ г) $\sqrt[4]{\left(\frac{1}{3}\right)^8} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9};$

д) $\sqrt[3]{10^{12}} = 10^{\frac{12}{3}} = 10^4 = 10000.$

6. Уравнение $x^{2k+1} = a$ имеет единственный корень равный $\sqrt[2k+1]{a}; (a < 0).$

1) а) $\sqrt[3]{-8} = -2;$ б) $\sqrt[7]{-1} = -1;$ в) $\sqrt[3]{\frac{-1}{27}} = \frac{-1}{3};$ г) $\sqrt[5]{-3^5} = -3;$

2) а) $x^3 = -27; x = \sqrt[3]{-27}; x = -3.$ б) $x^4 = 625; x_{1,2} = \pm\sqrt[4]{625}; x_{1,2} = \pm 5.$

7. а) $\sqrt[3]{-64} - \frac{1}{2}\sqrt[6]{64} = -4 - \frac{1}{2} \cdot 2 = -5;$

б) $\sqrt[4]{10000} - 2\sqrt[3]{-0,001} = 10 + 2 \cdot 0,1 = 10,2;$

в) $\sqrt{3-\sqrt{2}} \cdot \sqrt{3+\sqrt{2}} = \sqrt{(3-\sqrt{2})(3+\sqrt{2})} = \sqrt{9-2} = \sqrt{7}.$

8. 1) $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$; 2) $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$; 3) $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$; 4) $\sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m}$.

9. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$, $a, b \geq 0$ левая и правая части неотрицательны. Возведем правую часть равенства в степень n и убедимся, что она равна b . По свойству степеней с натуральным показателем получаем:

$$\left(\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}\right)^n = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n \cdot \left(\sqrt[n]{b}\right)^n = a \cdot b, \text{ ч.т.д.}$$

10. а) $\sqrt[3]{216 \cdot 0,027} = \sqrt[3]{216} \cdot \sqrt[3]{0,027} = 6 \cdot 0,3 = 1,8$;

б) $\sqrt[3]{108} \cdot \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{108 \cdot 2} = \sqrt[3]{216} = 6$;

в) $\sqrt{\frac{16}{81}} = \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{81}} = \frac{4}{9}$; г) $\frac{\sqrt{20}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{20}{5}} = \sqrt{4} = 2$;

д) $(\sqrt{200} - \sqrt{32}) \div \sqrt{2} = (\sqrt{100 \cdot 2} - \sqrt{16 \cdot 2}) \div \sqrt{2} = (10\sqrt{2} - 4\sqrt{2}) \div \sqrt{2} = 6\sqrt{2} \div \sqrt{2} = 6$; е) $(\sqrt[5]{2})^5 = \sqrt[5]{2^5} = 2$; ж) $\sqrt{\sqrt[3]{64}} = \sqrt[6]{64} = 2$.

11. а) $\sqrt[3]{3a^2b^3} \cdot \sqrt[3]{9a} = \sqrt[3]{3 \cdot 9 \cdot a^3 \cdot b^3} = 3ab$;

б) $\sqrt[4]{\frac{a^2b}{c}} \cdot \sqrt[4]{\frac{a^2b^3}{c^3}} = \sqrt[4]{\frac{a^2a^2bb^3}{c \cdot c^3}} = \frac{ab}{c}$.

12. Если $a > 0, x$ — произвольное рациональное число, представленное

дробью m/n , где m — целое, n — натуральное, то $a^x = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

1) а) $15^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{15^3}$; б) $27^{\frac{-2}{3}} = \sqrt[3]{27^{-2}}$;

2) а) $\sqrt[3]{3^2} = 3^{\frac{2}{3}}$; б) $\sqrt{2^5} = 2^{\frac{5}{2}}$; в) $\sqrt[5]{5^{-3}} = 5^{\frac{-3}{5}}$.

13. Если a и b положительные действительные числа, а x и y — рациональные числа, то

1) $a^x a^y = a^{x+y}$; 2) $(a^x)^y = a^{xy}$; 3) $(ab)^x = a^x b^x$; 4) $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$;

5) $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$.

14. $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$.

Доказательство: Рассмотрим два рациональных числа, представленные

в виде дробей $\frac{p_1}{q_1}$ и $\frac{p_2}{q_2}$. Их всегда можно представить в виде $\frac{p_1 q_2}{q_1 q_2}$

и $\frac{p_2 q_1}{q_1 q_2}$, где знаменатели дробей равны. Поэтому будем считать, что

рациональные числа x и y уже представлены в виде двух дробей с одинаковыми знаменателями $\frac{m_1}{n}$ и $\frac{m_2}{n}$. По свойству арифметических корней n -ой степени получаем:

$$a^x a^y = a^{\frac{m_1}{n}} \cdot a^{\frac{m_2}{n}} = \sqrt[n]{a^{m_1}} \cdot \sqrt[n]{a^{m_2}} = \sqrt[n]{a^{m_1+m_2}} = a^{\frac{m_1+m_2}{n}} = a^{\frac{m_1}{n} + \frac{m_2}{n}} = a^{x+y}, \text{ ч.т.д.}$$

$$15. \text{ а) } 9^{\frac{1}{5}} \cdot 27^{\frac{1}{5}} = (3^2)^{\frac{1}{5}} \cdot (3^3)^{\frac{1}{5}} = 3^{\frac{2}{5}} \cdot 3^{\frac{3}{5}} = 3; \text{ б) } \left(\frac{25}{64}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{25^{\frac{1}{2}}}{64^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{64}} = \frac{5}{8}.$$

$$16. a^{\frac{1}{4}} \sqrt{a^3} = a^{\frac{1}{4}} \cdot \left(a \cdot a^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{4}} \left(a^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{4}} \cdot a^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{11}{12}}.$$

$$17. \text{ а) } \frac{a-b}{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}} = \frac{\left(\frac{1}{a^2} - b^2\right) \left(\frac{1}{a^2} + b^2\right)}{\frac{1}{a^2} - b^2} = a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}};$$

$$\text{б) } \frac{\frac{1}{a^4} + b^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = \frac{\frac{1}{a^4} + b^{\frac{1}{4}}}{\left(\frac{1}{a^4} - b^{\frac{1}{4}}\right) \left(\frac{1}{a^4} + b^{\frac{1}{4}}\right)} = \frac{1}{\sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{b}}.$$

18.

1) а) если $a > b > 0, z > 0$, то $a^z > b^z$; б) если $a > b > 0, z < 0$, то $a^z < b^z$;

2) а) $3 > 2, 2 > 0$, то $3^2 > 2^2$ т.к. $9 > 4$;

б) $3 > 2, -1 > 0$, то $3^{-1} < 2^{-1}$ т.к. $\frac{1}{3} < \frac{1}{2}$.

19. а) $\left(\frac{13}{14}\right)^{-\frac{1}{2}}$ и $\left(\frac{14}{13}\right)^{-\frac{1}{2}}$ т.к. $\frac{14}{13} > \frac{13}{14}; -\frac{1}{2} < 0$, то $\left(\frac{13}{14}\right)^{-\frac{1}{2}} > \left(\frac{14}{13}\right)^{-\frac{1}{2}}$;

б) $\left(\frac{3}{4}\right)^{\sqrt{3}}$ и $(0,755)^{\sqrt{3}}$ т.к. $\frac{3}{4} < 0,755; \sqrt{3} > 0$, то $\left(\frac{3}{4}\right)^{\sqrt{3}} < (0,755)^{\sqrt{3}}$.

Степенная функция

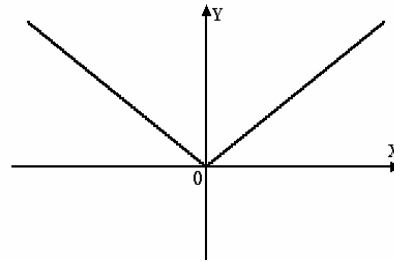
1. Область определения функции — все значения независимой переменной.

2. Найти все значения аргумента, при которых формула имеет смысл.

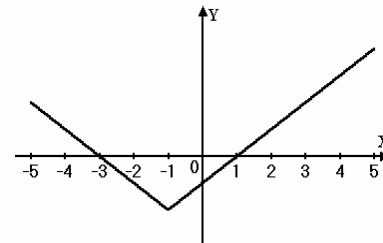
3. а) $y = 2x + 4$; $D(y) = R$; б) $y = 4x^2 + 3x + 5$; $D(y) = R$;
 в) $y = \frac{1}{x}$; $x \neq 0$; $D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; г) $y = \sqrt{x}$; $x \geq 0$; $D(y) = [0; +\infty)$;
 д) $y = \sqrt{x+1}$; $x+1 \geq 0, x \geq -1$; $D(y) = [-1; +\infty)$;
 е) $y = \frac{1}{\sqrt{x-2}}$; $x-2 > 0, x > 2$; $D(y) = (2; +\infty)$.

4. График функции — множество всех точек координатной плоскости, абсциссы которых равны значениям аргумента, а ординаты — соответствующим значениям функции.

5. а) $y = |x|$;



б) $y = |x+1| - 2$.



6. Функция называется возрастающей (убывающей) на некотором промежутке, если большему значению аргумента из этого промежутка соответствует большее (меньшее) значение функции.

а) $y = x^2$ на $[1; 3)$; б) $y = -x$ на $[-1; 0)$.

7. От значения показателя степени r .

8. 1) а) степенная функция $y = x^2$ возрастает на промежутке $x \geq 0$, если $r > 0$;

б) степенная функция $y = x^2$ убывает на промежутке $x < 0$, если $r < 0$;

2) $y = x$ возрастает на $x \geq 0$; $y = \frac{1}{x}$ убывает на $x > 0$.

9. $x^{\frac{1}{2}} = 4 \quad \sqrt{x} = 4 \quad x = 16$

10. а) $y = x^{-\frac{2}{3}}$ — убывает, т.к. $r = -\frac{2}{3} < 0$; б) $y = x^{\frac{2}{3}}$ — возрастает, т.к.

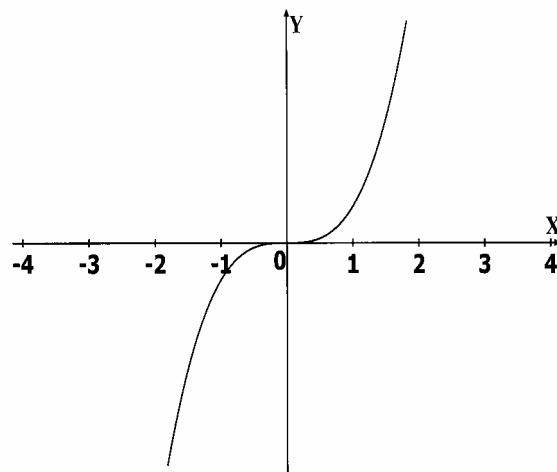
$r = \frac{2}{3} > 0$; в) $y = x^{\frac{3}{2}}$ — возрастает, т.к. $r = \frac{3}{2} > 0$;

г) $y = x^{-\frac{3}{2}}$ — убывает, т.к. $r = -\frac{3}{2} < 0$.

11. Функция $f(x)$ называется четной, если для любого x из ее области определения $f(-x) = f(x)$;

$y = \frac{1}{x^2} \quad y(-x) = \frac{1}{(-x)^2} = \frac{1}{x^2} = y(x)$, значит $y(x)$ — четная, чтд.

12. $y = x^3 \quad D(y) = E(y) = R; y > 0$ при $x > 0; y < 0$ при $x < 0, y = 0$ при $x = 0$; y возрастает на R ; нечетная.



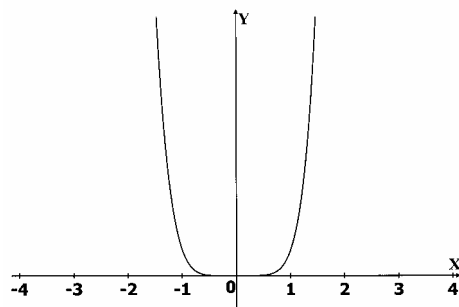
13. Функция $f(x)$ — называется нечетной, если для любого x из ее области определения $f(-x) = -f(x)$.

$y = x^3 \quad y(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -y(x)$, значит $y(x)$ — нечетная, чтд.

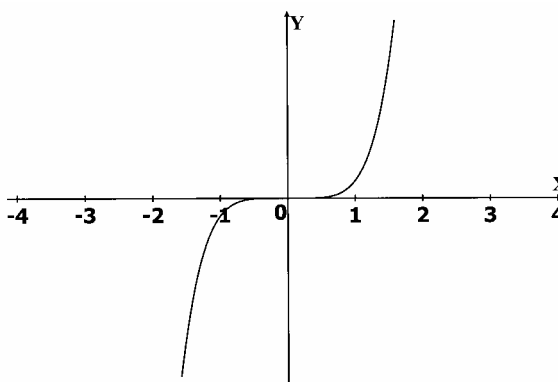
14. Область определения симметрична относительно нуля.

15. а) симметричен относительно оси ординат;
б) симметричен относительно начала координат.

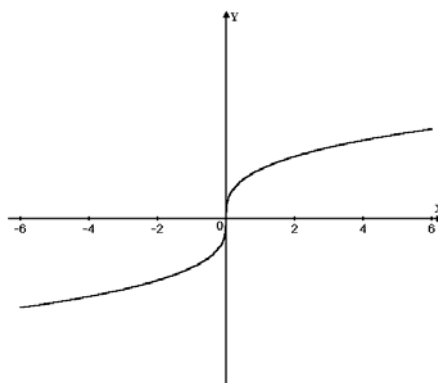
16. а) $y = x^6$;



б) $y = x^5$;

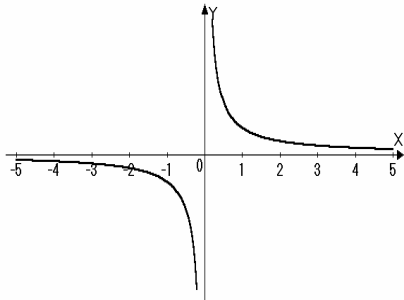


17. $y = \sqrt[3]{x}$;



$D(y) = E(y) = R$; $y > 0$ при $x > 0$; $y < 0$ при $x < 0$; $y = 0$ при $x = 0$;
возрастает на R ; нечетная.

18. $y = \frac{1}{x}$;



$D(y) = E(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; $y > 0$ при $x > 0$; $y < 0$ при $x < 0$; убывает на $D(y)$; нечетная.

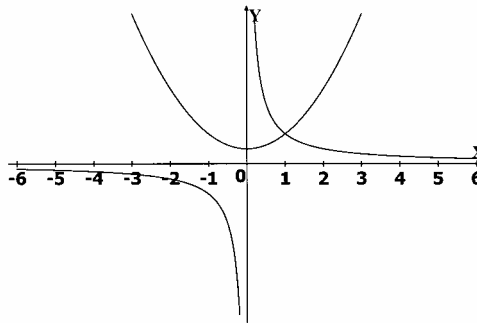
19. Гипербола.

20. а) Растяжением в 2 раза вдоль оси OY . б) График первой функции расположен в 1 и 3 четвертях, график второй — в 2 и 4 четвертях.

21. Обратная пропорциональность.

22. а) $x^3 > 27$; $x > \sqrt[3]{27}$; $x > 3$ б) $x^4 \leq 625$; $-\sqrt[4]{625} \leq x \leq \sqrt[4]{625}$; $-5 \leq x \leq 5$.

23. $\frac{2}{x} = x^2 + 1$.



Ответ: 1.

24. а) $\sqrt{2+x} = 3$; $2+x=9$; $x=7$; Ответ: 7. б) $\sqrt{2x^2-3x+2} = 4-x$;
 $2x^2-3x+2 = 16+x^2-8x$; $x^2+5x-14 = 0$;
 $D = 25+56 = 81$; $x_1 = \frac{-5+9}{2} = 2$; $x_2 = -7$.

Проверка: $x = 2$; $\sqrt{2 \cdot 4 + 6 + 2} = 4 - 2$ — верно

$x = -7$; $\sqrt{2 \cdot 49 + 21 + 2} = 4 + 7$ — верно. Ответ: -7, 2.

Элементы тригонометрии.

1. Угол в 1 рад — центральный угол, которому соответствует длина дуги, равная длине радиуса окружности.
2. $\left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ$; а) $\pi = 180^\circ$; б) $\frac{\pi}{4} = \frac{180^\circ}{4} = 45^\circ$;
в) $\frac{2}{3}\pi = \frac{2}{3} \cdot 180^\circ = 120^\circ$; г) $\frac{3}{4}\pi = \frac{3}{4} \cdot 180^\circ = 135^\circ$.
3. $\frac{\pi}{180}$ рад. а) $180^\circ = \pi$; б) $90^\circ = 90 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{2}$;
в) $20^\circ = 20 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{9}$; г) $150^\circ = 150 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{5\pi}{6}$.
4. а) $\pi \approx 3,14$; б) $\frac{2}{3}\pi \approx 2,09$; в) $\frac{\pi}{2} \approx 1,57$; г) $2\pi \approx 6,28$.
5. а) $-\frac{\pi}{2} > -2$; б) $\pi < 3,2$; в) $2\pi < 6,72$.
6. Единичная окружность — окружность единичного радиуса с центром в начале координат.
7. а) против часовой стрелки, б) по часовой стрелке.
8. а) $(0;1)$; б) $(0;1)$; в) $(-1;0)$; г) $(1;0)$; д) $(1;0)$; е) $(-1;0)$.
9. Каждой точке сопоставим угол α , а углу α — его тангенс, т.е. действительное число.
10. а) $A(-1;0)$ $\alpha = \pi + 2\pi n, n \in Z$; б) $B(0;1)$; $\beta = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$;
в) $C\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; $\gamma = \frac{\pi}{4} + 2\pi l, l \in Z$.
11. а) $(0;1)$; б) $(0;1)$; в) $(0;-1)$.
12. Синус угла α — число, равное ординате конца единичного радиуса, задающего угол α .
Косинус угла α — число, равное абсциссе конца единичного радиуса, задающего угол α .
Тангенс угла α — число, равное отношению синуса угла α такого, что $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$, к косинусу этого угла.
Котангенс угла α — число, равное отношению косинуса угла α такого, что $\alpha \neq \pi k, k \in Z$, к синусу этого угла.
13. а) $\sin x = 0$; $x = \pi n, n \in Z$; б) $\cos x = 0$; $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$;
в) $\sin x = 1$; $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$; г) $\cos x = 1$; $x = 2\pi n, n \in Z$.

14.

α	$0^0(0)$	$30^0\left(\frac{\pi}{6}\right)$	$45^0\left(\frac{\pi}{4}\right)$	$60^0\left(\frac{\pi}{3}\right)$	$90^0\left(\frac{\pi}{2}\right)$
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$tg \alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	-
$ctg \alpha$	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

15. а) $4 \cos \frac{\pi}{3} + \sqrt{3} \sin \frac{\pi}{3} - tg \frac{\pi}{4} = 4 \cdot \frac{1}{2} + \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 = 1 + \frac{3}{2} = 2,5$;

б) $2 \sin \frac{\pi}{4} + \sqrt{2} \cos \frac{\pi}{4} = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} + 1$.

16.

четверть	I	II	III	IV
$\sin \alpha$	+	-	-	-
$\cos \alpha$	+	-	-	+
$tg \alpha$	+	-	+	-
$ctg \alpha$	+	-	+	-

а) $\sin 275^0 < 0$; б) $\cos 130^0 < 0$; в) $tg 50^0 > 0$; г) $ctg 105^0 < 0$;

д) $\sin \frac{2\pi}{3} > 0$; е) $\cos \frac{\pi}{4} > 0$; ж) $tg \frac{3\pi}{4} < 0$; з) $ctg \frac{3\pi}{3} < 0$.

17. а) $\sin 1 > 0$; б) $\cos 3 < 0$; в) $tg(-3,4) < 0$; г) $ctg 2 < 0$;

д) $\sin \frac{2\pi}{3} \cdot \cos \frac{3\pi}{4} = "+" \cdot "-" < 0$; е) $\cos \frac{2\pi}{3} \sin \frac{3\pi}{4} = "-" \cdot "+" < 0$;

ж) $tg \frac{5\pi}{4} \sin \frac{5\pi}{4} = "+" \cdot "-" < 0$.

18. $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$; $\sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$; $\cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$.

19. а) $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$; $\cos \alpha = -\frac{7}{25}$; $\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{49}{625}} = \frac{24}{25}$;

$tg \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\frac{24}{7}$; $ctg \alpha = \frac{1}{tg \alpha} = -\frac{7}{24}$;

б) $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$; $\sin \alpha = 0,28$; $\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - 0,28^2} = 0,96$;

$tg \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{0,28}{0,96} = \frac{7}{24}$; $ctg \alpha = \frac{1}{tg \alpha} = \frac{24}{7}$.

20. а) $tg\alpha \cdot ctg\alpha = 1$; б) $1 + tg^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$; в) $1 + ctg^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$.

21. а) $ctg\alpha = \frac{1}{tg\alpha} = \frac{1}{5,2} = \frac{5}{26}$; б) $tg\alpha = \frac{\sqrt{1 - \cos^2\alpha}}{\cos\alpha} = \frac{\sqrt{1 - 0,6^2}}{0,6} = \frac{4}{3}$;

в) $\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{1 + tg^2\alpha}} = -\frac{1}{\sqrt{1 + 2^2}} = -\frac{1}{\sqrt{5}}$; г) $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + ctg^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1 + 4}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$;

д) $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + tg^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{15^2}{8^2}}} = \frac{8}{17}$; $\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \sqrt{1 - \frac{64}{289}} = \frac{15}{17}$.

22. а) $(1 + \sin\alpha)(1 - \sin\alpha) = 1 - \sin^2\alpha = \cos^2\alpha$;

б) $(\cos\alpha - 1)(\cos\alpha + 1) = \cos^2\alpha - 1 = -\sin^2\alpha$;

в) $\frac{1 - tg^2\alpha}{1 + tg^2\alpha} = \left(1 - \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}\right) \cdot \cos^2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos 2\alpha$;

г) $\frac{\cos^2\alpha}{1 - \cos^2\alpha} = \frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = ctg^2\alpha$;

д) $\sin\alpha \cos\alpha tg\alpha - 1 = \sin\alpha - \cos\alpha \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} - 1 = -\cos^2\alpha$;

е) $\frac{tg\alpha ctg\alpha - \sin^2\alpha}{\cos^2\alpha - tg\alpha ctg\alpha} = \frac{1 - \sin^2\alpha}{\cos^2\alpha - 1} = -\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = -ctg^2\alpha$.

23. а) $(1 - \cos^2\alpha)(1 + ctg^2\alpha) = \sin^2\alpha \frac{1}{\sin^2\alpha} = 1$ ч.т.д.

б) $\cos^2\alpha(1 + tg^2\alpha) - \sin^2\alpha = \cos^2\alpha \frac{1}{\cos^2\alpha} - \sin^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = \cos^2\alpha$ ч.т.д.

24. $\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$; $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$; $tg(-\alpha) = -tg(\alpha)$;

а) $\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

в) $tg\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -tg\frac{\pi}{4} = -1$;

г) $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \cdot \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + ctg\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\sin\frac{\pi}{6} \cdot \cos\frac{\pi}{3} - ctg\frac{\pi}{4} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} - 1 = -\frac{5}{4}$.

25. а) $\frac{\sin\alpha}{1 + \cos(-\alpha)} - \frac{1 + \cos(-\alpha)}{\sin(-\alpha)} = \frac{\sin\alpha}{1 + \cos\alpha} + \frac{1 + \cos\alpha}{\sin\alpha} =$
 $= \frac{\sin^2\alpha + 1 + \cos^2\alpha + 2\cos\alpha}{\sin\alpha(1 + \cos\alpha)} = \frac{2 + 2\cos\alpha}{\sin\alpha(1 + \cos\alpha)} = \frac{2}{\sin\alpha}$;

б) $\frac{1}{1 + tg^2(-\alpha)} + \frac{1}{1 + ctg^2(-\alpha)} = \frac{1}{1 + tg^2\alpha} + \frac{1}{1 + ctg^2\alpha} = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$.

26. $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$;
 $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$;

1) а) $\frac{\cos(\alpha - \beta) - \sin(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)} = \frac{\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta - \sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta - \cos \alpha \cos \beta} = -\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta$;

б) $\frac{\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)} = \frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta - \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta - \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta} =$
 $= \frac{2 \cos \alpha \sin \beta}{2 \sin \alpha \sin \beta} = \operatorname{ctg} \alpha$.

2) а) $\cos 75^0 = \cos(45^0 + 30^0) = \cos 45^0 \cos 30^0 - \sin 45^0 \sin 30^0 =$
 $= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1)}{4}$; б) $\sin 15^0 = \sin(90^0 - 75^0) = \cos 75^0 = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1)}{4}$;

в) $\cos 105^0 = \cos(90^0 + 15^0) = -\sin 15^0 = -\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1)}{4}$;

г) $\sin 105^0 = \sin(90^0 + 15^0) = \cos 15^0 = \cos(45^0 - 30^0) = \cos 45^0 \cos 30^0 +$
 $+ \sin 45^0 \sin 30^0 = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3} + 1)}{4}$;

д) $\sin 74^0 \cos 16^0 + \cos 74^0 \sin 16^0 = \sin(74^0 + 16^0) = \sin 90^0 = 1$;

е) $\cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \frac{1}{9}} = -\frac{\sqrt{2}}{3}$;

$\cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) = \cos \frac{\pi}{3} \cos \alpha + \sin \frac{\pi}{3} \sin \alpha = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{3}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{2\sqrt{3}}$;

ж) $\sin \alpha = -\sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \frac{2}{9}} = -\frac{\sqrt{7}}{3}$;

$\sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \sin \frac{\pi}{4} \cdot \cos \alpha - \cos \frac{\pi}{4} \sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{\sqrt{7}}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{7} + \sqrt{2})}{6}$.

27. $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$; $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha$;

1) а) $\frac{1 - \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{1 - 1 + 2 \sin^2 \alpha}{2 \sin \alpha \cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha$;

б) $(1 - \cos 2\alpha) \operatorname{ctg} \alpha = (1 - 1 + 2 \sin^2 \alpha) \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = 2 \sin \alpha \cos \alpha = \sin 2\alpha$;

в) $\cos 2\alpha + 2 \sin^2(-\alpha) = 1 - 2 \sin^2 \alpha + 2 \sin^2 \alpha = 1$;

г) $\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha = (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha)(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) = \cos 2\alpha$;

2) а) $1 - \left(\sin \frac{\pi}{8} - \cos \frac{\pi}{8}\right)^2 = 1 - \left(\sin^2 \frac{\pi}{8} + \cos^2 \frac{\pi}{8} - 2 \sin \frac{\pi}{8} \cos \frac{\pi}{8}\right) =$
 $= 1 - \left(1 - \sin \frac{\pi}{4}\right) = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

б) $\cos^2 \frac{\pi}{12} - \sin^2 \frac{\pi}{12} = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$; в) $\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - 0,6^2} = 0,8$;
 $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = -2 \cdot 0,8 \cdot 0,6 = -0,96$;
г) $\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - 0,6^2} = 0,8$; $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 0,64 - 0,36 = 0,28$;
д) $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{2 \cdot 2}{1 - 4} = -\frac{4}{3}$.

28. 1) а) $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$; б) $\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$; в) $\operatorname{tg}(\pi + \alpha) = \operatorname{tg} \alpha$;
г) $\operatorname{tg}(\pi - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$; д) $\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$; е) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha$;

2) а) $\cos 17\pi = \cos(16\pi + \pi) = \cos \pi = -1$; б) $\cos \frac{13\pi}{6} = \cos\left(2\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$;
в) $\sin 420^\circ = \sin(360^\circ + 60^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$;
г) $\operatorname{tg} 135^\circ = \operatorname{tg}(90^\circ + 45^\circ) = -\operatorname{ctg} 45^\circ = -1$;
д) $\cos 120^\circ = \cos(90^\circ + 30^\circ) = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}$;
е) $\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = \cos \frac{2\pi}{3} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\cos \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$;
ж) $\operatorname{tg}\left(-\frac{11\pi}{6}\right) = -\operatorname{tg} \frac{11\pi}{6} = -\operatorname{tg}\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$;
з) $\sin\left(-\frac{7\pi}{3}\right) = -\sin \frac{7\pi}{3} = -\sin\left(2\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\sin \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Прогрессии

1.

1) 1; 4; 9; 16; 25.

2) а) $a_n = \frac{1}{n}$, $a_1 = 1$; $a_2 = \frac{1}{2}$; $a_3 = \frac{1}{3}$; $a_4 = \frac{1}{4}$; $a_5 = \frac{1}{5}$;

б) $a_n = n(n+2)$, $a_1 = 1(1+2) = 3$; $a_2 = 2(2+2) = 8$; $a_3 = 3(3+2) = 15$;
 $a_4 = 4(4+2) = 24$; $a_5 = 5(5+2) = 35$;

в) $a_n = \frac{n}{n-1}$, $a_2 = \frac{2}{2-1} = 2$; $a_3 = \frac{3}{3-1} = \frac{3}{2}$; $a_4 = \frac{4}{4-1} = \frac{4}{3}$;

$a_5 = \frac{5}{5-1} = \frac{5}{4}$; $a_6 = \frac{6}{6-1} = \frac{6}{5}$;

г) $a_n = -n^2$, $a_1 = -1$; $a_2 = -4$; $a_3 = -9$; $a_4 = -16$; $a_5 = -25$;

3) $b_1 = 2$, $b_{n+1} = 2b_n + 1$;

$b_2 = 2b_1 + 1 = 5$; $b_3 = 2b_2 + 1 = 11$; $b_4 = 2b_3 + 1 = 23$; $b_5 = 2b_4 + 1 = 47$.

2. Арифм. прогрессия – числовая посл-ть, в которой каждое число, начиная со второго, равно предыдущему, сложенному с одним и тем же числом, постоянным для этой последовательности. 2; 4; 6; 8;...

3. $a_n = 4 - 2n$; $a_{n-1} = 4 - 2(n-1)$; $a_{n+1} = 4 - 2(n+1)$;

$$a_n = \frac{a_n - 1 + a_{n+1}}{2}; 4 - 2n = \frac{4 - 2(n-1) + 4 - 2(n+1)}{2} \text{ — верно для любого}$$

$n \in N$, значит, (a_n) — арифм. прогрессия ч.т.д.

4. $a_n = a_1 + d(n-1)$; $a_1 = -2$, $d = 4$; $a_n = -2 + 4 \cdot 99 = 394$.

5. а) 2; 5; 8; 11;...; $a_n = 2 + 3(n-1) = 3n - 1$;

б) 1; -1; -3; -5;...; $a_n = 1 - 2(n-1) = 3 - 2n$.

6. 3; 5;...; $a_n = 3 + 2(n-1) = 1 + 2n$; $101 = 1 + 2n$; $2n = 100$; $n = 50$.

Ответ: 50.

7. $S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$; $a_1 = 10$; $d=2$; $n=91$; $S = S_{91} = \frac{20 + 90}{2} \cdot 91 = 5005$.

8. 1; 3; 5;...;101; $a_1 = 1$; $d=2$; $n=51$; $S = S_{51} = \frac{2 + 2 \cdot 50}{2} \cdot 51 = 2601$.

9. Геом. прогрессия – числовая последовательность, в которой первый член отличен от нуля, а каждый из последующих равен предыдущему, умноженному на некоторое постоянное для данной последовательности число, отличное от нуля. 2; 4; 8; 16;...

10. $b_n = 3^{2n}$, $b_{n-1} = 3^{2(n-1)}$, $b_{n+1} = 3^{2(n+1)}$;

$b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$, $(3^{2n})^2 = 3^{2(n-1)} \cdot 3^{2(n+1)}$ — верно для любого $n \in N$, значит, (b_n) — геом. прогрессия ч.т.д

11. 2; 1; $\frac{1}{2}$; $b_1 = 2$, $q = \frac{1}{2}$; $b_n = b_1 \cdot q^{n-1} = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 2 \cdot \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{4}{2^n}$.

12. $b_1 = -\frac{1}{12}$, $q = -12$; $b_2 = -\frac{1}{12} \cdot (-12) = 1$; $b_3 = 1 \cdot (-12) = -12$;
 $b_4 = -12 \cdot (-12) = 144$; $b_5 = 144 \cdot (-12) = -1728$; $b_6 = -1728 \cdot (-12) = 20736$.

13. $b_n = b_1 q^{n-1}$; $b_1 = 80$; $q = \frac{1}{2}$; $b_7 = 80 \cdot \frac{1}{2^6} = \frac{80}{64} = 1,25$.

14. 2; 8; 32; $b_1 = 2$; $q = 4$; $b_n = b_1 \cdot q^{n-1} = 2 \cdot 4^{n-1} = 2 \cdot 2^{2n-2} = 2^{2n-1}$;
 $512 = 2^{2n-1}$; $2^9 = 2^{2n-1}$; $2n-1 = 9$; $2n = 10$; $n = 5$ значит, $512 = b_5$.

15. $S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}$, $q \neq 1$; $b_1 = 11$; $q = 2$; $S_5 = \frac{11(2^5 - 1)}{2 - 1} = 341$.

16. $q = 2$; $S_7 = 635$; $635 = \frac{b_1(2^7 - 1)}{2 - 1} = 126b_1$; $b_1 = 5$;
 $b_7 = b_1 q^6 = 5 \cdot 2^6 = 320$.

17. Геом. прогрессия называется бесконечно убывающей, если ее знаменатель по абсолютной величине меньше единицы. $1; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \dots$

18. $q = \frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{2 \cdot 3^n}{3^{n+1} \cdot 2} = \frac{1}{3}$; $\left| \frac{1}{3} \right| < 1$, значит, (b_n) — бесконечно убывающая, ч.т.д.

19. $S = \frac{b_1}{1-q}$; $30; 3; 0,3; \dots$; $b_1 = 30$; $q = \frac{3}{30} = 0,1$;

$$S = \frac{30}{1-0,1} = \frac{300}{9} = \frac{100}{3} = 33\frac{1}{3}.$$

20. $b_3 = 1$; $q = -\frac{1}{7}$; $b_3 = b_1 \cdot q^2$; $b_1 = \frac{b_3}{q^2} = \frac{1}{\left(-\frac{1}{7}\right)^2} = 49$;

$$S = \frac{b_1}{1-q} = \frac{49}{1+\frac{1}{7}} = \frac{49 \cdot 7}{8} = \frac{343}{8}.$$

21. а) $0,(3) = 0,333\dots = 0,3 + 0,03 + 0,003 + \dots = \frac{0,3}{1-0,1} = \frac{1}{3}$;

б) $0,(15) = 0,1515\dots = 0,15 + 0,0015 + \dots = \frac{0,15}{1-0,01} = \frac{15}{99} = \frac{5}{33}$;

в) $0,1(2) = 0,122\dots = 0,1 + 0,02 + 0,002 + \dots = 0,1 + \frac{0,02}{1-0,1} = \frac{1}{10} + \frac{2}{90} = \frac{11}{90}$.

ПОВТОРЕНИЕ ПО КУРСУ АЛГЕБРЫ VII-IX КЛАССОВ

Вариант 1.

П-1

1. а) $4 \cdot (1,22 \div 0,4 - 3,7) + \frac{2}{3} = 4(3,05 - 3,7) + \frac{2}{3} = -2,6 + \frac{2}{3} =$

$$= -\frac{13}{5} + \frac{2}{3} = -\frac{13}{5} + \frac{2}{3} = \frac{-39+10}{15} = -\frac{29}{15} = -1\frac{14}{15}.$$

б) $1\frac{1}{2} + (0,4 \cdot 3,25 - 3,15) \div 0,2 = 1,5 - 1,85 \div 0,2 = 1,5 - 9,25 = -7,75$;

$$\text{в). } \frac{-30,4 + 15,2 \cdot 2,5}{1\frac{5}{9} \cdot 3 - 4\frac{5}{9}} = \frac{7,6}{\frac{14}{9} \cdot 3 - \frac{41}{9}} = 7,6 \cdot 9 = 68,4.$$

$$2. \quad 1). \quad \frac{a+b^2}{ab}; \quad \text{а). } a = \frac{1}{3}, \quad b = \frac{1}{6}; \quad \frac{a+b^2}{ab} = \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{36}}{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6}} = \frac{13 \cdot 6 \cdot 3}{36} = \frac{13}{2} = 6,5;$$

$$\text{б). } a = 0,4, \quad b = -0,3; \quad \frac{a+b^2}{ab} = -\frac{0,4+0,09}{0,4 \cdot 0,3} = -\frac{0,49}{0,12} = -\frac{49}{12} = -4\frac{1}{12};$$

$$2). \quad \frac{a-b^2}{ab}; \quad \text{а). } a = \frac{2}{3}, \quad b = \frac{1}{2}; \quad \frac{a-b^2}{ab} = \frac{\frac{2}{3} - \frac{1}{4}}{\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{5 \cdot 3}{3 \cdot 4} = 1,25;$$

$$\text{б). } a = 0,3, \quad b = -0,4; \quad \frac{a-b^2}{ab} = -\frac{0,3-0,16}{0,12} = -\frac{14}{12} = -\frac{7}{6} = -1\frac{1}{6};$$

$$3). \quad \frac{x-y}{xy^2}; \quad \text{а). } x = \frac{5}{6}, \quad y = \frac{2}{3}; \quad \frac{x-y}{xy^2} = \frac{\frac{5}{6} - \frac{2}{3}}{\frac{5}{6} \cdot \frac{2}{9}} = \frac{6 \cdot 9}{6 \cdot 5 \cdot 4} = \frac{9}{20};$$

$$\text{б). } x = 0,5, \quad y = 0,6; \quad \frac{x-y}{xy^2} = \frac{0,5-0,6}{0,5 \cdot 0,36} = -\frac{0,1}{0,18} = -\frac{10}{18} = -\frac{5}{9}.$$

$$3. \quad \text{а). } 2 \cdot 4^{-2} + \left(\frac{2}{3}\right)^{-3} - \left(\frac{1}{5}\right)^0 = 2 \cdot \frac{1}{16} + \frac{27}{8} - 1 = \frac{20}{8} = 2,5;$$

$$\text{б). } \frac{3}{4} \cdot 25^{\frac{1}{2}} + 64^{-\frac{1}{3}} = \frac{3}{4} \cdot 5 + \frac{1}{4} = \frac{16}{4} = 4;$$

$$\text{в). } 12 \cdot 3^{-3} + \left(\frac{3}{5}\right)^{-2} - \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{12}{27} + \frac{25}{9} - 1 = \frac{4}{9} + \frac{25}{9} - \frac{9}{9} = 2\frac{2}{9};$$

$$\text{г). } \frac{2}{5} \cdot 8^{\frac{2}{3}} - 25^{-\frac{1}{2}} = \frac{2}{5} \cdot (2^3)^{\frac{2}{3}} - \frac{1}{5} = \frac{8}{5} - \frac{1}{5} = 1,4;$$

$$\text{д). } \left(\frac{3}{5}\right)^{-8} \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^{-6} - 3^{-11} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-9} = \left(\frac{5}{3}\right)^8 \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^{-6} - \left(\frac{1}{3}\right)^{11} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-9} =$$

$$= \left(\frac{5}{3}\right)^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{25-1}{9} = \frac{24}{9} = 2\frac{2}{3}; \quad \text{е). } \left(2\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} + 32^{-0,2} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2.$$

$$4. \quad \text{а). } \sqrt{4 \cdot 25 \cdot 4^3} = \sqrt{4^4 \cdot 25} = 4^2 \cdot 5 = 80;$$

б). $(\sqrt{5} - \sqrt{2}) \cdot (\sqrt{5} + \sqrt{2}) = (\sqrt{5})^2 - (\sqrt{2})^2 = 3$; в). $7^{\frac{4}{3}} \cdot \sqrt[3]{7^2} = 7^{\frac{4}{3}} \cdot 7^{\frac{2}{3}} = 7^2 = 49$;
 г). $\sqrt[3]{5^6} \cdot 64 \cdot 5^3 = \sqrt[3]{5^9} \cdot 4^3 = 5^3 \cdot 4 = 500$;
 д). $(2\sqrt{3} - \sqrt{2}) \cdot (2\sqrt{3} + \sqrt{2}) = (2\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2 = 10$;
 е). $3^{\frac{1}{4}} \cdot \sqrt[4]{3^3} = 3^{\frac{1}{4}} \cdot 3^{\frac{3}{4}} = 3^2 = 9$;
 ж). $\frac{3 - \sqrt{5}}{3 + \sqrt{5}} + \frac{3 + \sqrt{5}}{3 - \sqrt{5}} = \frac{9 + 5 - 6\sqrt{5} + 9 + 5 + 6\sqrt{5}}{3^2 - (\sqrt{5})^2} = \frac{28}{4} = 7$;
 з). $\sqrt{12\sqrt{2}} \cdot \sqrt{3\sqrt{8}} = \sqrt{12 \cdot \sqrt{2} \cdot 3\sqrt{8}} = \sqrt{36 \cdot 4} = 6 \cdot 2 = 12$.

II-2

1. а). $2y(y+5) - 3y(y-3) = 2y^2 + 10y - 3y^2 + 9y = 19y - y^2$;
 б). $(2a-b)^2 - (2a+b)^2 = 4a^2 - 4ab + b^2 - 4a^2 - 4ab - b^2 = -8ab$;
 в). $5x(x^2+3) - 3x(x^2-5) = 5x^3 + 15x - 3x^3 + 15x = 2x^3 + 30x$;
 г). $(a-3b)^2 - (a+b)^2 = a^2 - 6ab + 9b^2 - a^2 - 2ab - b^2 = 8b^2 - 8ab$;
 д). $5x(x^2-3) - (5x+2) \cdot (x^2-3x-1) = 5x^3 - 15x - (5x^3 + 2x^2 - 15x^2 - 6x - 5x - 2) =$
 $= 5x^3 - 15x - 5x^3 - 2x^2 + 15x^2 + 6x + 5x + 2 = 13x^2 - 4x + 2$;
 е). $3b(2a-b)^2 - (a+3b) \cdot (b^2-3a^2) = 3b(4a^2 - 4ab + b^2) - (ab^2 + 3b^3 - 3a^3 - 9a^2b) =$
 $= 12a^2b - 12ab^2 + 3b^3 - ab^2 - 3b^3 - 3a^3 + 9a^2b = 3a^3 + 21a^2b - 13ab^2$.
 2. 1). а). $2ab - 2b^2 = 2b(a-b)$; б). $x^4 + 3x^6 = x^4(1 + 3x^2)$;
 в). $6mn - 3m^2n + 3mn^2 = 3mn(2 - m + n)$; г). $0,25 - m^2 = (0,5 - m) \cdot (0,5 + m)$;
 д). $y^3 - 4y = y \cdot (y^2 - 4) = y \cdot (y-2) \cdot (y+2)$; е). $a^4 - 9x^2 = (a^2 - 3x)(a^2 + 3x)$;
 2). а). $-15ax^2 - 15ay^2 - 30axy = -15a(x^2 + y^2 + 2xy) = -15a(x+y)^2$;
 б). $4a^2 - 6a - b^2 + 3b = (4a^2 - b^2) - (6a - 3b) =$
 $= (2a-b)(2a+b) - 3(2a-b) = (2a-b)(2a+b-3)$;
 в). $81 - (x+7)^2 = (9-x-7)(9+x+7) = (2-x)(16+x)$;
 3. а). $\frac{x}{x-y} - \frac{y}{x+y} = \frac{x^2 + xy - xy + y^2}{(x-y)(x+y)} = \frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2}$.
 б). $\frac{4}{a-2} + \frac{8}{2a-a^2} = \frac{4}{a-2} - \frac{8}{a(a-2)} = \frac{4a-8}{a(a-2)} = \frac{4(a-2)}{a(a-2)} = \frac{4}{a}$.
 в). $\frac{m^2}{m^2-25} (m^2+5m) = \frac{m^2 \cdot m(m+5)}{(m+5)(m-5)} = \frac{m^3}{m-5}$;
 г). $\frac{1}{a^2+ab} \div \frac{1}{a^2-ab} = \frac{a(a-b)}{a(a+b)} = \frac{a-b}{a+b}$.

$$\begin{aligned}
4. \quad & \frac{x+y}{2xy-y^2} \cdot \left(x+y - \frac{x^2}{x-y} \right) = \frac{x+y}{y(2x-y)} \cdot \frac{x^2+2xy+y^2-x^2}{x+y} = \\
& = \frac{y(2x+y)}{y(2x-y)} = \frac{2x+y}{2x-y}. \\
5. \quad \text{a).} \quad & \frac{2}{a-b} - \frac{2}{a+b} - \frac{4a}{b^2-a^2} = \frac{2}{a-b} - \frac{2}{a+b} + \frac{4a}{(a-b)(a+b)} = \\
& = \frac{2a+2b-2a+2b+4a}{(a-b)(a+b)} = \frac{4(a+b)}{(a+b)(a-b)} = \frac{4}{a-b}; \\
\text{б).} \quad & \frac{x^2-5x}{y} \cdot \frac{y^2}{x^2+5xy} = \frac{x(x-5)}{y} \cdot \frac{y^2}{x(x+5y)} = \frac{y(x-5)}{x+5y}; \\
\text{в).} \quad & \frac{m^2-n^2}{m^2} \div (m^2+mn) = \frac{(m-n)(m+n)}{m^2} \cdot \frac{1}{m(m+n)} = \frac{m-n}{m^3}. \\
6. \quad \text{a).} \quad & \frac{2x^2-2y^2}{x} \cdot \frac{4x}{x-y} - \frac{16xy}{x+y} = \frac{2(x-y)(x+y) \cdot 4}{x-y} - \frac{16xy}{x+y} = \\
& = 8(x+y) - \frac{16xy}{x+y} = \frac{8x^2+8y^2+16xy-16xy}{x+y} = \frac{8(x^2+y^2)}{x+y}. \\
\text{б).} \quad & \left(\frac{a}{b^2} - \frac{2}{b} + \frac{1}{a} \right) \cdot \frac{ab}{b^2-a^2} - \frac{2}{a-b} = \frac{a^2-2ab+b^2}{ab^2} \cdot \frac{ab}{(b-a)(b+a)} + \frac{2}{b-a} = \\
& = \frac{(b-a)^2}{b(b-a)(b+a)} + \frac{2}{b-a} = \frac{a^2-2ab+b^2+2b^2+2ab}{b(b^2-a^2)} = \frac{a^2+3b^2}{b(b^2-a^2)}; \\
\text{в).} \quad & \frac{x-3}{x^2+3x} - \frac{x}{9+3x} \div \left(\frac{9}{x^3-9x} + \frac{1}{x+3} \right) = \\
& = \frac{x-3}{x(x+3)} - \frac{x}{3(x+3)} \div \left(\frac{9}{x(x-3)(x+3)} + \frac{1}{x+3} \right) = \\
& = \frac{x-3}{x(x+3)} - \frac{x}{3(x+3)} \cdot \frac{x(x-3)(x+3)}{9+x^2-3x} = \frac{3(x-3)(9+x^2-3x) - x^3(x^2-9)}{3x(x+3)(9+x^2-3x)} = \\
& = \frac{3(9x-27+x^3-3x^2-3x^2+9x) - x^5+9x^3}{3x(x+3)(9+x^2-3x)} = \frac{-x^5+12x^3-18x^2+54x-81}{3x(x+3)(9+x^2-3x)}. \\
7. \quad \text{a)} \quad & (10^3)^2 \cdot 10^{-8} = 10^6 \cdot 10^{-8} = 10^{-2} = 0,01; \\
\text{б)} \quad & \frac{25^{-3} \cdot 5^4}{5^{-2}} = \frac{5^{-6} \cdot 5^4}{5^{-2}} = \frac{5^{-2}}{5^{-2}} = 1; \quad \text{в).} \quad \frac{81^{-2} \cdot 3^5}{9^{-9}} = \frac{3^{-8} \cdot 3^5}{3^{-4}} = \frac{3^{-3}}{3^{-4}} = 3; \\
\text{г)} \quad & \frac{0,125^2 \cdot 32^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^{-8}} = \left(\frac{1}{2}\right)^6 \cdot 2^{10} \cdot 2^{-8} = \frac{2^2}{2^6} = \frac{1}{16}.
\end{aligned}$$

8. а) $(\sqrt{18} - 5\sqrt{2} + \sqrt{48})\sqrt{3} = (3\sqrt{2} - 5\sqrt{2} + 4\sqrt{3})\sqrt{3} =$
 $= (4\sqrt{3} - 2\sqrt{2})\sqrt{3} = 12 - 2\sqrt{6}$;

б) $(\sqrt{3} - 2)^2 = 3 + 4 - 4\sqrt{3} = 7 - 4\sqrt{3}$; в). $\frac{\sqrt{6} - 2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{2} - 2)}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2} - 2}{2}$;

г) $(2\sqrt{5} - \sqrt{18} + \sqrt{45}) \div \sqrt{5} = (2\sqrt{5} - 3\sqrt{2} + 3\sqrt{5}) \div \sqrt{5} =$
 $= \frac{5\sqrt{5} - 3\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = \frac{25 - 3\sqrt{10}}{5}$; д). $(\sqrt{2} - 3)^2 = 2 + 9 - 6\sqrt{2} = 11 - 6\sqrt{2}$;

е) $\frac{\sqrt{14} - 2\sqrt{7}}{2\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7}(\sqrt{2} - 2)}{2\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{2} - 2}{2}$.

9. а) $\sin 300^\circ - \cos(-240^\circ) = \sin(360^\circ - 60^\circ) - \cos(180^\circ + 60^\circ) =$
 $= -\sin 60^\circ + \cos 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1 - \sqrt{3}}{2}$;

б) $\operatorname{tg} \frac{5\pi}{4} \cdot \operatorname{ctg} \left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -\operatorname{tg} \left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) \cdot \operatorname{ctg} \left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} \cdot \operatorname{ctg} \frac{\pi}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$;

в) $\cos 330^\circ - \sin(-135^\circ) = \cos(360^\circ - 30^\circ) + \sin(90^\circ + 45^\circ) =$
 $= \cos 30^\circ + \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{2}$;

г) $\operatorname{tg} \frac{3\pi}{4} \cdot \operatorname{ctg} \frac{7\pi}{6} = \operatorname{tg} \left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) \operatorname{ctg} \left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} \cdot \operatorname{ctg} \frac{\pi}{6} = -\sqrt{3}$;

д). $\sin \frac{5\pi}{2} - \cos \left(-\frac{13\pi}{6}\right) = 1 - \cos \left(2\pi + \frac{\pi}{6}\right) = 1 - \cos \frac{\pi}{6} = \frac{2 - \sqrt{3}}{2}$;

е). $\operatorname{tg}(-540^\circ) \operatorname{ctg} 420^\circ = -\operatorname{tg} 180^\circ \cdot \operatorname{ctg} 420^\circ = 0$.

10. а). $\frac{\sin(\pi - \alpha) - \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)}{\cos(-\alpha)} = \frac{\sin \alpha + \sin \alpha}{\cos \alpha} = 2 \operatorname{tg} \alpha$.

б). $\sin\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right) - \frac{1}{2} \cos \alpha = \sin \frac{\pi}{6} \cdot \cos \alpha - \cos \frac{\pi}{6} \cdot \sin \alpha - \frac{1}{2} \cos \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2} \sin \alpha$;

в). $\frac{\cos(\pi - \alpha) - \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)}{\sin(-\alpha)} = \frac{-\cos \alpha - \cos \alpha}{-\sin \alpha} = 2 \operatorname{ctg} \alpha$;

г). $\sin\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) - \frac{1}{2} \sin \alpha = \sin \frac{\pi}{3} \cos \alpha + \cos \frac{\pi}{3} \sin \alpha - \frac{1}{2} \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \alpha$;

$$д). \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\cos(2\pi - \alpha) + \sin(-\alpha)\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = \\ = \cos\alpha \cdot \cos\alpha - \sin\alpha \cdot \sin\alpha = \cos 2\alpha.$$

$$11. \text{ а). } \cos 2\alpha + 2\sin^2 \alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha + 2\sin^2 \alpha = 1,$$

$$\text{б). } \cos^2 \alpha - \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - (2\cos^2 \alpha - 1) = 1 - \cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha,$$

II-3

$$1. \text{ а). } 3(x-1,5) + 2x = 5(2,5 + 2x); \quad 3x - 4,5 + 2x = 12,5 + 10x; \quad 5x = -17; \\ x = -3,4; \text{ б). } 3x^2 - 21 = 0; \quad x^2 - 7 = 0; \quad x^2 = 7; \quad x_{1,2} = \pm\sqrt{7}.$$

$$\text{в). } 8x^2 + 6x - 2 = 0; \quad 4x^2 + 3x - 1 = 0; \quad D = 9 + 4 \cdot 4 = 25; \quad x_1 = \frac{-3+5}{8} = \frac{1}{4};$$

$$x_2 = -1; \quad \text{г). } 2 - \frac{3}{x-2} = \frac{7}{x+2}; \quad 2 - \frac{3}{x-2} - \frac{7}{x+2} = 0;$$

$$\frac{2(x^2-4) - 3(x+2) - 7(x-2)}{x^2-4} = 0; \quad 2x^2 - 8 - 3x - 6 - 7x + 14 = 0; \quad 2x^2 - 10x = 0;$$

$$x(x-5) = 0; \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 5.$$

$$2. \text{ а). } x^3 - 25x = 0; \quad x(x^2 - 25) = 0, \quad x(x-5)(x+5) = 0; \quad x_1 = 0, \quad x_{2,3} = \pm 5.$$

$$\text{б). } 3(x+4)^2 - 9(x+4) = 0; \quad (x+4)(3(x+4)-9) = 0; \quad x+4 = 0, \quad x+4 = 3; \\ x_1 = -4, \quad x_2 = -1.$$

$$3. \text{ а). } 5(x-2,5) - 4x = 3(2,5 + 3x); \quad 5x - 12,5 - 4x = 7,5 + 9x; \quad 8x = -20; \\ x = -2,5; \text{ б). } 75 - 3x^2 = 0; \quad 3x^2 = 75; \quad x^2 = 25; \quad x_{1,2} = \pm 5.$$

$$\text{в). } -4x^2 + 10x + 6 = 0; \quad 4x^2 - 10x + 6 = 0; \quad 2x^2 - 5x - 3 = 0; \quad D = 25 + 4 \cdot 3 \cdot 2 = 49; \\ x_1 = \frac{5+7}{4} = 3; \quad x_2 = -\frac{1}{2}; \text{ г). } \frac{5}{x-1} + \frac{30}{x+1} = 5; \quad \frac{1}{x-1} + \frac{6}{x+1} - 1 = 0;$$

$$\frac{x+1+6x-6-x^2+1}{x^2-1} = 0; \quad -x^2 + 7x - 4 = 0; \quad x^2 - 7x + 4 = 0.$$

$$D = 49 - 16 = 33; \quad x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{33}}{2}.$$

$$4. \text{ а). } x^3 - 9x = 0; \quad x(x^2 - 9) = 0; \quad x(x-3)(x+3) = 0; \quad x_1 = 0; \quad x_{2,3} = \pm 3;$$

$$\text{б). } (x+5)^2 - 4(x+5) = 2(x+5); \quad x+5 = 0; \quad x+5-4 = 2; \quad x_1 = -5; \quad x_2 = 1.$$

$$5. \text{ а). } \frac{x+1,5}{8} - \frac{3}{4} = \frac{3x-1}{24}; \quad 3x+4,5-18 = 3x-1; \quad 4,5-18 = -1 \quad \text{нет корней};$$

$$\text{б). } \frac{1}{2}x^2 - x - 1 = 0; \quad x^2 - 2x - 2 = 0; \quad D = 4 + 4 \cdot 2 = 13; \quad x_{1,2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{3}}{2} = 1 \pm \sqrt{3};$$

$$в) \frac{x}{x+2} + \frac{x+2}{x-2} = \frac{8}{x^2-4}; \frac{x}{x+2} + \frac{x+2}{x-2} - \frac{8}{(x+2)(x-2)} = 0;$$

$$\frac{x^2 - 2x + x^2 + 4x + 4 - 8}{x^2 - 4} = 0; 2x^2 + 2x - 4 = 0; x^2 + x - 2 = 0$$

$$D = 1 + 4 \cdot 2 = 9; x_1 = \frac{-1+3}{2} = 1; x_2 = -2. \quad \text{Ответ: } (1; -2)$$

$$6. \text{ а) } 2x^4 - 2x = 0; x^4 - x = 0; x = 0; x_1 = 0; x_2 = 1. x(x^3 - 1) = 0;$$

$$x^3 - 1 = 0;$$

$$б) x^4 - 10x^2 + 9 = 0; x^2 = y, y \geq 0; y^2 - 10y + 9 = 0; D = 100 - 36 = 64;$$

$$y_1 = \frac{10+8}{2} = 9; y_2 = 1; x^2 = 9; x^2 = 1; x_{1,2} = \pm 3; x_{3,4} = \pm 1;$$

$$в) 2(x^2 - 1)^2 + 6(x^2 - 1) = 0; x^2 - 1 = 0; 2(x^2 - 1) + 6 = 0; x_{1,2} = \pm 1; x^2 - 1 = -3$$

$$x^2 = -2 \text{ нет корня.}$$

Ответ: ± 1 .

$$7. \text{ а) } \begin{cases} 3x + 2y = 7; \\ 9x - 8y = 35 \end{cases} \quad 2y = 7 - 3x; 9x - 4 \cdot (7 - 3x) = 35;$$

$$9x - 28 + 12x = 35; 21x = 63; x = 3; y = \frac{7 - 33}{2} = -1. \quad \text{Ответ: } (3; -1)$$

$$б) \begin{cases} xy = -6 \\ x - 3y = 11 \end{cases}; x = 11 - 3y; y(11 + 3y) + 6 = 0; 3y^2 + 11y + 6 = 0;$$

$$D = 121 - 12 \cdot 6 = 49; y_1 = \frac{-11+7}{6} = -\frac{2}{3}; y_2 = -3; x_1 = 11 - 3 \cdot \frac{2}{3} = 9;$$

$$x_2 = 11 - 3 \cdot 3 = 2$$

$$\text{Ответ: } \left(9; -\frac{2}{3}\right), (2; -3)$$

$$в) \begin{cases} x^2 + y = 26; \\ x + y = 6 \end{cases}; y = 6 - x; x^2 + 6 - x - 26 = 0; x^2 - x - 20 = 0;$$

$$D = 1 + 4 \cdot 20 = 81, x_1 = \frac{1+9}{2} = 5; x_2 = -4; y_1 = 6 - 5 = 1; y_2 = 6 + 4 = 10.$$

$$\text{Ответ: } (5; 1), (-4; 10)$$

$$8. \text{ а) } \begin{cases} 4x - 2y = 2 \\ 6x + 4y = 17 \end{cases}; 2x - y = 1; y = 2x - 1; 6x + 4(2x - 1) = 17;$$

$$6x + 8x - 4 = 17; 14x = 21; x = \frac{21}{14} = 1,5; y = 2 \cdot 1,5 - 1 = 2.$$

$$\text{Ответ: } (1,5; 2)$$

$$\text{б). } \begin{cases} 2x+y=4; \\ 2xy=3 \end{cases}; \quad y=4-2x; \quad 2x(4-2x)-3=0; \quad 8x-4x^2-3=0;$$

$$4x^2-8x+3=0; \quad D=64-4 \cdot 4 \cdot 3=16; \quad x_1=\frac{8+4}{8}=1,5; \quad x_2=0,5;$$

$$y_1=4-2 \cdot 1,5=1; \quad y_2=4-2 \cdot 0,5=3. \quad \text{Ответ. } (1,5; 1), (0,5; 3).$$

$$\text{в). } \begin{cases} x^2+y^2=9; \\ x+y=3; \end{cases}; \quad y=3-x; \quad x^2+(3-x)^2=9; \quad x^2+9-6x+x^2=9;$$

$$2x^2-6x=0; \quad x^2-3x=0; \quad x_1=0, \quad x_2=3; \quad y_1=3; \quad y_2=0.$$

$$\text{Ответ. } (0; 3), (3; 0).$$

$$9. \text{ а). } \begin{cases} \frac{x-3y}{2}+3=\frac{2x+y}{5}; \\ \frac{2x+4y}{4}+2=3y; \end{cases}; \quad \begin{cases} 5x-15y+30=4x+2y; & x=17y-30 \\ 2x+4y+8=12y; & 2x=8y-8; & x=4y-4 \end{cases};$$

$$17y-30=4y-4; \quad 13y=26; \quad y=2; \quad x=4 \cdot 2-4=4. \quad \text{Ответ. } (4; 2).$$

$$\text{б). } \begin{cases} x^2+xy+y^2=13 \\ x-2y=-5 \end{cases}; \quad x=2y-5; \quad 4y^2+25-20y+2y^2-5y+y^2-13=0;$$

$$7y^2-25y+12=0; \quad D=289; \quad y_1=\frac{25+17}{14}=3; \quad y_2=\frac{4}{7}.$$

$$x_1=2 \cdot 3-5=1; \quad x_2=2 \cdot \frac{4}{7}-5=-\frac{27}{7}. \quad \text{Ответ. } (1; 3), \left(-\frac{27}{7}; \frac{4}{7}\right).$$

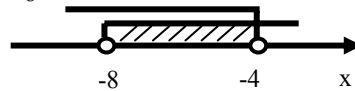
$$10. \quad y=9x^2-4x+5, \quad y=2x+4$$

$$9x^2-4x+5=2x+4; \quad 9x^2-6x+1=0; \quad (3x-1)^2=0; \quad 3x=1;$$

$$x=\frac{1}{3}, \quad y=2 \cdot \frac{1}{3}+4=\frac{14}{3}.$$

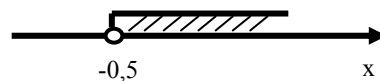
$$\text{Ответ. } \left(\frac{1}{3}; \frac{14}{3}\right).$$

$$11. \text{ а). } \begin{cases} 4x-15 > 8x+1; & 4x < -16, & x < -4 \\ 3x-2 > x-18; & 2x > -16, & x > -8 \end{cases}$$



$$\text{Ответ. } (-8; -4).$$

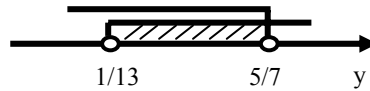
$$\text{б). } \begin{cases} 3x+8 < 7x+10; \\ 2x-3(x-5) > 10-3x; \end{cases}; \quad \begin{cases} 4x > -2; & x > -0,5 \\ 2x > -5; & x > -2,5 \end{cases}$$



$$\text{Ответ. } (-0,5; +\infty).$$

$$B). \begin{cases} \frac{y+5}{4} - 2y > 0; & y+5-8y > 0; & 7y < 5; & y < \frac{5}{7}; \\ y - \frac{2y-4}{5} > 1-2y; & 5y-2y+4 > 5-10y; & 13y > 1; & y > \frac{1}{13}; \end{cases}$$

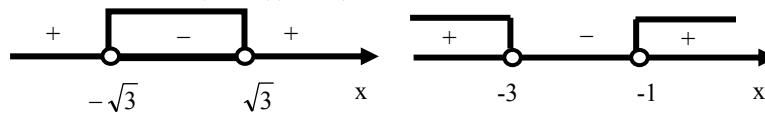
Ответ. $(\frac{1}{13}; \frac{5}{7})$.



$$12. \begin{cases} \frac{y+3}{2} < \frac{y-5}{3}; & 3y+9 < 2y-10; & y < -19 \\ \frac{y+1}{4} > \frac{y-4}{5}; & 5y+5 > 4y-16; & y > -21 \end{cases}$$

Ответ. -20.

13. а). $x^2 - 3 < 0$; $(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3}) < 0$; б). $x^2 + 4x + 6 > 3$; $x^2 + 4x + 3 > 0$.



$$D = 16 - 12 = 4 \quad x_1 = \frac{-4 + 2}{2} = -1 \\ x_2 = -3$$

Ответ. $(-\sqrt{3}; \sqrt{3})$.

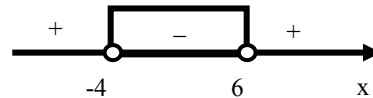
Ответ. $(-\infty; -3) \cup (-1; +\infty)$.

в). $2x^2 - 3x + 5 > 0$; $D = 9 - 4 \cdot 2 \cdot 5 < 0$;

т.к. $a = 2 > 0$, то любое x - решение.

Ответ. $(-\infty; +\infty)$.

г). $(x-6)(x+4) < 0$



Ответ. $(-4; 6)$.

II-4

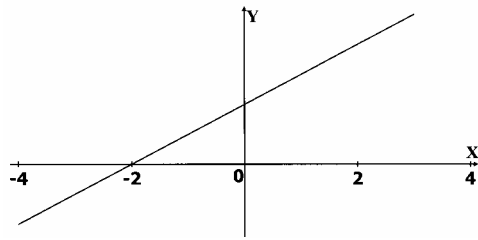
1. а) $y = \frac{2x-3}{x+4}$; $x+4 \neq 0$, так как знаменатель $x \neq -4$.

б) $y = \sqrt{3-2x}$ $3-2x \geq 0$, т.к. $D(\sqrt{\quad}) = [0; +\infty]$; $2x \leq 3$; $x \leq 1,5$.

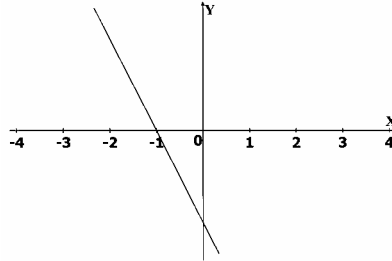
в) $y = \frac{2x+3}{x-4}$; $x-4 \neq 0$; $x \neq 4$;

г) $y = \sqrt{2x-4}$; $2x-4 \geq 0$; $2x \geq 4$; $x \geq 2$.

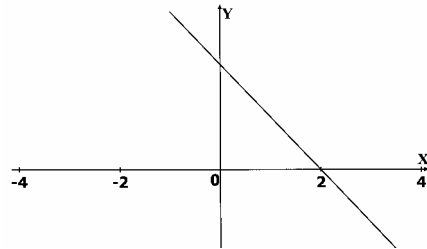
2. а) $y = 2x+4$;



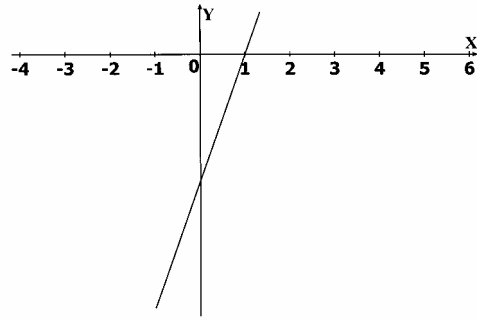
- 1) $y = 0$ при $x = -2$, $y > 0$ при $x > -2$, $y < 0$ при $x < -2$;
 2) y – возрастающая; б) $y = -3x - 3$,



- 1) $y = 0$ при $x = -1$, $y > 0$ при $x < -1$; $y < 0$ при $x > -1$. 2) y – убывающая.
 3. а) $y = -2x + 4$

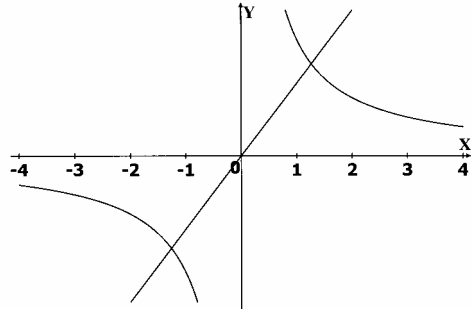


- 1) $y = 0$ при $x = 2$, $y > 0$ при $x < 2$; $y < 0$ при $x > 2$; 2) y – убывающая;
 б) $y = 3x - 3$



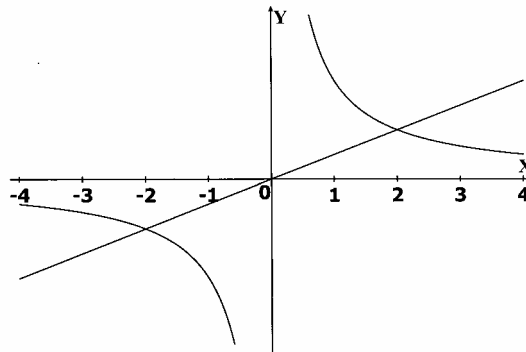
1) $y = 0$ при $x = 1$; $y > 0$ при $x < 1$; $y < 0$ при $x > 1$; 2) y -возрастающая.

4. $y = \frac{8}{x}, y = 5x; \frac{8}{x} = 5x; x^2 = \frac{8}{5}; x_{1,2} = \pm \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$.



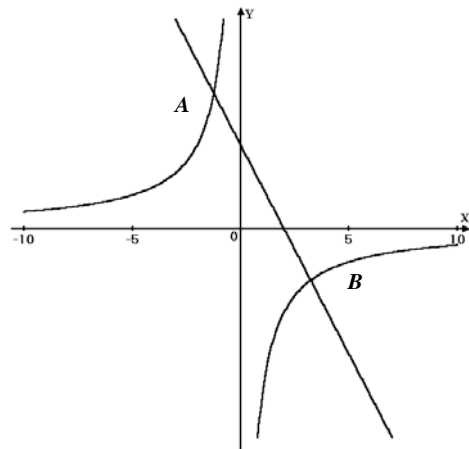
5. а) $y > 0$ при $x > 0, y < 0$ при $x < 0$; б) y убывает на $D(y)$.

6. $y = \frac{6}{x}, y = 1,5x; \frac{6}{x} = 1,5x; x^2 = 4; x = \pm 2$.



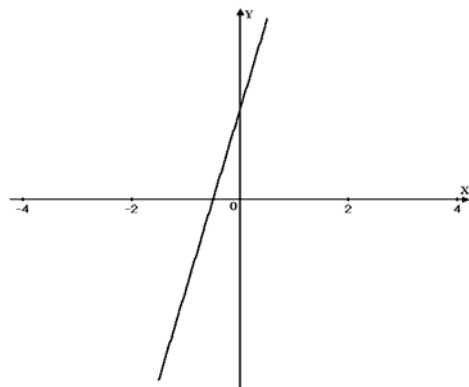
7. а) $y > 0$ при $x > 0, y < 0$ при $x < 0$; б) y убывает на $D(y)$.

8. $y = -\frac{8}{x}, y = -2x + 4; A(-1,2;6,3); B(3,2;-2,5)$.



9. а) $y > 0$ при $x < 0, y < 0$ при $x > 0$; б) y возрастает на $D(y)$.

10. $y = 4x + b; 6 = 4 + b; b = 2; y = 4x + 2$;



а) $x = -0,5; y > 0$ при $x > -0,5; y < 0$ при $x < -0,5$;
б) возрастающая.

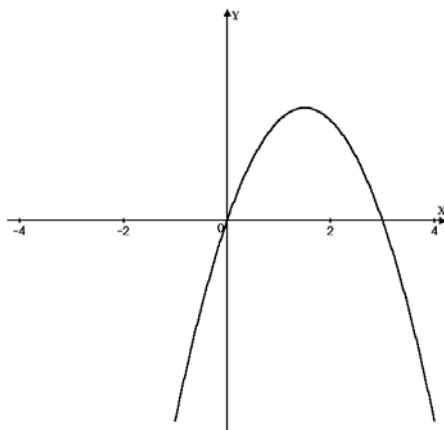
11. а) $y = \frac{1}{3}x - 5, y = \frac{1}{2}x - 5; \frac{1}{3}x - 5 = \frac{1}{2}x - 5$;

$x = 0$, т.е. пересекаются;

б) $y = 3x + 7, y = 3x - 4; 3x + 7 = 3x - 4$;

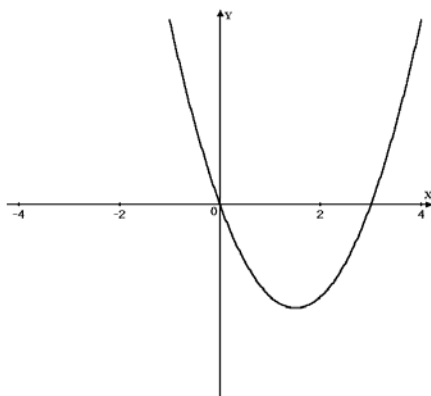
$7 = -4$ -нет корней, т.е. не пересекаются.

12. $y = -x^2 + 3x$; а) $x_1 = 0, x_2 = 3$; $y > 0$ при $x \in (0; 3)$; $y < 0$ при $x \in (-\infty; 0) \cup (3; +\infty)$; б) y возрастает при $x \leq 1,5$; убывает при $x \geq 1,5$.



13. $y = 2x^2 + 5x - 3$; $y(0) = -3$ (0; -3); $2x^2 + 5x - 3 = 0$;
 $D = 25 + 8 \cdot 3 = 49$; $x_1 = \frac{-5+7}{4} = \frac{1}{2}$; $x_2 = -3$; $(\frac{1}{2}; 0), (-3; 0)$.

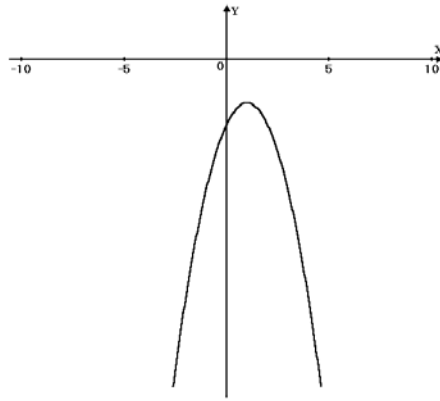
14. $y = x^2 - 3x$;



- а) $x_1 = 0, x_2 = 3$; $y > 0$ при $x \in (-\infty; 0) \cup (3; +\infty)$;
 $y < 0$ при $x \in (0; 3)$;
 б) возрастает при $x \geq 1,5$; убывает при $x \leq 1,5$.

15. $y = -2x^2 - 5x + 3$; $y(0) = 3$ (0; 3); $2x^2 + 5x - 3 = 0$;
 $D = 25 + 8 \cdot 3 = 49$; $x_1 = \frac{-5+7}{4} = \frac{1}{2}$; $x_2 = -3$; $(\frac{1}{2}; 0), (-3; 0)$.

$$16. \quad y = -x^2 + 2x - 3 = -(x^2 - 2x + 3) = -(x^2 - 2x + 1 + 2) = -(x-1)^2 - 2.$$



- а) $y < 0$ при любых x ; б) y возрастает при $x \leq 1$; y убывает при ;
 в) $y_{\max} = -2$.

Вариант II

II-1

$$1. \quad \text{а) } \frac{1}{3} + 1,2(2,3 - 0,061 \div 0,2) = \frac{1}{3} + 1,2 \cdot 1,995 = \frac{1}{3} + 2,394 = \\ = \frac{1}{3} + \frac{2394}{1000} = \frac{1}{3} + \frac{1197}{500} = \frac{4091}{1500} = 2\frac{1091}{1500}$$

$$\text{б) } 5,07 \div (0,6 \cdot 3,25 - 2,25) - 3\frac{1}{4} = -5,07 \div 0,3 - 3,25 = -20,15.$$

$$\text{в) } \frac{-12,4 \cdot 1,5 + 24\frac{4}{5}}{2\frac{5}{6} \cdot 3 - 8\frac{5}{6}} = \frac{6,2}{\frac{51}{6} - \frac{53}{6}} = -6,2 \cdot 3 = -18,6$$

$$2. \quad 1) \quad \frac{xy^2}{x-y} \quad \text{а) } \frac{\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{9}}{\frac{3}{4} - \frac{2}{3}} = \frac{1}{3} \cdot 12 = 4; \quad \text{б) } \frac{1,6 \cdot 0,25}{1,6 + 0,5} = \frac{0,4}{2,1} = \frac{4}{21}$$

$$2) \quad \frac{xy}{x-y^2} \quad \text{а) } \frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{3}{3} - \frac{1}{4}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{12}{5} = \frac{4}{5} = 0,8;$$

$$\text{б) } \frac{-1,2 \cdot 0,6}{1,2 - 0,36} = -\frac{0,72}{0,84} = -\frac{72}{84} = -\frac{18}{21} = -\frac{6}{7}.$$

$$3) \frac{ab}{a+b^2} \quad \text{a) } \frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{6}}{\frac{2}{3} + \frac{1}{36}} = \frac{1}{9} \cdot \frac{36}{25} = \frac{4}{25}; \quad \text{б) } -\frac{0,5 \cdot 0,4}{0,5+0,16} = -\frac{0,2}{0,66} = -\frac{20}{66} = -\frac{10}{33}.$$

$$3. \quad \text{a) } \left(\frac{1}{8}\right)^0 + 6 \cdot 2^{-2} + \left(\frac{2}{5}\right)^{-2} = 1 + \frac{6}{8} + \frac{25}{4} = 1 + \frac{3}{4} + \frac{25}{4} = 8.$$

$$\text{б) } \frac{1}{4} \cdot 16^{\frac{1}{2}} + 32^{-\frac{1}{5}} = \frac{1}{4} \cdot 4 + \frac{1}{2} = 1,5;$$

$$\text{в) } 4 \frac{1}{2} \cdot 6^{-2} + \left(\frac{2}{5}\right)^{-3} - \left(\frac{2}{3}\right)^0 = \frac{9}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{125}{8} - 1 = \frac{118}{8} = 14,75;$$

$$\text{г) } \frac{2}{7} \cdot 27^{\frac{2}{3}} + 49^{-\frac{1}{2}} = \frac{2}{7} \cdot (3^3)^{\frac{2}{3}} + \frac{1}{7} = \frac{18}{7} + \frac{1}{7} = 2\frac{5}{7};$$

$$\text{д) } 2^{-12} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-10} + \left(\frac{2}{3}\right)^{-5} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{-3} = 2^{-12} \cdot 2^{10} + \left(\frac{3}{2}\right)^5 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{-3} = 2^{-2} + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{9}{4} = 2,5;$$

$$\text{е) } \left(3\frac{3}{8}\right)^{\frac{1}{3}} + (0,01)^{-0,5} = \left(\frac{27}{8}\right)^{\frac{1}{3}} + (10^{-2})^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2} + 10 = 11,5.$$

$$4. \quad \text{a) } \sqrt{3^3 \cdot 16 \cdot 3^5} = \sqrt{3^8 \cdot 16} = 3^4 \cdot 4 = 324;$$

$$\text{б) } (\sqrt{7} - \sqrt{3})(\sqrt{7} + \sqrt{3}) = (\sqrt{7})^2 - (\sqrt{3})^2 = 7 - 3 = 4; \quad \text{в) } 6^{\frac{1}{4}} \cdot \sqrt[4]{6^3} = 6^{\frac{1}{4}} \cdot 6^{\frac{3}{4}} = 6;$$

$$\text{г) } 3\sqrt{2^8 \cdot 125 \cdot 2} = \sqrt[3]{2^9 \cdot 5^3} = 2^3 \cdot 5 = 40;$$

$$\text{д) } (3\sqrt{2} - \sqrt{3})(3\sqrt{2} + \sqrt{3}) = (3\sqrt{2})^2 - (\sqrt{3})^2 = 15;$$

$$\text{е) } 5^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[3]{5^2} = 5^{\frac{1}{3}} \cdot 5^{\frac{2}{3}} = 5^2 = 25;$$

$$\text{ж) } \frac{4 - \sqrt{6}}{4 + \sqrt{6}} + \frac{4 + \sqrt{6}}{4 - \sqrt{6}} = \frac{16 + 6 - 8\sqrt{6} + 16 + 6 + 8\sqrt{6}}{(4 + \sqrt{6})(4 - \sqrt{6})} = \frac{44}{10} = 4,4;$$

$$3) \sqrt{8\sqrt{3}} \cdot \sqrt{3\sqrt{12}} = \sqrt{8\sqrt{3} \cdot 3\sqrt{12}} = \sqrt{24 \cdot 6} = 12.$$

II-2

$$1. \quad \text{a) } (a-3)(a+3) - 2a(4-a) = a^2 - 9 - 8a + 2a^2 = 3a^2 - 8a - 9;$$

$$\text{б) } (3x+1)^2 - (3x-1)^2 = 9x^2 + 6x + 1 - 9x^2 + 6x - 1 = 12x;$$

$$\text{в) } (x+5)(x-5) - 3x(2-x) = x^2 - 25 - 6x + 3x^2 = 4x^2 - 6x - 25;$$

$$\text{г) } (2x-1)^2 - (x+3)^2 = 4x^2 - 4x + 1 - x^2 - 6x - 9 = 3x^2 - 10x - 8;$$

$$\text{д) } 3x^2(x+4) - (3x-1)(x^2 - 2x + 3) =$$

$$= 3x^3 + 12x^2 - 3x^3 + x^2 + 6x^2 - 2x - 9x + 3 = 19x^2 - 11x + 3$$

e) $2a(a+3b)^2 - (2a-b)(a^2+2b^2) = 2a(a^2+6ab+9b^2) - (2a^3 - a^2b + 4ab^2 - 2b^3) =$
 $= 2a^3 + 12a^2b + 18ab^2 - 2a^3 + a^2b - 4ab^2 + 2b^3 = 2b^3 + 13a^2b + 14ab^2.$

2. 1) a) $5a^2 + 5ab = 5a(a+b)$; б) $x^8 - 2x^5 = x^5(x^3 - 2)$;
в) $4ac^2 - 8ac + 4a^2c = 4ac(c-2+a)$; г) $x^2 - 4y^2 = (x-2y)(x+2y)$;
д) $9n - n^3 = n(9 - n^2) = n(3-n)(3+n)$; e) $49x^2 - y^4 = (7x - y^2)(7x + y^2)$;
2) a) $5ab - 25a^2 - 25b^2 = -(25a^2 - 5ab + 25b^2) = -5(5a^2 - ab + 5b^2)$;
б) $x^2 - 3x - y^2 - 3y = (x^2 - y^2) - (3x + 3y) = (x-y)(x+y) - 3(x+y) =$
 $= (x+y)(x-y-3)$; в) $(a-3)^2 - 25 = (a-3-5)(a-3+5) = (a-8)(a+2).$

3. а) $\frac{a}{a-3} - \frac{3}{a+3} = \frac{a^2 + 3a - 3a + 9}{(a-3)(a+3)} = \frac{a^2 + 9}{a^2 - 9}$;
б) $\frac{2}{x-y} - \frac{2y}{xy-x^2} = \frac{2}{x-y} - \frac{2y}{x(y-x)} = \frac{2}{x-y} + \frac{2y}{x(x-y)} = \frac{2x+2y}{x(x-y)}$;
в) $(n^2 - 6n) \cdot \frac{n^2}{n^2 - 36} = \frac{n(n-6) \cdot n^2}{(n-6)(n+6)} = \frac{n^3}{n+6}$;
г) $\frac{1}{2x^2 - 4x} \div \frac{1}{2x^2 + 4x} = \frac{2x(x+2)}{2x(x-2)} = \frac{x+2}{x-2}$.

4. а) $\frac{3}{x+2} + \frac{3}{x-2} + \frac{12}{4-x^2} = \frac{3}{x+2} + \frac{3}{x-2} - \frac{12}{(x-2)(x+2)} =$
 $= \frac{3x-6+3x+6-12}{(x-2)(x+2)} = \frac{6(x-2)}{(x-2)(x+2)} = \frac{6}{x+2}$;
б) $\frac{2ab+a^2}{2b} \cdot \frac{2b}{2a^2+a} = \frac{a(2b+a)}{a(2a+1)} = \frac{a+2b}{2a+1}$;
в) $(x^2 - y^2) \div \frac{(x+y)^2}{2x} = \frac{(x-y)(x+y)}{(x+y)^2} \cdot 2x = \frac{2x(x-y)}{x+y}$.

5. а) $\frac{3m^2-18}{m} \cdot \frac{2m}{m+3} + \frac{36m}{m-3} =$
 $= \frac{3(m-3)(m+3) \cdot 2}{m+3} + \frac{36m}{m-3} = \frac{6(m^2-6m+9)+36m}{m-3} = \frac{6m^2+54}{m-3}$
б) $\left(\frac{y}{x} - 2 + \frac{x}{y}\right) \cdot \frac{x^2}{x^2-y^2} = \frac{y^2-2xy+x^2}{xy} \cdot \frac{x^2}{x^2-y^2} = \frac{(x-y)^2 \cdot x}{y(x-y)(x+y)} = \frac{x(x-y)}{y(x+y)}$
в) $\left(\frac{25}{a^3-25a} + \frac{1}{a+5}\right) \div \left(\frac{a-5}{a^2+5a} - \frac{a}{25+5a}\right) = \left(\frac{25}{a(a-5)(a+5)} + \frac{1}{a+5}\right) \div$
 $\div \left(\frac{a-5}{a(a+5)} - \frac{a}{5(a+5)}\right) = \frac{25+a^2-5a}{a(a-5)(a+5)} \cdot \frac{5a(a+5)}{5a-25-a^2} = \frac{5}{5-a}$.

7. а). $(2^{13} \cdot 2^{-11})^{-1} = (2^2)^{-1} = \frac{1}{4}$; б). $\frac{0,001^5 \cdot 10^{10}}{10^{-4}} = \frac{(10^{-3})^5 \cdot 10^{14}}{1} = 0,1$;

в). $\frac{27^{-2} \cdot 9^2}{3^{-4}} = \frac{(3^3)^{-2} \cdot (3^2)^2}{3^{-4}} = \frac{3^{-6} \cdot 3^4}{3^{-4}} = 9$;

г). $\frac{0,25^3 \cdot 16^2}{2^4} = \frac{(2^{-2})^3 \cdot (2^4)^2}{2^4} = \frac{2^{-6} \cdot 2^8}{2^4} = \frac{1}{4}$.

8. а). $(\sqrt{8} - 4\sqrt{3} + \sqrt{12})\sqrt{2} = (2\sqrt{2} - 4\sqrt{3} + 2\sqrt{3})\sqrt{2} =$
 $= (2\sqrt{2} - 2\sqrt{3})\sqrt{2} = 4 - 2\sqrt{6}$;

б). $(1 - \sqrt{5})^2 = 1 - 2\sqrt{5} + 5 = 6 - 2\sqrt{5}$; в). $\frac{\sqrt{12} + 3\sqrt{6}}{3} = \frac{\sqrt{6}(\sqrt{2} + 3)}{3} = \frac{3 + \sqrt{2}}{3}$;

г). $(\sqrt{32} - 3\sqrt{2} + \sqrt{20})\sqrt{2} = (4\sqrt{2} - 3\sqrt{2} + 2\sqrt{5})\sqrt{2} = (\sqrt{2} + 2\sqrt{5})\sqrt{2} = 2 + 2\sqrt{10}$;

д). $(\sqrt{7} - 1)^2 = 7 + 1 - 2\sqrt{7} = 8 - 2\sqrt{7}$; е). $\frac{\sqrt{6} - 3\sqrt{2}}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3} - 3)}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3} - 3}{3}$.

9. а). $\cos\left(-\frac{5\pi}{3}\right) + \sin\frac{4\pi}{3} = \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) =$
 $= \cos\frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{3} = \frac{1 - \sqrt{3}}{2}$;

б). $\operatorname{tg}(-210^\circ) \cdot \operatorname{ctg}135^\circ = -\operatorname{tg}(180^\circ + 30^\circ) \cdot \operatorname{ctg}(90^\circ + 45^\circ) = \operatorname{tg}30^\circ \cdot \operatorname{tg}45^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$;

в). $\sin\frac{2\pi}{3} + \cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{3} - \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{2}$;

г). $\operatorname{tg}(-120^\circ) \cdot \operatorname{ctg}315^\circ = -\operatorname{tg}(90^\circ + 30^\circ) \cdot \operatorname{ctg}(360^\circ - 45^\circ) = -\operatorname{ctg}30^\circ \cdot \operatorname{ctg}45^\circ = -\sqrt{3}$;

д). $\sin(-390^\circ) + \cos405^\circ = -\sin(360^\circ + 30^\circ) + \cos(360^\circ + 45^\circ) =$
 $= -\sin30^\circ + \cos45^\circ = -0,5 + \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2} - 1}{2}$;

е). $\operatorname{tg}\frac{7\pi}{3} \cdot \operatorname{ctg}\left(-\frac{9\pi}{4}\right) = -\operatorname{tg}\left(2\pi + \frac{\pi}{3}\right) \cdot \operatorname{ctg}\left(2\pi + \frac{\pi}{4}\right) = -\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} \cdot \operatorname{ctg}\frac{\pi}{4} = -\sqrt{3}$.

10. а). $\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \cdot \operatorname{tg}(2\pi - \alpha)}{\sin(-\alpha)} = -\frac{\operatorname{ctg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\alpha}{\sin\alpha} = -\frac{1}{\sin\alpha}$.

б). $\cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha = \cos\frac{\pi}{4}\cos\alpha - \sin\frac{\pi}{4}\sin\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha$.

в). $\frac{\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) \cdot \operatorname{tg}(\pi + \alpha)}{\cos(-\alpha)} = \frac{\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\sin^2\alpha}{\cos^3\alpha}$.

$$\text{г). } \cos\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right) - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \alpha = \cos \frac{\pi}{6} \cdot \cos \alpha + \sin \frac{\pi}{6} \sin \alpha - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin \alpha.$$

$$\text{д). } \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \sin(2\pi - \alpha) - \cos \alpha \sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha \cdot \sin \alpha + \cos \alpha \cdot \cos \alpha = 1.$$

$$\text{11. а). } \frac{\sin 2\alpha}{2 \cos^2 \alpha} = \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{2 \cos^2 \alpha} = \operatorname{tg} \alpha,$$

$$\text{б) } (\cos \alpha + \sin \alpha)^2 - \sin 2\alpha = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha + \sin 2\alpha - \sin 2\alpha = 1.$$

П-3

$$\text{1. а). } 4x - 5(3x - 0,5) = 3(7 - 3x); 4x - 15x + 2,5 = 21 - 9x \\ 2x = -18,5; x = -9,25.$$

$$\text{б). } 18x - 8x^2 = 0; 6x^2 - 8x + 2 = 0; 9x - 4x^2 = 0; 3x^2 - 4x + 1 = 0; \\ x(9 - 4x) = 0; D = 16 - 4 \cdot 3 = 4; x_1 = 0; 9 - 4x = 0; x_1 = \frac{4+2}{6} = 1;$$

$$x_2 = \frac{9}{4}; \quad x_2 = \frac{1}{3}; \quad \text{г). } 2x - \frac{4}{x-3} = 4; \quad 2x^2 - 6x - 4 - 4x + 12 = 0; \\ 2x^2 - 10x + 8 = 0; x^2 - 5x + 4 = 0, \quad D = 9, \quad x_1 = \frac{5+3}{2} = 4; \quad x_2 = 1.$$

$$\text{2. а). } x^4 - 4x^2 = 0; x^2(x^2 - 4) = 0; x^2(x-2)(x+2) = 0; x_1 = 0; x_{2,3} = \pm 2;$$

$$\text{б). } 5(x-6)^2 + 11(x-6) = x-6; x-6 = 0; 5(x-6) + 11 = 1; x_1 = 6; \\ 5(x-6) = -10; x_2 = 4.$$

$$\text{3. а). } 7x - 3(2x - 1,5) = 4(x+3); 7x - 6x + 4,5 = 4x + 12; 3x = -7,5; x = -2,5;$$

$$\text{б). } 8x - 2x^2 = 0; 4x - x^2 = 0; x_1 = 0, x_2 = 4;$$

$$\text{в). } -3x^2 - 5x + 2 = 0; 3x^2 + 5x - 2 = 0; D = 25 + 4 \cdot 3 \cdot 2 = 49;$$

$$\text{г). } 2 + \frac{8}{x-3} = \frac{4}{x}; \quad 2x(x-3) + 8x = 4(x-3); \quad 2x^2 - 6x + 8x = 4x - 12; \\ x^2 - x + 6 = 0; D = 1 - 4 \cdot 6 < 0; \text{нет корней.}$$

$$\text{4. а). } x^4 - x^2 = 0; x^2(x^2 - 1) = 0; x^2(x-1)(x+1) = 0; x_1 = 0, x_{2,3} = \pm 1;$$

$$\text{б) } 2(x-1)^2 + 3(x-1) = x-1; x-1 = 0 \quad 2(x-1) + 3 = 1; \\ x_1 = 1; 2(x-1) = -2; x-1 = -1; x_1 = 0.$$

$$\text{5. а) } \frac{4x-1}{9} - \frac{3x+1}{12} = \frac{2}{3}; 16x - 4 - 9x - 3 = 24; 7x = 31; x = 4\frac{3}{7}.$$

$$\text{б) } \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{1}{2} = 0; x^2 - 2x - 1 = 0; D = 4 + 4 = 2 \cdot 4;$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}.$$

$$\text{в) } \frac{x}{x+5} + \frac{x+5}{x-5} = \frac{50}{x^2-25}; \quad \frac{x}{x+5} + \frac{x+5}{x-5} - \frac{50}{(x-5)(x+5)} = 0;$$

$$x^2 - 5x + x^2 + 10x + 25 - 50 = 0; \quad 2x^2 + 5x - 25 = 0;$$

$$D = 25 + 4 \cdot 2 \cdot 25 = 225; \quad x_1 = \frac{-5+15}{4} = 2,5;$$

$x_2 = -5$ - посторонний корень т.к. $x \neq \pm 5$.

$$6. \quad \text{а) } x^3 - 81x = 0; \quad x(x^2 - 81) = 0; \quad x(x-9)(x+9) = 0; \quad x_1 = 0, \quad x_{2,3} = \pm 9;$$

$$\text{б) } x^4 - 5x^2 + 4 = 0; \quad x^2 = y \geq 0; \quad y^2 - 5y + 4 = 0; \quad D = 25 - 16 = 9;$$

$$y_1 = \frac{5+3}{2} = 4; \quad y_2 = 1; \quad x^2 = 4 \quad x^2 = 1; \quad x_{1,2} = \pm 2, \quad x_{1,2} = \pm 1.$$

$$\text{в) } (x^2 - 4)^2 + 5(x^2 - 4) = 0; \quad x^2 - 4 = 0, \quad x^2 - 4 + 5 = 0$$

$$x_{1,2} = \pm 2; \quad x^2 = -1 - \text{нет корней.}$$

$$7. \quad \text{а) } \begin{cases} 2x + 4y = 16; x + 2y = 8; 2y = 8 - x; \\ 3x - 2y = -16; 2y = 3x + 16 \end{cases}; \quad 3x + 16 = 8 - x; \quad 4x = -8;$$

$$x = -2; \quad y = \frac{8+2}{2} = 5. \quad \text{Ответ: } (-2; 5).$$

$$\text{б) } \begin{cases} 2x + y^2 = 11 \\ x - y = 4; x = 4 + y \end{cases}; \quad 8 + 2y + y^2 - 11 = 0; \quad y^2 + 2y - 3 = 0;$$

$$D = 4 + 4 \cdot 3 = 16; \quad y_1 = \frac{-2+4}{2} = 1; \quad y_1 = -3; \quad x_1 = 4+1=5; \quad x_2 = 4-3=1.$$

Ответ: (5;1), (1;-3).

$$\text{в) } \begin{cases} xy = -8 \\ x + 2y = 6; x = 6 - 2y \end{cases}; \quad y(6 - 2y) + 8 = 0; \quad 2y^2 - 6y - 8 = 0;$$

$$y^2 - 3y - 4 = 0; \quad D = 9 + 4 \cdot 4 = 25; \quad y_1 = \frac{3+5}{2} = 4; \quad y_2 = -1.$$

$$x_1 = 6 - 2 \cdot 4 = -2; \quad x_2 = 6 + 2 = 8. \quad \text{Ответ: } (-2; 4), (8; -1).$$

$$8. \quad \text{а) } \begin{cases} 3x - 2y = 3 \\ 2x - 4y = 10; x - 2y = 5; x = 5 + 2y \end{cases}; \quad 3(5 + 2y) - 2y = 3;$$

$$15 + 6y - 2y = 3; \quad 4y = -12; \quad y = -3; \quad x = 5 - 2 \cdot 3 = -1. \quad \text{Ответ: } (-1; -3).$$

$$\text{б) } \begin{cases} x + 3y = 3; x = 3 - 3y \\ 3xy = 2 \end{cases}; \quad 3y(3 - 3y) = 2; \quad 9y - 9y^2 = 2;$$

$$9y^2 - 9y + 2 = 0; \quad D = 81 - 4 \cdot 9 \cdot 2 = 9; \quad y_1 = \frac{9+3}{18} = \frac{2}{3}; \quad y_2 = \frac{1}{3};$$

$$x_1 = 3 - 3 \cdot \frac{2}{3} = 1; \quad x_2 = 3 - 3 \cdot \frac{1}{3} = 2. \quad \text{Ответ: } \left(1; \frac{2}{3}\right), \left(2; \frac{1}{3}\right).$$

$$\begin{aligned}
 & \text{в) } \begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x - y = 5; x = 5 + y \end{cases}; \quad 25 + 10y + y^2 + y^2 = 25; \quad 2y^2 + 10y = 0; \\
 & y_1 = 0, y_2 = -5; \quad x_1 = 5; x_2 = 0. \quad \text{Ответ: } (5; 0); (0; -5).
 \end{aligned}$$

$$\text{9. а) } \begin{cases} \frac{2x-5y}{3} + \frac{3x-2y}{4} = 5; \quad 8x-20y+9x-6y = 60 \\ \frac{x-2y}{4} - 2y = 3; \quad x-2y-8y = 12 \end{cases}; \quad \begin{cases} 17x-26y = 60; \\ x = 10y+12 \end{cases};$$

$$170y + 84 - 26y = 60; \quad 144y = -24; \quad y = -\frac{1}{6}; \quad x = -\frac{10}{6} + 12 = \frac{31}{3}.$$

$$\text{Ответ: } \left(\frac{31}{3}; -\frac{1}{6}\right).$$

$$\text{б) } \begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 7 \\ x - y = -1; y = x + 1 \end{cases}; \quad x^2 - x|x+1| + |x+1|^2 = 7;$$

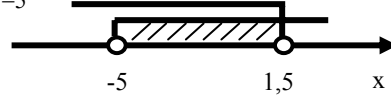
$$x^2 - x^2 - x + x^2 + 2x + 1 - 7 = 0; \quad x^2 + x - 6 = 0; \quad D = 1 + 4 \cdot 6 = 25;$$

$$x_1 = \frac{-1+5}{2} = 2; x_2 = -3; \quad y_1 = 3; y_2 = -2. \quad \text{Ответ: } (2; 3); (-3; -2).$$

$$\text{10. } y = -2x^2 - 2x + 4; \quad y = 9 - 5x; \quad -2x^2 - 2x + 4 = 9 - 5x;$$

$$2x^2 - 3x + 5 = 0; \quad D = 9 - 4 \cdot 2 \cdot 5 < 0 - \text{нет корней.} \quad \text{Ответ: нет.}$$

$$\text{11. а) } \begin{cases} 3x + 7 > 5x + 10; 2x < 3; x < -1,5 \\ 4x - 1 > x - 16; 3x > -15; x > -5 \end{cases}$$

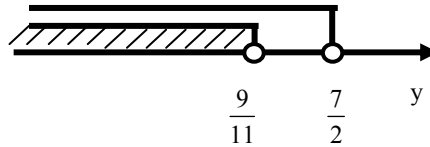


$$\text{Ответ: } (-5; -1,5).$$

$$\text{б) } \begin{cases} x - 10 > 2x - 4; x < -6 \\ 3x - 4(x - 7) < 16 - 3x; 3x - 4x + 28 + 3x < 16; 2x < -12; x < -6 \end{cases}$$

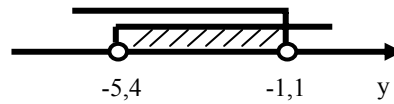
$$\text{Ответ: } (-\infty; -6)$$

$$\text{в) } \begin{cases} \frac{y-5}{3} < 2y > 2y-8; y-5-6y > 6y-24; 11y < 19; y < \frac{19}{11}; \\ 3y - \frac{2y+10}{2} < 2; 6y-2y-10 < 4; 4y < 14; y < \frac{7}{2} \end{cases}$$



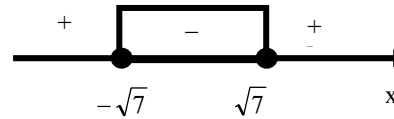
$$\text{Ответ: } \left(-\infty; \frac{19}{11}\right).$$

$$12. \begin{cases} \frac{y-5}{4} < \frac{2y+3}{3}; 3y-15 < 8y+12; 5y > -27; y > -\frac{27}{5} \\ \frac{4y+1}{2} < \frac{y-4}{3}; 12y+3 < 2y-8; 10y < -11; y < -1,1 \end{cases}$$



Ответ: -5; -4; -3; -2.

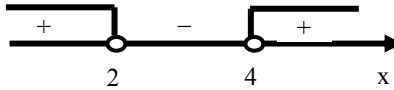
$$13. \text{ а) } x^2 - 7 \leq 0; (x - \sqrt{7})(x + \sqrt{7}) \leq 0.$$



Ответ: $[-\sqrt{7}; \sqrt{7}]$.

$$\text{ б) } x^2 - 6x + 10 > 2; x^2 - 6x + 8 > 0; D = 36 - 32 = 4;$$

$$x_1 = \frac{6+2}{2} = 4; x_2 = 2.$$

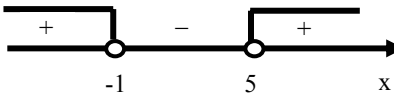


Ответ: $(-\infty; 2) \cup (4; +\infty)$

$$\text{ в) } x^2 - 5x + 7 < 0; D = 25 - 47 < 0; \text{ т.к. } a = 1 > 0, \text{ то нет решений.}$$

Ответ: нет решений.

$$\text{ г) } (x-5)(x+1) > 0.$$



Ответ: $(-\infty; -1) \cup (5; +\infty)$.

П-4

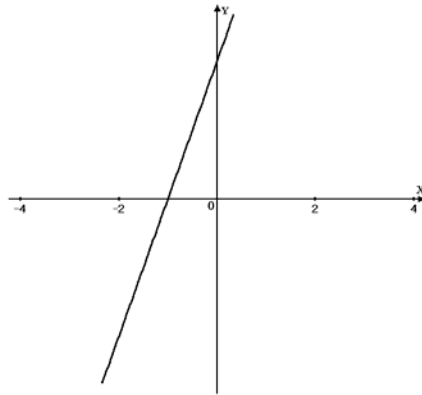
$$1. \text{ а) } y = \frac{x-1}{x+5}; x+5 \neq 0, \text{ т.к. знаменатель; } x \neq -5, x \leq 4;$$

$$\text{ б) } y = \sqrt{4-x}; 4-x \geq 0, \text{ т.к. } D(\sqrt{x}) = [0; +\infty]; x \neq -5; \text{ Ответ: } x \leq 4.$$

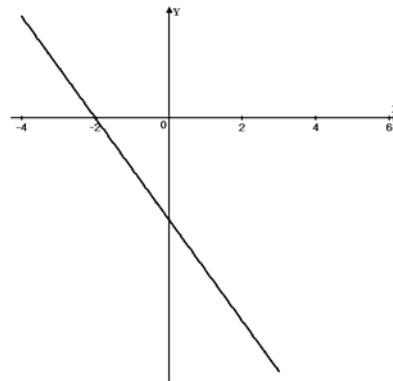
$$\text{ в) } y = \frac{5}{x-1}; x-1 \neq 0; x \neq 1; \text{ Ответ: } x \neq 1. \text{ г) } y = \sqrt{3x+6}; 3x+6 \geq 0;$$

$$3x \geq -6; x \geq -2; \text{ Ответ: } x \geq -2.$$

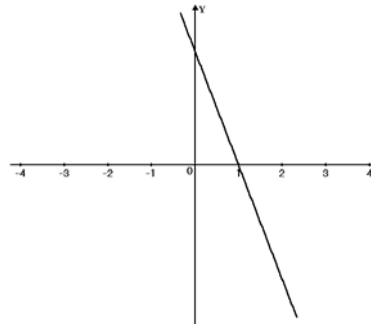
$$2. \text{ а) } 3x+3=y; 1) y > 0 \text{ при } x > -1; y > 0 \text{ при } x > -1; y < 0 \text{ при } x < -1; 2) \text{ возраст.}$$



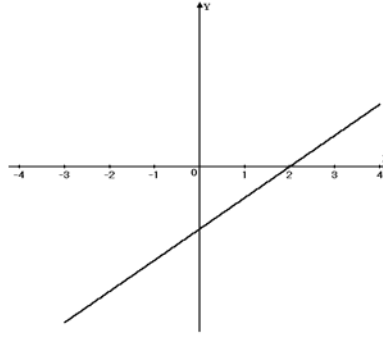
б). $y = -2x - 4$. 1) $y = 0$ при $x = -2$; $y > 0$ при $x < -2$; $y < 0$ при $x > -2$; 2) убывающая.



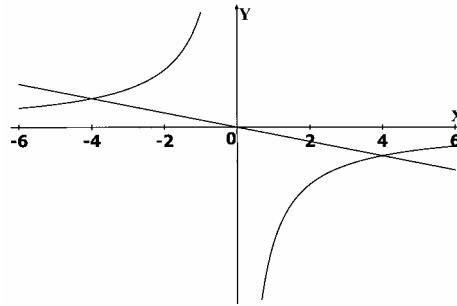
3. а). $y = -3x + 3$; 1) $y = 0$ при $x = 1$; $y > 0$ при $x < 1$; $y < 0$ при $x > 1$; 2) убывающая.



- б). $y = 2x - 4$; 1) $y = 0$ при $x = 2$; $y > 0$ при $x > 2$; $y < 0$ при $x < 2$;
 2) возрастающая.

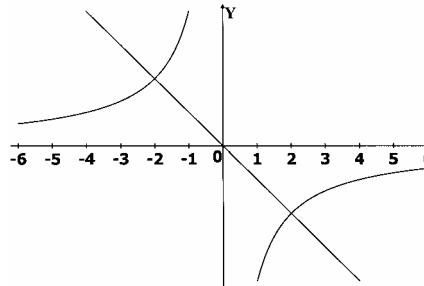


4. $y = -\frac{4}{x}$, $y = -\frac{1}{4}x$; $-\frac{4}{x} = -\frac{1}{4}x$; $x^2 = 16$; $x = \pm 4$.

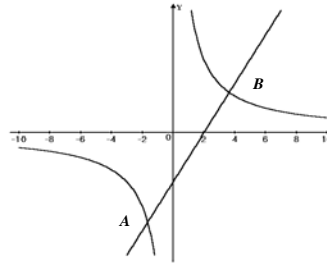


5. $y = -\frac{4}{x}$; а) $y > 0$ при $x < 0$; б) возрастает на $D(y)$.
 $y < 0$ при $x > 0$;

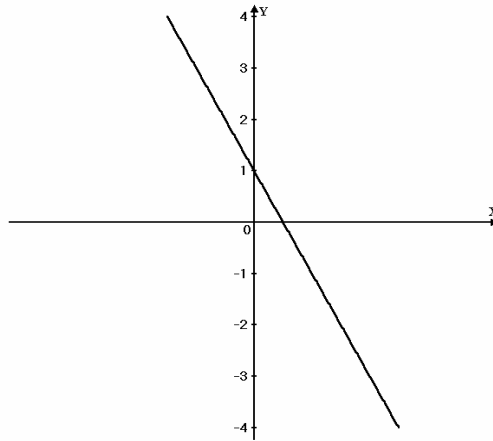
6. $y = -\frac{6}{x}$, $y = -1,5x$; $-\frac{6}{x} = -1,5x$; $x^2 = 4$; $x = \pm 2$.



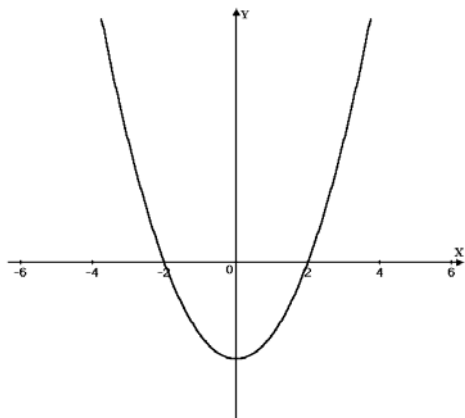
7. $y = -\frac{6}{x}$; а) $y > 0$ при $x < 0$; б) возрастает на $D(y)$.
 $y < 0$ при $x > 0$.
8. $y = \frac{12}{x}$, $y = 2x - 4$. $A(3,5;3,2)$, $B(-1,2;-5,8)$,



9. $y = \frac{12}{x}$; а) $y > 0$ при $x > 0$; б) убывает; $y < 0$ при $x < 0$.
10. $y = -2x + b$; $-1 = -2 + b$; $b = 1$; $y = -2x + 1$.



- а) $y = 0$ при $x = 0,5$; $y > 0$ при $x < 0,5$; $y < 0$ при $x > 0,5$; б) убывающая.
11. а) $y = 3x - 5$, $y = 2x - 5$; $3x - 5 = 2x - 5$; $x = 0$, т.е. пересекаются;
- б) $y = -\frac{1}{2}x + 3$, $y = -\frac{1}{2}x - 7$. $-\frac{1}{2}x + 3 = -\frac{1}{2}x - 7$ — нет корней, т.е. не пересекаются.
12. $y = x^2 - 4$



а) $x_{1,2} = \pm 2$; $y > 0$ при $x \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$.

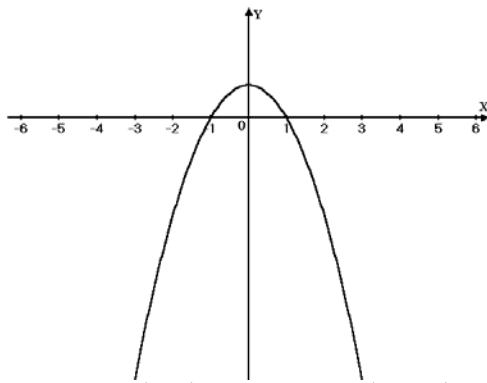
$y < 0$ при $x \in (-2; 2)$

б) y возрастает при $x \geq 0$; убывает при $x \leq 0$.

13. $y = -2x^2 + x + 3$; $y(0) = 3$ (0;3); $2x^2 - x - 3 = 0$;

$D = 1 + 4 \cdot 3 \cdot 2 = 25$; $x_1 = \frac{1+5}{4} = 1,5$; $x_2 = -1$; (1,5;0), (-1;0).

14. $y = -x^2 + 1$



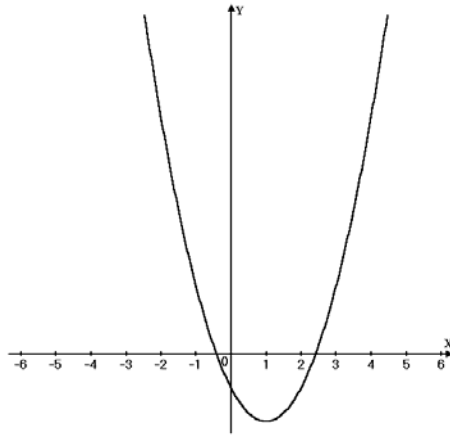
а) $x_{1,2} = \pm 1$; $y > 0$ при $x \in (-1; 1)$; $y < 0$ при $x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$.

б) y возрастает при $x \leq 0$; y убывает при $x \geq 0$.

15. $y = 2x^2 - x - 3$; $y(0) = -3$; (0;-3); $2x^2 - x - 3 = 0$;

$D = 1 + 4 \cdot 3 \cdot 2 = 25$; $x_1 = \frac{1+5}{4} = 1,5$; $x_2 = -1$; (1,5;0), (-1;0).

16. $y = x^2 - 2x - 1 = x^2 - 2x + 1 - 2 = (x-1)^2 - 2$



- а) $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}$; $y > 0$ при $x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$. $y < 0$ при $x \in (x_1; x_2)$.
 б) y возрастает при $x \geq 1$, убывает при $x \leq 1$; в) $y_{\min} = 2$.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ШКОЛЬНЫХ ОЛИМПИАД

Осенняя олимпиада.

1. Пусть x – цифра десятков, y – цифра единиц, тогда $10x+y$ – данное число.

Получаем уравнение: $10x+y=xy+12$

Перепишем его в виде: $(10-y)(x-1)=2$

В последнем уравнении слева стоит произведение двух натуральных чисел, значит, возможны два случая:

$$1) \begin{cases} 10-y=2; y=8 \\ x-1=1; x=2 \end{cases}; \quad 2) \begin{cases} 10-y=1; y=9 \\ x-1=2; x=3 \end{cases};$$

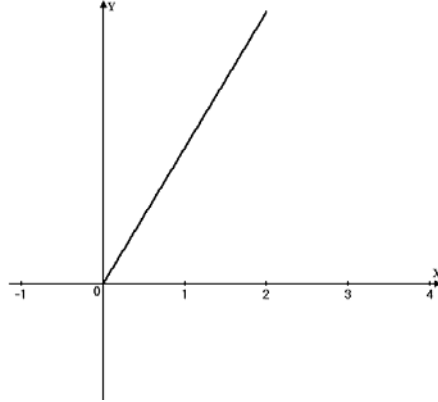
Ответ: 28 или 39.

- 2.

Предположим, что дробь $\frac{a}{b}$ сократима, т.е. $a = a_1k$; $b = b_1k$, где $k \neq 1$ – натуральное число. Тогда получаем:

$\frac{a-b}{a+b} = \frac{a_1k - b_1k}{a_1k + b_1k} = \frac{k(a_1 - b_1)}{k(a_1 + b_1)} = \frac{a_1 - b_1}{a_1 + b_1}$, т.е. дробь $\frac{a-b}{a+b}$ сократима, что противоречит условию. Значит, наше предположение неверно. Значит, дробь $\frac{a}{b}$ несократима, ч.т.д.

$$3. \quad y = x + |x| = \begin{cases} x + x = 2x, & x \geq 0 \\ x - x = 0, & x < 0 \end{cases}$$



$$4. \quad \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \dots + \frac{1}{2n} = n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}, \text{ ч.т.д.}$$

$$5. \quad (1+x^2)^2 = 4x(1-x^2); \text{ пусть } x^2 = a > 0, \text{ имеем: } x^2 = -1-4x;$$

$$(1+a)^2 = 4x(1-a); a^2 + (2+4x)a + 1 - 4x = 0; D = 16x^2;$$

$$a_1 = \frac{-2-4x+4x}{2} = -1 < 0; a_2 = \frac{-2-4x-4x}{2} = -1-4x;$$

$$x^2 + 4x + 1 = 0; D = 16 - 4 = 4 \cdot 3; x_{1,2} = \frac{-4 \pm 2\sqrt{3}}{2} = -2 \pm \sqrt{3}.$$

Ответ: $-2 \pm \sqrt{3}$

$$6. \quad |x-1| + |x+2| \leq 3. \text{ Нули модулей } x_1 = -2; x_2 = 1.$$

$$a) \quad (-\infty; -2]; 1 - x - x - 2 \leq 3;$$

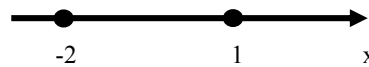
$$2x \geq -4; x \geq -2; x = -2;$$

$$б) \quad [-2; 1]; 1 - x + x + 2 \leq 3; 3 \leq 3; x \in [-2; 1];$$

$$в) \quad [1; +\infty); x - 1 + x + 2 \leq 3; 2x \leq 2; x \leq 1; x = 1;$$

Итого, получаем $-2 \leq x \leq 1$.

Ответ: $-2 \leq x \leq 1$



7. Пусть $AB=a$ км.
 x км/ч, y км/ч – скорости пешехода и велосипедиста соответственно.

$$\text{Получаем: } \begin{cases} \frac{a-6}{y} = \frac{6}{x}; \frac{x}{y} = \frac{6}{a-6} \\ \frac{a}{y} = \frac{a-16}{x}; \frac{x}{y} = \frac{a-16}{a} \end{cases}; \frac{6}{a-6} = \frac{a-16}{a};$$

$$a^2 - 22a + 96 = 6a; a^2 - 28a + 96 = 0; D = 400;$$

$$a_1 = \frac{28+20}{2} = 24; a_2 = 4 - \text{не подходит по условию } AB=24 \text{ км.}$$

Ответ: 24 км.

8. $x^2 y^2 - 9x^2 - 4y^2 + 36 = 0; 9x^2 + 4y^2 + 12xy = x^2 y^2 + 12xy + 36;$

$$(3x + 2y)^2 = (xy + 6)^2$$

$$3x + 2y = xy + 6; \quad 3x + 2y = -(xy + 6);$$

$$3x - xy = 6 - 2y; \quad 3x + xy = -6 - 2y;$$

$$x = \frac{6-2y}{3-y} = 2; \quad x = \frac{-6-2y}{3+y} = -2;$$

$$y = 3. \quad y = -3.$$

Итак, графики уравнения - объединение четырех прямых:

$$x = -2, x = 2, y = -3, y = 3.$$

Весенняя олимпиада

1. $x^6 - x^5 + x^3 - x + 1 = x^6 - x^5 + x^4 - x^4 + x^3 - x^2 + x^2 - x + 1 =$
 $= x^4(x^2 - x + 1) - x^2(x^2 - x + 1) + (x^2 - x + 1) = (x^2 - x + 1)(x^4 - x^2 + 1)$

2. $2x^2 + 2xy + 4y^2 + 2x + 6y + 5 \geq 1$

$$x^2 + 2xy + y^2 + x^2 + 2x + 1 + 3y^2 + 6y + 3 = (x + y)^2 + (x + 1)^2 + 3(y + 1)^2 \geq 0$$

при любых x и y , значит, исходное неравенство также верно для любых x и y . ч.т.д.

3. $|x| + |y| = 1.$

4. а) $\sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x - \sqrt{x}} = \sqrt[4]{x};$

$$x + \sqrt{x} + x - \sqrt{x} - 2\sqrt{(x + \sqrt{x})(x - \sqrt{x})} = \sqrt{x};$$

$$2x - 2\sqrt{x^2 - x} = \sqrt{x}; \quad 2x = 2\sqrt{x^2 - x} + \sqrt{x};$$

$$4x^2 = 4x^2 - 4x + x + 4\sqrt{x(x^2 - x)}; \quad 3x = 4\sqrt{x(x^2 - x)};$$

$$9x^2 = 16x(x^2 - x)$$

$$x_1 = 0, \quad 9 = 16(x - 1);$$

$$x_2 = 1\frac{9}{16}.$$

Ответ: $0; 1\frac{9}{16}$.

$$\begin{aligned} \text{б) } \sqrt[3]{(1+x)^2} - \sqrt[3]{(1-x)} &= \sqrt[3]{1-x^2}; \\ (1+x^2) - 3\sqrt[3]{(1+x)^4(1-x)^2} + 3\sqrt[3]{(1+x)^2(1-x)^4} - (1-x)^2 &= 1-x^2. \end{aligned}$$

$$5. \frac{a_1}{1-q} = 56$$

Квадраты образуют новую бесконечную геом. прогрессию
 $cb_1 = a_1^2, q_1 = q^2$.

$$\text{Имеем } \frac{a_1^2}{1-q^2} = 448; \begin{cases} \frac{a_1}{1-q} = 56; a_1 = 56(1-q) \\ \frac{a_1^2}{1-q^2} = 448 \end{cases}; \frac{56^2(1-q^2)}{(1-q)(1+q)} = 448;$$

$$\frac{56(1-q)}{1+q} = 8; 7(1-q) = 1+q; 7-7q = 1+q; 8q = 6; q = \frac{3}{4};$$

$$a_1 = 56 \cdot \frac{1}{4} = 14$$

Ответ: $a_1 = 14; q = \frac{3}{4}$.

$$\begin{aligned} 6. \sqrt{3+\sqrt{6}+\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \sqrt{3-\sqrt{6}+\sqrt{3}-\sqrt{2}} &= \sqrt{\left(\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)^2} + \\ + \sqrt{\left(\frac{1-\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)^2} &= \frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+1+\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{2(1+\sqrt{3})}{\sqrt{2}} = \\ = \sqrt{2}(1+\sqrt{3}) &= \sqrt{3} + \sqrt{2}, \text{ ч.т.д.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 7. \sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20-14\sqrt{2}} &= \sqrt[3]{(2+\sqrt{2})^3} + \sqrt[3]{(2-\sqrt{2})^3} = \\ = 2 + \sqrt{2} + 2 - \sqrt{2} &= 4. \end{aligned}$$

$$8. x^2 - y^2 = 21; (x-y)(x+y) = 21; x > y;$$

$(x-y), (x+y)$ -натуральные; $21=3 \cdot 7$ или $21=1 \cdot 21$;

$$\text{Получаем: } \begin{cases} x-y=3; x=3+y \\ x+y=7 \end{cases}; 3+2y=7; 2y=4; y=2; x=5;$$

или

$$\begin{cases} x - y = 1; x = y + 1 \\ x + y = 21 \end{cases}; 2y = 20; y = 10 \quad x = 11.$$

Ответ: (5;2) или (11; 10).